1

Handbuch

der

höheren und niederen

Meßkunde

oder

gründliche Unterweisung

in der gewöhnlichen Feldmeßkunst, sowie zu größeren geodätischen Aufnahmen, zu geographischen Triangulirungen, barometrischen Höhenmessungen, zu Nivellements und zum Gebrauch der Instrumente.

Nach dem neuesten Standpuncte der Wissenschaft bearbeitet

von

Dr. Fr. W. Barfuß.

Dritte verbesserte und vermehrte Auflage.

Mit 15 lithographirten Foliotafeln.

Weimar, 1854.
Verlag, Druck und Lithographie von Bernh. Fr. Voigt.

Vorrede
zur ersten Auflage.

Die practische Geometrie ist von den mathematisch-technischen Wissenschaften diejenige, in welcher die Lehrsätze der reinen Mathematik unmittelbar, d. h. ohne Zuziehung wesentlich neuer Begriffe, ihre Anwendung finden. Sie entlehnt aber von der Theorie meist nur elementare Sätze und ist deshalb geeignet, von den Lehrern der Mathematik selbst in die elementarsten Vorträge in der Absicht verflochten zu werden, um das Interesse der Schüler an der abstracten Wissenschaft, die ihnen nur gar zu oft gehaltlos scheinen will, zu wecken und zu steigern. Bei dem in neuerer Zeit immer schöner sich entfaltenden mathematischen Unterrichte scheint es sehr wichtig, daß man neben dem Dienste, den die practische Geometrie der materiellen Wohlfahrt leistet,

auch ihren Nutzen in der Entwickelung der geistigen Anlagen durch die Mathematik gehörig schätzen lerne.

Ich habe freilich dieses Lehrbuch nicht von jenem pädagogischen Standpuncte aus verfaßt; dasselbe ist vielmehr unmittelbar als Rathgeber für solche bestimmt, die von der practischen Geometrie ein ausschließliches Gewerbe zu machen gedenken oder doch in ihrem Berufe ihrer bedürfen. Deßhalb habe ich mich bemüht, die Bedürfnisse der Praxis allenthalben gehörig zu würdigen und die geeignetsten Mittel zur Befriedigung derselben anzugeben. Da es aber unmöglich ist, zu einer gründlichen Einsicht in die Praxis zu gelangen, wenn dieselbe nicht zugleich auch von klaren und oft tief eingehenden theoretischen Betrachtungen geleitet wird, so war meine Sorge vorzüglich auch die, Alles mit dem Lichte der Theorie zu beleuchten, was einer solchen Beleuchtung fähig war. Ich suchte dabei die nöthige Klarheit nicht sowohl durch ängstliche Vermeidung mancher mathematischer Disciplinen, als vielmehr durch zweckmäßige Verbindung der Construction und Rechnung zu erreichen, welchen Weg man zwar im Allgemeinen immer betreten hat, von dem man aber doch zum Nachtheil für die klare Einsicht in die Sache, obschon mit Gewinn rücksichtlich der Kürze der Darstellung, hie und da abgekommen war.

Ein großer Mißgriff würde es aber sein, wenn man in einem solchen Lehrbuche in dem Streben nach theoretischer Aufhellung weiter gehen wollte, als es die Praxis bedarf. Viele Aufgaben, welche als practische hingestellt worden sind, haben nichts Practisches, als die Namen der Objecte, mit denen es die practische Geometrie zu thun hat; viele andere von practischem Werthe sind theoretisch richtig gelöst worden, ohne daß die Auflösung practisch

brauchbar ist. Alle solche Spielereien füllen unnützer Weise den Raum und müssen bei Seite gesetzt werden. Die practischen Aufgaben sind meistens sehr einfach und bieten keine theoretischen Schwierigkeiten. Da aber hier mit concreten Größen operirt wird, deren Verhältnisse erst durch Beobachtungen ermittelt werden müssen, sich aber in Folge der Unvollkommenheit unserer Sinne und Werkzeuge nur bis auf gewisse Grenzen näherungsweise angeben lassen, so werden auch die aus ihnen abgeleiteten Resultate mehr oder weniger von der Wirklichkeit abweichen, und die Hauptfrage ist nun die, auf welche Weise die größte Annäherung an die Wirklichkeit erhalten werden kann. Hierdurch eben stellt sich die practische Geometrie als eine selbstständige, von der abstracten Wissenschaft getrennte heraus, und von dieser Seite bietet sie ein ganz neues Feld von Betrachtungen, die das Interesse des Mathematikers um so mehr in Anspruch nehmen, als sie überall, wo die Mathematik in technischen Verrichtungen die Führerin abgiebt, in ähnlicher Weise wiederkehren.

Ob ich nun rücksichtlich dieser ihrer Eigenthümlichkeit die practische Geometrie genügend erfaßt und dargestellt habe, muß ich dem Urtheile des Kenners anheimgeben. Alles zu sagen, was irgend gewünscht werden könnte, ist unmöglich und in einem Lehrbuche unstatthaft; denn dieses soll ja nur über die Principien Aufschluß geben, nach welchen alle Vorkommnisse im Bereiche der Wissenschaft beurtheilt werden müssen, und die Beurtheilung nach diesen Principien an den wichtigsten Vorkommnissen selbst erläutern. Daß aber ein solches Lehrbuch, wenn es aus obgedachtem Gesichtspuncte die Sache genügend erläutert, für den Practiker sowohl, als auch für den Theoretiker gleich nützlich sei, brauche ich kaum zu sagen.

Nur auf diesem Wege wird ersterer zu einer gründlichen Beurtheilung seiner Verfahrungsweise gelangen und seine Anordnungen mit Schnelligkeit so zu treffen lernen, daß sie dem beabsichtigten Zwecke sicher entsprechen. Von dem Theoretiker verlangt man freilich in der Praxis nicht das, was man Routine nennt; weil er aber doch meistentheils als Lehrer aufzutreten gedenkt, so ist es für ihn eine Sache von der höchsten Bedeutung, daß er auch in die practischen Aufgaben sich gründliche Einsicht verschaffe und das, was zu ihrer practischen Lösung gehört, allseitig verstehen lerne. Daß er hierdurch auch seine Theorie in sofern fördern werde, als er nun das der Anwendung unmittelbar oder mittelbar Dienende von dem, was bloß theoretisches Interesse hat, zu sondern weiß, ist einleuchtend.

Diese Sonderung, welcher nothwendig eine richtige Verbindung des rein Theoretischen mit dem practisch Anwendbaren folgen muß, ist nun, nach meiner Meinung, für den Lehrer an den in der neuern Zeit sich immer mehr geltend machenden Realschulen eine wichtige Aufgabe. Dem Zwecke dieser Schulen gemäß soll ja der Zögling durch die Wissenschaft nicht nur zum freien Gebrauche seiner Urtheilskraft gelangen; er soll auch in den Stand kommen, von der erlernten Wissenschaft überall mit Leichtigkeit die richtige Anwendung zu machen, was er begreiflich nur durch Uebung an mannigfachen Beispielen lernen kann. Diese geben zugleich auch den Stoff ab, an welchem die abstracte Wissenschaft, gleichsam die Farbe, festgehalten werden kann, und hier komme ich wieder auf das zurück, was ich gleich im Anfange von dem pädagogischen Werthe der practischen Geometrie aussprach. Es könnte darnach scheinen, als ob ich ein Buch für zweck-

mäßig halte, in welchem der reinen Wissenschaft zugleich practisch geometrische Anwendungen, so wie es eben die Folge der Lehrsätze mit sich bringt, beigegeben wären. Ich muß gestehen, daß ich ein solches Buch mehr für der Wissenschaft nachtheilig, als für einen Gewinn derselben halte. Es kann nur die freie Thätigkeit des Lehrers hemmen und dem Schüler die Uebersicht über sein Wissen erschweren. Der Lehrer muß vielmehr nach freier Wahl und mit selbstständigem Urtheile der abstracten Wissenschaft die Anwendung beigeben.

Dieser Anforderung wird er aber nur durch innige Bekanntschaft mit der practischen Wissenschaft, durch richtige Würdigung ihres Verhältnisses zur reinen Theorie genügen, und von diesem Standpuncte aus wird man zugeben, daß Lehrbücher der practischen Geometrie in der neuesten Zeit nicht minder Bedürfniß sind, als ehedem, als die großartigen Vermessungen aller civilisirten Staaten ihren Anfang nahmen. Wir haben nun freilich schon vieles Treffliche in diesem Fache, allein es schien mir, als ob noch nirgends die practischen Erfahrungen, wie sie im Verlaufe der belehrenden Zeit gemacht wurden, in gehöriger Vollständigkeit gesammelt seien, und darum entschloß ich mich zur Herausgabe dieses Werkes, über welches ich nur noch hinsichtlich der Eintheilung und der Bearbeitung des Stoffes Einiges sagen will.

Durch ihre großartigen Operationen in der neueren Zeit hat sich die practische Geometrie unmittelbar an die Astronomie angeschlossen, so daß das, was man heut' zu Tage eine Landesvermessung nennt, nur im Zusammenhange mit der Astronomie verständlich ist. Aus diesem Grunde muß sich ein Lehrbuch der practischen Geometrie bis in das Ge-

biet der Astronomie erheben; doch ist es unstatthaft, die astronomischen Probleme vollständiger abzuhandeln, als zum Verständniß der geodätischen Operationen nöthig ist. — Den Gang großer Vermessungen im Auge habend, schien es mir am vortheilhaftesten, von der astronomischen Ortsbestimmung zu den großen geodätischen Operationen, und von diesen zu den Specialvermessungen herabzugehen. Hierdurch ist nicht nur die Uebersicht über den ganzen Umfang der practischen Geometrie, sondern auch das Verständniß ihrer wesentlichsten Constructionen schon im Voraus gewonnen worden, und der spätere Vortrag braucht sich bloß mit den Vermessungen im Kleinen, so weit die Gestalt der Erde nicht in Betracht kommt, zu beschäftigen, mit besonderer Rücksicht auf die zur Ausübung dienenden Mittel und auf den größten erreichbaren Grad practischer Genauigkeit. Wie diese Ansicht sich rechtfertigt, wird man bei der Einsicht in das Buch selbst gewahren; ich bemerke nur noch, daß es mir rücksichtlich der Bedürfnisse mancher Leser nothwendig schien, hier und da nach einer Klarheit im Vortrage zu streben, die dem gebildeteren Leser wohl anstößig sein könnte. Aus derselben Rücksicht habe ich wichtige Resultate, die mit gehöriger Klarheit nur aus weitläufigeren analytischen Untersuchungen hervorgehen konnten, nochmals mit populärem Ausdrucke zusammengestellt, auch viele jener Untersuchungen, um dem Leser die Uebersicht über die Hauptsache nicht zu erschweren, unter den Text gesetzt.

Weimar, im Juni 1842.

Dr. Barfuß.

Vorrede
zur zweiten Auflage.

Ich habe bei der Herausgabe dieser zweiten Auflage keinen Grund auffinden können, warum ich von dem Plane, nach welchem die erste Auflage verfaßt ist, abweichen sollte, zumal ich mich aus eigner Erfahrung überzeugt habe, daß bei'm Unterrichte in der practischen Geometrie mein Lehrbuch den Anforderungen entspricht. Man muß nämlich bedenken, daß, obschon ich eine Uebersicht über das ganze Gebiet der Geodäsie zu geben beabsichtigte, ich dennoch vorzüglich die s. g. niedere Praxis, wie dieselbe für das Cataster, für ökonomische und technische Zwecke geübt wird, im Auge haben mußte. Dafür habe ich nach meinem Dafürhalten so viel gethan, als man billiger Weise fordern kann, und die gegenwärtige zweite Auflage hat nur einige Berichtigungen, nicht aber wesentlich neue Zusätze erhalten.

Nun wurde aber in neuerer Zeit die höhere Geodäsie dadurch besonders beträchtlich gefördert, daß man bei ihr die Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadrate auszugleichen anfing, und es ist sogar der Versuch gemacht worden, die niedere Praxis nach gleichen Maximen zu üben. Doch glaube ich nicht, daß dieses Unternehmen guten Fortgang haben werde, ja ich bin der Meinung, daß die Einführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in die niedere Praxis weder nöthig noch zweckmäßig sei Denn unsere Messungen sind so genau, daß allen Anforderungen, die man an die niedere Praxis machen kann, vollkommen entsprochen wird, und wenn

nun z. B. eine Compaßmessung irgend einem Zwecke nicht entspräche, so wird auch durch die Ausgleichungsrechnung wenig genützt sein, vielmehr wird man dann zu anderen genauer messenden Instrumenten greifen müssen. Ja die practischen Bedürfnisse würden nicht einmal den Zeitaufwand dulden, den eine Ausgleichungsrechnung verursacht.

Doch will ich damit nicht sagen, daß ein höher strebender Practiker das Studium der Ausgleichungsrechnung vernachlässigen solle, er wird vielmehr, wenn er in diese Theorie gründlich eingegangen, manches allgemeine Resultat für seine Praxis daraus ziehen können. Hierfür hätte ich nun freilich durch mein Lehrbuch die Gelegenheit bieten können, aber dabei mußte ich bedenken, daß durch eine weitere Verbreitung über alles Einzelne das Werk zu einem Umfange angewachsen sein würde, welche seiner allgemeineren Benutzung nur nachtheilig hätte sein können. Ich begnügte mich daher, die Methode der kleinsten Quadrate in ihren Hauptaufgaben, sowie auch ihre Abhängigkeit von den Grundlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung gründlich zu erläutern und ihre Anwendung an einigen einfachen Beispielen nachzuweisen, und ich hoffe, für diese Arbeit bei dem lesenden Publikum um so eher einige Anerkennung zu finden, als ähnliche Abhandlungen im gewöhnlichen Buchhandel meines Wissens noch gar nicht anzutreffen sind, und ich zugleich die Schwierigkeiten zu beseitigen gesucht habe, welche in dieser Theorie hin und wieder zur Sprache gebracht worden sind.

Weimar, im Februar 1847.

Der Verfasser.

Vorrede
zur dritten Auflage.

Die gegenwärtige dritte Auflage hat außer einer genauen Durchsicht auch hin und wieder einige Bereicherungen erfahren, und insbesondere ist das Capitel von der Berechnung der Flächen durch eine gründliche Beschreibung und Erklärung des neuen Planimeters von Hansen vermehrt worden. Es war diese Zugabe um so nöthiger, als Instrumente, durch welche Flächengehalte, ohne den Zeitverlust bei der gewöhnlichen mühsamen Berechnung, bloß mechanisch mit erforderlicher Schärfe sich finden lassen, schon längst unter die unbefriedigten Wünsche der Practiker gehörten, das Planimeter von Wetli aber, und noch mehr das von Hansen selbst die kühnsten Hoffnungen, die man sich vordem zu machen getraute, weit überbietet. Mit dieser werthvollen Zugabe hoffe ich, daß auch diese neue Auflage die gleiche Theilnahme finden werde, die den beiden vorigen zu Theil wurde.

Weimar, im Februar 1854.

Dr. Barfuß.

Inhalt.

Erstes Capitel.

Begriff und Arten der Vermessungen; leitende Grundsätze für dieselben.

Seite

Zweites Capitel.

Erläuterung einiger, für die practische Geometrie wichtiger Gegenstände.

Drittes Capitel.

Beschreibung der Meßkette, des Meßtisches, Winkelspiegels und sonstigen Zubehörs.

Viertes Capitel.

Die Operationen mit Stäben, Meßkette und Winkelspiegel.

Seite

Fünftes Capitel.

Von dem Gebrauche des Meßtisches.

Seite

Sechstes Capitel.

Von der Aufnahme einer Flurmark mittels des Meßtisches.

Siebentes Capitel.

Von einigen anderen geodätischen Instrumenten und deren Gebrauch.

Achtes Capitel.

Von der Zeichnung der Charten und namentlich der Situationspläne.

Neuntes Capitel.

Von der Berechnung der Flächen.

Zehntes Capitel.

Von der Theilung der Grundstücke.

Eilftes Capitel.

Vom Nivelliren oder Wasserwägen.

Zwölftes Capitel.

Vom Messen der Höhen mittels des Barometers.

Dreizehntes Capitel.

Von der Ausgleichung der Fehler nach den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, oder die Methode der kleinsten Quadratsummen.

Erstes Capitel.

Begriff und Arten der Vermessungen. Leitende Grundsätze für dieselben.

§. 1.

Unter practischer Geometrie (Geodäsie) kann man im Allgemeinen diejenige Wissenschaft verstehen, welche von den Lehren der reinen Mathematik eine geschickte Anwendung auf die Ausmessung der Erdoberfläche, oder von Theilen derselben macht. Die Resultate der Messung werden auf dem Papiere zu einem Bilde vereinigt, welches dem gemessenen Erdtheile ähnlich ist, und welches man eine Charte nennt.

§. 2.

Denkt man sich eine Ellipse, deren kleine Axe SN (Taf. I. Fig. 1) zur großen AQ sich wie 288 zu 289 verhält, und dreht man dieselbe um die kleine Axe herum, so wird ein Körper beschrieben, welcher der wahren Gestalt der Erde gleichkommt. Man nennt bekanntlich einen solchen Körper ein Ellipsoid, elliptisches Sphäroid. Die kleine Axe SN ist diejenige Linie, um welche die Erde ihre tägliche Umdrehung binnen 24 Stunden vollendet; ihr einer, nach Norden gelegener Endpunct heißt Nordpol, der andere entgegengesetzte, Südpol. Der Kreis, welchen die große Axe bei der Umdrehung der Ellipse beschreibt, heißt der Aequator. Der Unterschied zwischen der großen und kleinen Axe heißt die Abplat-

tung; gemeiniglich versteht man darunter den Bruch, den man erhält, wenn man den Unterschied beider Axen durch die große Axe dividirt, so daß also die Abplattung der Erde $= \frac{1}{289}$ ist.

Demnach ist die Erde keine vollkommene Kugel, sondern an den Polen etwas eingedrückt; da aber ihre Abplattung sehr gering ist, so nimmt man sie bei solchen Untersuchungen, wobei es nicht auf die äußerste Schärfe ankommt, als eine vollkommene Kugel an. Denkt man sich, diese Kugel habe mit der wirklichen Figur der Erde gleichen Rauminhalt, so beträgt ihr Halbmesser 3268175 Toisen alten französischen Maaßes.

§. 3.

Die Erde besitzt die Kraft, alle zu ihr gehörigen Körper festzuhalten und dieselben, wenn sie auf irgend eine Weise von der Oberfläche entfernt worden sind, wieder zu sich heranzuziehen. Diese Kraft nennt man die Schwerkraft. Ihr zu Folge sind alle Körper schwer, d. h., sie äußern ein Bestreben, sich nach dem Mittelpuncte der Erde zu bewegen, oder zu fallen, und üben einen Druck aus, wenn ein Hinderniß dieser Bewegung sich widersetzt.

Die Richtung des Falles der Körper ist immer gegen die Erdoberfläche senkrecht, vorausgesetzt, daß man sich diese vollkommen glatt, wie die Oberfläche eines ruhigen Wassers, denkt. Ein Körper, der an einem biegsamen Faden hängt, spannt den Faden in der Richtung der Schwere. Man nennt diese Vorrichtung ein Loth, und es giebt dieselbe das einfachste Mittel ab, die Richtung der Schwere an jedem Orte der Erde zu bestimmen. Eine Linie, die nach der Richtung der Schwere gezogen ist, heißt eine Verticallinie, und jede durch sie gelegte Ebene eine Verticalebene.

Eine Ebene, auf welcher die Verticallinie senkrecht steht, heißt Horizontalebene, und jede in ihr gezogene Linie eine Horizontallinie. Die Horizontalebene muß, wenn sie durch den Punct gelegt wird, wo die Verticallinie die Erdoberfläche trifft, an dieser, im geometrischen Sinne des Wortes, eine Berührungsebene sein.

Die Oberfläche eines stillstehenden Wassers hat genau die Gestalt der Erdoberfläche und giebt daher, wenn sie

so klein ist, daß man sie als eben betrachten kann, die Horizontalebene an. Hierin hat man also ein Mittel, für jeden Ort der Erde nicht nur die Horizontalebene, sondern auch die Verticallinie zu bestimmen.

Sofern man die Erde als eine Kugel betrachten darf, geht die Richtung der Schwere durch ihren Mittelpunct. Weil aber die Gestalt der Erde von der einer Kugel abweicht, so geht auch nicht allenthalben die Verticallinie durch den Mittelpunct, d. h., durch den Durchschnittspunct K beider Axen, (Taf. I. Fig. 1), sondern dieses findet nur unter dem Aequator uud an den Polen statt. Jedenfalls steht aber die Richtung der Schwere auf der Erdoberfläche senkrecht und fällt also mit dem Krümmungshalbmesser zusammen, welcher der Erdoberfläche an einem bestimmten Puncte zukommt.

§. 4.

Es kann also ein Bild, welches der Erdoberfläche, oder einem Theile derselben ähnlich sein soll, eigentlich nur auf einer Kugeloberfläche entworfen werden. Hierbei wird auf folgende Weise verfahren. Nachdem man auf der Kugel die beiden Pole S und N bestimmt hat, zieht man mitten zwischen ihnen einen größten Kreis A Q (Taf. I. Fig. 2), welcher den Aequator vorstellt. Im Aequator denke man sich einen beliebigen Punct A als den ersten. Um nun die Lage eines zweiten Punctes P zu bestimmen, zieht man durch denselben und die beiden Pole einen (größten) Kreis N M S, welchen man den Meridian des Ortes P nennt. Kennt man hier die Entfernung des Punctes M, wo der Meridian den Aequator schneidet, vom Anfangspuncte A, d. h., die geographische Länge AM, und kennt man zugleich auch den Abstand PM des Ortes P vom Aequator, d. h., die geographische Breite, so kann man offenbar den Ort P in seiner richtigen Lage gegen A auf die Kugel auftragen. Auf gleiche Weise wird auch jeder andere Ort P′ durch seine Länge AM′ und seine Breite M′P′ bestimmt.

Die Längen werden auf dem Aequator und die Breiten auf dem Meridian nach Graden gezählt, deren 360 auf den ganzen Kreis gehen. Liegt ein Ort auf der nördlichen Halbkugel der Erde, so heißt seine Breite nördlich, liegt er auf der südlichen, südlich. (Der Aequator theilt nämlich die Erde in zwei Halbkugeln, welche die

nördliche und südliche heißen, weil in der einen der Nordpol, in der andern der Südpol gelegen ist.) Wird eine Länge vom Anfangspunct A aus nach Osten gerechnet, so heißt sie östlich, wird sie aber nach Westen hin gezählt, westlich.

Da der Anfangspunct der Längen beliebig ist, so sind alle Völker hierin ihrer Willführ gefolgt. Die Engländer zählen die Längen von dem Puncte an, wo der durch ihre Sternwarte zu Greenwich gezogene Meridian in den Aequator einschneidet; die Deutschen und Franzosen rechnen dagegen von der Insel Ferro aus, nicht eigentlich von der wahren, sondern von einem Puncte, der 20 Grad westlich von Paris liegt Dieser erste Meridian ist also eigentlich kein anderer, als der von Paris.

Denkt man sich durch den Ort P einen Kreis UV mit dem Aequator parallel gezogen, so hat man den Parallelkreis (Breitenkreis) des Ortes P. Alle Oerter, die unter demselben Parallelkreise liegen, haben gleiche Breite. Die beiden Parallelkreise, welche zu beiden Seiten des Aequators in $23\frac{1}{2}$ Grad Abstand von demselben gezogen werden, heißen Wendekreise; Polarkreise nennt man die beiden Parallelkreise, welche $23\frac{1}{2}$ Grad von den beiden Polen abstehen. Der Grund dieser Benennungen wird später einleuchten.

Offenbar kann man die Länge auch auf dem durch den Ort P gezogenen Parallelkreise zählen, nur muß man nach Graden dieses Kreises rechnen. Zu dem Behufe muß man den Punct U kennen, wo der durch den ersten Punct A des Aequators gezogene Meridian NAS den Parallelkreis des Ortes P schneidet. Es ist dann UP ein ebensovielster Theil vom Umfange des Parallels UV, als AM vom Aequator, und beide Bögen haben daher gleichviel Grade *).

---

*) Denn da die Erdaxe SN (Taf. I. Fig. 3) auf der Ebene des Aequators AQ senkrecht steht, so stehen auch die Ebenen der Meridiankreise NAS und NMS darauf senkrecht, weil sie in der Erdaxe sich durchschneiden. Auch die Ebene des Parallelkreises UV steht auf der Erdaxe, die durch dessen Mittelpunct K' geht, senkrecht, und folglich auch auf den Ebenen der Meridiankreise. Zieht man also die Erdhalbmesser AK und MK, desgleichen die Halbmesser UK' und PK' des Paralleles UV, so sind die Winkel AKM und UK'P Neigungswinkel der Ebenen der Meridiankreise NAS und NMS und folglich gleich; die Bögen UP und AM haben daher gleichviel Grade.

§. 5.

Ob nun gleich ein getreues Bild der Erdoberfläche, oder eines Theiles derselben, eigentlich nur auf einer Kugeloberfläche entworfen werden kann, so ist man doch, aus Rücksicht auf Bequemlichkeit des Gebrauchs, genöthigt, die Zeichnung auf der Ebene eines Papiers zu machen, zumal da speciellere Abbildungen der Erdoberfläche ungeheuer große Kugeln erfordern und deshalb unausführbar werden würden.

Die Methoden, ein Bild der krummen Erdoberfläche auf einem Papiere zu entwerfen, sind eben so verschieden, als die Absichten, die man durch die Abbildung erreichen will. Bei der Darstellung einer Halbkugeloberfläche wendet man die sogenannte Projectionsmethode an, bei welcher man nämlich die Zeichnung in der Weise entwirft, daß sie den Gegenstand so darstellt, wie er von einem gewissen Puncte aus gesehen wird. Man denkt sich durch den Punct, wohin das Auge gesetzt wird, und durch den Erdmittelpunct eine gerade Linie gezogen und legt gegen dieselbe eine senkrechte Ebene, welche die Projectionsebene ist, auf welcher nämlich das Bild entworfen wird. Zieht man nun vom Auge aus nach allen Puncten der abzubildenden Halbkugeloberfläche gerade Linien, so sind die Durchschnittspuncte dieser Linien mit der Projectionsebene die Bilder der Puncte, nach welchen sie gezogen sind.

Setzt man das Auge in unendliche Entfernung von der abzubildenden Erdhälfte, so werden alle von hier aus nach den zu projicirenden Puncten gezogene Linien unter sich parallel und stehen auf der Projectionsebene senkrecht. Dieses ist die sehr gebräuchliche orthographische Projection. Außerdem setzt man noch das Auge in einen Punct der Erdoberfläche selbst, und zwar in denjenigen, welcher der abzubildenden Halbkugel gegenüber liegt; wodurch man die stereographische Projection erhält. Diese erhält die einfachste Gestalt, wenn man das Auge sich in dem einen Pole denkt, wodurch der Aequator als ein Kreis erscheint dessen Mittelpunct den entgegengesetzten Pol vorstellt; die Meridiane erscheinen als Halbmesser des Aequators, und die Breitenkreise als dem Aequator concentrische Kreise. Dasselbe findet auch bei der orthographischen Projection statt, wenn das Auge in die verlängerte Erdaxe gestellt wird. — Wird das Auge in einen

andern Punct der Erdoberfläche gesetzt, so setzt man es in der Regel in den Aequator so, daß sein Abstand vom Anfangspuncte der geographischen Längen 90° beträgt. Hierdurch erscheint der erste Meridian als ein Kreis, der die abzubildende Halbkugel einschließt; die übrigen Meridiane werden Ellipsen, und die Parallelkreise erhalten ebenfalls eine elliptische Krümmung, wie ungefähr aus Fig. 2 Taf. I. abgenommen werden kann.

Die Projectionsebene legt man entweder durch den Mittelpunct der Erde, oder so, daß sie die abzubildende Halbkugel berührt. — Nachdem man eine hinreichende Anzahl Meridiane und Parallelkreise verzeichnet hat, trägt man die einzelnen Oerter auf, wie sie durch Länge und Breite bestimmt sind, wobei das Augenmaaß nur wenig Nachhülfe nöthig hat.

Man begreift, daß hierbei diejenigen Theile der Halbkugel, welche in die Mitte der Projection fallen, nahe im richtigen Verhältnisse abgebildet werden, daß aber die Zeichnung vom Urbilde desto mehr abweicht, je näher dieses am Rande der Halbkugel liegt. — Man hat aber auch noch andere Arten, eine Halbkugel zu verzeichnen, welche nicht auf eine eigentliche Ansicht oder Projection gegründet sind, sondern bei welchen man andere Zwecke zu erreichen sucht, z. B., daß die Flächentheile des Bildes den entsprechenden Theilen der Halbkugel proportional sein sollen.

Die Zeichnung gewisser Theile der Erdoberfläche, welche so ausgedehnt sind, daß die Krümmung der Erde in Betracht gezogen werden muß, wo namentlich die ungleichen Abstände der Meridiane in verschiedenen Breitengraden merklich hervortreten, gründet man überall nicht auf eine von einem bestimmten Punct aus genommene Ansicht, sondern man ist vielmehr bemüht, die Zeichnung dem Urbilde möglichst ähnlich zu machen. Man erreicht diesen Zweck schon nahe dadurch, daß man eine zwischen zwei Parallelkreisen enthaltene Erdzone als eine Kegelzone ansieht, wobei dann die Meridiane als gerade, in der Spitze des Kegels zusammenlaufende Linien, die Parallelkreise aber als concentrische Kreise aufgetragen werden, die in der Spitze des Kegels ihren Mittelpunct haben. Die meisten Verzeichnungsmethoden sind nur theilweise Abänderungen der auf diesen Gedanken gegründeten. — Neuerdings ist von Gauß ganz allgemein die Aufgabe gelöſ't worden: Die Theile einer gegebenen Fläche auf einer

anderen gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird.

§. 6.

Um von dem Verfahren, welches man zur Bestimmung der Länge und Breite eines Orts anwendet, einen Begriff zu geben, müssen wir zuerst die wichtigsten Constructionen der sphärischen Astronomie erklären.

1) Der Himmel gleicht mit seinen Gestirnen einer hohlen Kugel, welche die Erde concentrisch umgiebt, von welcher wir aber immer nur die Hälfte sehen, weil die undurchsichtige Erde nicht die Aussicht nach der entgegengesetzten Hälfte gestattet. Um zu finden, wieviel vom Himmel an einem Orte B (Taf. I. Fig. 4) der Erde gesehen werden kann, denke man sich durch denselben eine horizontale Ebene gelegt; diese wird die Himmelskugel in dem Kreise HR schneiden, welcher den sichtbaren Theil des Himmels begrenzt, und den man deßhalb Horizont nennt. Auf ihm scheint der Himmel wie ein halbkugelförmiges Gewölbe zu ruhen. Den so bestimmten Horizont nennen die Astronomen den scheinbaren, zum Unterschiede von dem wahren H′R′, welchen man erhält, wenn man durch den Erdmittelpunct eine zum scheinbaren Horizonte parallele Ebene legt. Der wahre Horizont theilt also die Himmelskugel in zwei gleiche Hälften. Aber in Bezug auf die, durch unermeßliche Räume von der Erde getrennten Fixsterne, ist es ganz gleichgültig, ob man den wahren Horizont für den scheinbaren setzt, und umgekehrt, denn gegen diese Räume verschwindet die Erde zu einem unmeßbaren Puncte.

2) Da die Richtung der Schwere durch den Mittelpunct der Erde geht, sofern man diese als eine Kugel betrachten darf, so steht der durch den Beobachtungsort B gezogene Erdhalbmesser BK sowohl auf der wahren Horizontalebene H′R′, als auf der scheinbaren HR senkrecht. Verlängert man diesen Halbmesser zu beiden Seiten bis an die Himmelskugel, so erhält man die Puncte Z und M, von denen Z Zenith oder Scheitelpunct, M Nadir oder Fußpunct genannt wird. Das Zenith ist also der höchste Punct am sichtbaren Himmel und steht nach allen Seiten hin vom Horizonte um einen Viertelkreis ab.

3) Man denke sich durch den Beobachtungsort B, durch den Erdmittelpunct K und durch den einen Pol N eine Ebene gelegt, so geht diese auch durch den andern Pol S und schneidet die Erdkugel in einem Kreise NBAS, welcher den Meridian des Ortes B vorstellt. Erweitert man die Ebene dieses Kreises bis an die Himmelskugel, so erhält man einen zweiten, jenem ersten concentrischen Kreis ZA'S'Q'N', welcher ebenfalls Meridian des Ortes B genannt wird, und welcher durch das Zenith und Nadir geht. Die Ebene des Meridians steht folglich senkrecht auf der des Horizontes und theilt die sichtbare Hälfte des Himmels in zwei gleiche Theile.

Eine gerade Linie BH, in der Ebene des Meridians horizontal durch den Beobachtungsort B gezogen, heißt Mittagslinie des Ortes B.

4) Die Erdaxe liegt also in der Ebene des Meridians. Sie trifft verlängert die Himmelskugel in den Puncten N' und S', von denen der erste ebenfalls Nordpol, der andere Südpol heißt; auch nennt man die Linie N'S' die Weltaxe. Um diese Weltaxe scheint sich der Himmel binnen 24 Stunden von Osten nach Westen zu drehen, d. h., von der Linken zur Rechten, wenn man das Gesicht nach Süden kehrt. Man weiß aber, daß diese Drehung nur scheinbar ist und durch eine wirkliche Drehung der Erde um ihre Axe (Rotation) nach der entgegengesetzten Seite hervorgebracht wird.

5) Der Winkel N'KR', um welchen die Weltaxe gegen den Horizont des Ortes B geneigt ist, oder auch der Bogen N'R' des Meridians zwischen dem Pole und dem wahren Horizonte heißt die Polhöhe des Ortes B.

6) Von den beiden Polen N' und S' des Himmels liegt, wenn man nicht gerade auf dem Erdäquator steht, der eine (N') immer über, der andere (S') immer unter dem Horizonte. In der nördlichen Halbkugel der Erde ist also immer nur der Nordpol, in der südlichen nur der Südpol sichtbar.

7) Man erweitere die Ebene des Erdäquators AQ bis an die Himmelskugel, so erhält man hier einen neuen Kreis A'Q', welcher ebenfalls Aequator genannt wird. Er theilt den Himmel in zwei Halbkugeln, die nördliche und südliche, und steht von jedem Pole allenthalben gleichweit ab, nämlich um den Bogen A'N' = 90°. Sein Neigungswinkel A'KH' gegen den Horizont heißt die

Aequatorhöhe, wofür man begreiflich auch den Bogen H'A' des Meridians setzen kann.

Polhöhe und Aequatorhöhe betragen zusammen immer 90°; man hat nämlich Q'R' + R'N' = 90°, und es ist R'N' die Polhöhe, Q'R' = H'A' die Aequatorhöhe.

8) Der Aequator schneidet den Horizont in zwei (hier nicht sichtbaren) Puncten, welche Ost- und Westpunct heißen. Nimmt man hierzu noch die zwei Puncte H' und R', wo der Meridian in den Horizont einschneidet, so hat man die vier Hauptpuncte der scheinbaren Weltkugel, nämlich den Ost-, den Süd-, den West- und den Nordpunct. Sie stehen begreiflich gegenseitig um einen Viertelkreis voneinander ab und theilen daher den Horizont, in dessen Mitte der Beobachtungsort B sich befindet, in seine vier Quadranten.

§. 7.

1) Die Himmelskugel scheint sich, wie schon bemerkt worden, binnen 24 Stunden um die Weltaxe S'N' (Taf. I. Fig. 4) von Morgen nach Abend zu drehen, und obgleich diese Bewegung nur scheinbar ist und eigentlich der Erde, nur im entgegengesetzten Sinne, zukommt, so nimmt man sie doch bei einer großen Anzahl astronomischer Betrachtungen als wahr an, weil die Resultate ganz gleich herauskommen würden, wenn man die Erde sich bewegen und den Himmel ruhen lassen wollte, die Vorstellung von einer ruhenden Erde aber und einem rotirenden Himmel die Untersuchungen sehr erleichtert. Diesen Theil der Sternkunde nennt man sphärische Astronomie, weil eben, bloß dem sinnlichen Scheine zu Folge, der Himmel für eine um die Weltaxe sich drehende Kugel genommen wird.

2) Bei dieser scheinbaren Umdrehung des Himmels kommen die Gestirne in Osten über den Horizont hervor und erheben sich immer höher und höher, bis sie im Meridiane ihre größte Höhe erreicht haben. Von da sinken sie nach dem westlichen Theile des Horizonts immer tiefer herab, bis sie endlich unter dem Horizonte wieder verschwinden. Hiermit sind denn die Ausdrücke in Verbindung zu bringen: ein Gestirn geht auf, erreicht seine größte Höhe oder culminirt, und geht unter.

3) Die tägliche Bewegung des Himmels, oder eigentlich der Erde ist ganz gleichförmig und unveränderlich; man hat seit den ältesten Tagen bis auf die neueste Zeit

herab in der Dauer dieser Bewegung auch nicht den geringsten Unterschied verspürt. Jeder Stern, der seinen Ort am Himmel nicht verändert (Fixstern), kommt immer nach Verlauf derselben Zeit in den Meridian.

4) Aber in der Zeit, wie lange ein Gestirn über dem Horizonte sichtbar ist, findet nach Verschiedenheit seiner Stellung ein großer Unterschied statt. Jedes Gestirn T, T', T'' beschreibt nämlich bei seiner täglichen Umdrehung um die Weltaxe einen mit dem Aequator parallelen Kreis TT, T'T', T''T'', den man seinen Tagekreis nennt, und von diesem liegt nicht immer ein ebenso großer Theil über, als unter dem Horizonte. Ein Stern T, dessen Abstand N'T vom sichtbaren Pole geringer ist, als die Polhöhe N'R' des Beobachtungsortes B, geht nie unter und wird zweimal im Meridian, in der obern und untern Culmination, gesehen. Ist der Abstand eines Sternes T' vom Pole der Polhöhe gleich, so berührt er bei seiner untern Culmination den Horizont. Ein Stern T'', der weiter nach dem Aequator hin steht, tritt wirklich unter den Horizont; aber immer fällt noch der größere Theil seines Tagekreises in die sichtbare Hälfte des Himmels und ist folglich länger sichtbar, als unsichtbar. Steht ein Gestirn gerade im Aequator, so verweilt es ebenso lange über, als unter dem Horizonte, weil der Aequator vom Horizonte gerade halbirt wird; wir haben daher gleichlange Tage und Nächte, wenn, wie es im Frühlinge und Herbste der Fall ist, die Sonne im Aequator steht. In der entgegengesetzten Halbkugel (der südlichen) bleiben die Sterne den größten Theil unter dem Horizonte und gehen endlich, wie T''', für uns gar nicht mehr auf.

5) Steht ein Beobachter in einem Puncte des Erdäquators, so hat er den Aequator des Himmels im Zenith und die Pole liegen in seinem Horizonte. Die Tagekreise aller Gestirne stehen senkrecht auf dem Horizonte und werden von ihm genau halbirt, daher jedes ebenso lange über als unter dem Horizonte ist. Diese Stellung heißt die gerade Sphäre (sphaera recta). — Steht ein Beobachter im Erdpole N, so hat er den Pol des Himmels N' im Zenith und der Aequator fällt mit seinem Horizonte zusammen; die Tagekreise aller Gestirne laufen mit dem Horizonte parallel, und es geht daher die eine Hälfte des Himmels nie unter, die andere dagegen nie auf. Diese Stellung heißt die parallele Sphäre (sphaera parallela).

Jede andere Stellung heißt schiefe Sphäre (sphaera obliqua).

§. 8.

1) In Taf. I. Fig. 5 wiederholen wir die Construction der Kreise an der Himmelskugel noch einmal. ASQN ist der Meridian, N der Nordpol, S der Südpol; ferner S'ON'W der Horizont, A♈Q♎ der Aequator und folglich O der Ost-, W der Westpunct, S'N' die Mittagslinie. Der gemeinschaftliche Mittelpunct aller dieser Kreise ist der Erdmittelpunct K.

2) Unter den zahllosen Sternen des Himmels nehmen die meisten immer dieselbe Stelle ein, gleichsam als ob sie an der hohlen Himmelskugel befestigt wären, daher man sie Fixsterne nennt. Andere wenige dagegen haben außer der täglichen Bewegung um die Weltaxe noch eine andere, vermöge welcher sie innerhalb einer gewissen Zeit ihre Stellung unter den Fixsternen fortwährend ändern und erst nach Verlauf dieser Zeit an dem Orte des Himmels wieder gesehen werden, wo man sie im Anfange beobachtete. Diese Sterne, deren Bewegung auf die Sonne, als Mittelpunct, sich bezieht, heißen bekanntlich Planeten. Auf gleiche Weise verändert auch der Mond seine Stellung so, daß er im Verlaufe eines Monats ($27\frac{3}{10}$ Tage) wieder an demselben Orte des Himmels erscheint; doch ist der Mittelpunct seiner Bewegung die Erde. Die näheren Erörterungen über alle diese Bewegungen können hier natürlich nicht gegeben werden.

3) Nur von der Bewegung der Sonne wollen wir etwas umständlicher reden. Auch sie hat außer der täglichen Bewegung um die Weltaxe noch ihre eigene, vermöge welcher sie nach Verlauf eines Jahres wieder an denselben Ort des Himmels zurückkommt, an welchem sie vorher stand. Sie rückt mit jedem Tage ungefähr 1 Grad nach Morgen vor und scheint auf diese Weise am Himmel einen größten Kreis M♈L♎ zu durchlaufen, dessen Ebene gegen die Ebene des Aequators ungefähr um $23\frac{1}{2}$ Grad (genauer 23° 27') geneigt ist. Diese Sonnenbahn heißt Ekliptik und ihr Neigungswinkel gegen den Aequator die Schiefe der Ekliptik. Sie durchschneidet den Aequator in zwei um 180° voneinander entfernten Puncten ♈ und ♎, von denen der erste Frühlingspunct, Punct der Frühlingsnachtgleiche, der andere Herbst-

punct oder Punct der Herbstnachtgleiche genannt wird, weil im ersten die Sonne im Frühlinge am 21. März, im andern zur Herbstzeit am 21. September sich befindet, an welchen beiden Tagen Tag und Nacht gleich sind.

4) Wenn die Sonne in den Frühlingspunct, der auch Nullpunct des Widders genannt wird, getreten ist, so steigt sie immer höher in die nördliche Halbkugel herauf und entfernt sich immer weiter vom Aequator, daher bei uns (in der nördlichen Erdhälfte) die Tage immer länger werden, weil ein immer größerer Theil des Tagekreises der Sonne über dem Horizonte liegt. Ist sie aber vom Frühlingspuncte aus 90° in ihrer Bahn fortgerückt, so hat sie den größten Abstand vom Aequator erreicht, welcher 23½ Grad beträgt, und nun hat die nördliche Halbkugel der Erde den längsten Tag und die kürzeste Nacht. Von da an wendet sich die Sonne wieder dem Aequator zu und die Tage (d. h., die Zeit der Sichtbarkeit der Sonne) nehmen wieder ab, bis sie in den Herbstpunct ♎ tritt, wo wieder Tag und Nacht gleich sind. Sie tritt nun in die südliche Halbkugel, in welcher sich alle Erscheinungen ebenso wiederholen, wie vorhin in der nördlichen. In der nördlichen Halbkugel sind jetzt die Nächte länger, als die Tage; in der südlichen findet das Umgekehrte statt. Hat die Sonne in der südlichen Halbkugel ihre größte Abweichung vom Aequator erreicht, so findet hier der längste Tag, in der nördlichen Erdhälfte dagegen die längste Nacht statt.

5) Die beiden Puncte, in welchen die Sonne am weitesten vom Aequator absteht, heißen Wendepuncte (Tropen). Zieht man durch die Wendepuncte zum Aequator parallele Kreise, so hat man die Wendekreise, von welcher der in der nördlichen Hemisphäre Wendekreis des Krebses, der in der südlichen, Wendekreis des Steinbocks heißt. Die beiden Wendekreise stehen also um 23½ Grad, d. h. um die Schiefe der Ekliptik, vom Aequator ab. Beschreibt man um beide Pole in einem Abstande von 23½ Grad von denselben, also in 66½ Grad Abstand vom Aequator, zwei zu diesem parallele Kreise, so hat man die Polarkreise.

6) Ob es uns gleich vorkommt, als wenn die Sonne in Zeit von einem Jahre um den ganzen Himmel sich bewege, so wissen wir doch, daß diese Bewegung nur

scheinbar ist. In der Wirklichkeit bewegt sich die Erde um die Sonne in einer von einem Kreise wenig abweichenden Ellipse, in deren einem Brennpuncte die Sonne sich befindet.

§. 9.

Die Wendekreise und die Polarkreise werden auch auf der Erdkugel in eben dem Abstande vom Aequator verzeichnet und sind hier eigentlich wesentlicher, als am Himmel. Die beiden Wendekreise begrenzen hier die s. g. heiße Zone, d. h., denjenigen Theil der Erde, in welchem jeder Ort die Sonne einmal im Jahre im Scheitelpuncte sieht. Die beiden zwischen den Wendekreisen und den Polarkreisen enthaltenen Erdtheile heißen die gemäßigten Zonen, und die beiden von den Polarkreisen umschlossenen Theile, in deren Mitte die Pole sich befinden, die kalten Zonen. In den kalten Zonen liegen diejenigen Oerter, welche die Sonne mehre Tage lang nicht aufgehen, dagegen aber auch wieder ebenso viele Tage hindurch nicht untergehen sehen. An den Polen würde man die Sonne ein halbes Jahr lang über dem Horizonte sehen; ebenso lange würde sie aber auch unter dem Horizonte verborgen bleiben. Dieses setzt voraus, daß die Sonne genau ein halbes Jahr in der nördlichen und ein halbes Jahr in der südlichen Halbkugel verweilt; doch ist ihr Aufenthalt in dieser acht Tage kürzer, als in jener.

§. 10.

1) Auf der Himmelskugel wird die Lage der Gestirne ebenso bestimmt, wie die Lage der Oerter auf der Erde. Denkt man sich durch einen Stern T (Taf. I. Fig. 5) und die beiden Pole einen größten Kreis NTS gezogen, so heißt der zwischen diesem Sterne und dem Aequator enthaltene Bogen BT seine Abweichung oder Declination. Der Abstand des Punctes B, wo der Abweichungskreis den Aequator durchschneidet, vom Frühlingspunct ♈ nach Graden des Aequators gezählt, heißt des Sternes T gerade Aufsteigung oder Rectascension Man begreift, daß durch gerade Aufsteigung und Abweichung die Lage eines Gestirnes vollkommen bestimmt ist. Die Abweichungen sind theils südlich, theils nördlich; die geraden Aufsteigungen werden vom Frühlingspuncte an ostwärts bis 360° gezählt.

2) Bekanntlich hat jeder größte Kreis auf der Kugel seine zwei Pole, die allenthalben um einen Viertelkreis von ihm abstehen. So sind Nord- und Südpol die Pole des Aequators, Zenith und Nadir die Pole des Horizontes, Ost- und Westpunct die Pole des Meridians, und so hat auch die Ekliptik ihre beiden Pole, von denen der in der nördlichen Halbkugel gelegene E sein mag. Legt man durch den Nordpol und den nördlichen Pol der Ekliptik E einen größten Kreis, so ist der zwischen beiden Polen gelegene Bogen NE der Schiefe der Ekliptik gleich.

3) Legt man durch den Pol der Ekliptik und einen Stern T einen größten Kreis, so heißt der zwischen der Ekliptik und diesem Sterne enthaltene Bogen TG seine Breite, hingegen der Bogen γG der Ekliptik zwischen dem Frühlingspuncte und dem Breitenkreise die Länge des Sternes T. Auch die Längen werden vom Frühlingspuncte an ostwärts gezählt. Durch Länge und Breite ist nun ein Gestirn ebenso bestimmt, wie durch Rectascension und Declination.

§. 11.

1) Auf der Erde sind Länge und Breite eines Ortes unveränderlich, weil die Umdrehungsaxe der Erde immer dieselbe Linie ist, und daher auch der Aequator immer durch dieselben Orte der Erde geht. Aber obschon die Erdaxe ihre Lage innerhalb der Erde nicht ändert, so ändert sie doch ihre Lage im Raume, und ihre Verlängerung trifft daher den Himmel immer in anderen Puncten, d. h., die Pole des Himmels verändern ihre Lage unter den Fixsternen fortwährend. Trotz dieser Aenderung bleibt jedoch die Polhöhe eines Ortes immer dieselbe, denn ändert sich die Lage der Weltaxe um den Winkel N'KN'' (Taf. I. Fig. 4), so ändert sich der Horizont um einen ebenso großen Winkel R'KR'', und die jetzige Polhöhe N''KR'' ist der vorigen N'KR' genau gleich.

Weil also die Weltpole ihre Lage fortwährend ändern, so geht auch der Aequator immer durch andere Puncte des Himmels, und daher ist die Declination der Gestirne, auch wenn sie sonst am Himmel feststehen, veränderlich.

2) Die Ekliptik ist ein solcher Kreis am Himmel, der seine Lage nicht ändert, wenigstens erst nach Jahrhunderten kaum merklich, und folglich nehmen auch die Pole der Ekliptik immer dieselben Stellen des Himmels

ein. Hieraus folgt aber auch, daß die Breite der Sterne nahe dieselbe bleibt.

Nach den Beobachtungen ändern die Weltpole ihre Lage unter den Gestirnen so, daß sie um die Pole der Ekliptik einen Kreis zu beschreiben scheinen, den sie erst binnen 25900 Jahren durchlaufen. In Wahrheit ist es hier die Erdaxe, welche diese Bewegung hervorbringt, indem sie um den Erdmittelpunct sich so bewegt, daß sie immer auf der Oberfläche eines (doppelten) Kegels bleibt, dessen Winkel an der Spitze (am Erdmittelpuncte) der doppelten Schiefe der Ekliptik gleich ist, also 47° beträgt.

Da also der Pol der Ekliptik E vom Weltpole N (Taf. I. Fig. 5) immer einerlei Entfernung behält, so folgt auch, daß die Neigung des Aequators gegen die Ekliptik immer dieselbe bleibt. Nur die Durchschnittspuncte beider Kreise ♈ und ♎, oder die Durchschnittslinie ihrer Ebenen, werden durch die Bewegung des Weltpols beständig fortgerückt, und zwar in der Richtung von Morgen nach Abend. Da nun die Längen der Sterne ostwärts gezählt werden und der Frühlingspunct westwärts geht, so werden alle Längen mit dem Fortgange immer größer, und ihre Zunahme beträgt jährlich etwa 50 Secunden. Hieraus folgt zugleich, daß auch die Rectascensionen immer größer werden. Man nennt diese Erscheinung das Rückwärtsgehen der Aequinoctialpuncte, oder das Vorwärtsgehen (Präcession) der Fixsterne.

Außer der Präcession sind die Fixsterne noch zwei anderen Ortsveränderungen, der Aberration und Nutation, unterworfen, die beide nur klein sind und periodisch wiederkehren, erstere nach einem, letztere nach 18 Jahren. Es liegt jedoch nicht in unserer Absicht, hievon Rechenschaft zu geben.

3) Die Ekliptik wird vom Frühlingspuncte an ostwärts in 12 gleiche Theile, Zeichen oder Bilder eingetheilt, von denen also jedes einen Bogen von 30° umfaßt. Sie sind: Widder ♈, Stier ♉, Zwillinge ♊, Krebs ♋, Löwe ♌, Jungfrau ♍, Waage ♎, Scorpion ♏, Schütze ♐, Steinbock ♑, Wassermann ♒, Fische ♓. Diese Zeichen, welche nichts Anderes sind, als eine mathematische Eintheilung der Ekliptik, darf man jedoch nicht mit den wirklichen Sternbildern, die den sogenannten Thierkreis bilden, verwechseln.

§. 12.

Man sieht aus dem bisher Vorgetragenen, daß es in der Astronomie hauptsächlich auf die Bestimmung von Winkeln ankommt; aber außerdem hat der Astronom noch ein zweites wichtiges Element seinen Messungen zu unterwerfen, und dieses ist die Zeit.

1) Wir haben schon erwähnt, daß die Dauer der Axendrehung der Erde oder des Himmels von einem Male zum andern immer gleich groß sei. Diese Dauer ist offenbar einerlei mit der Zwischenzeit von einer Culmination eines am Himmel feststehenden Sternes bis zur nächstfolgenden und wird daher ein Sterntag genannt. Man ist gewohnt, den Sterntag von dem Augenblicke an zu beginnen, wo der Frühlingspunct in den Meridian tritt, und es dauert derselbe bis zur nächsten Culmination dieses Punctes. — Den Sterntag theilt man in 24 Stunden, die Stunde in 60 Minuten und die Minute in 60 Secunden. Man hat daher Raumminuten und Raumsecunden von Zeitminuten und Zeitsecunden zu unterscheiden. Da nun während 24 Stunden die sämmtlichen 360° des Aequators durch den Meridian gehen, so kommen 15° auf 1 Stunde, 15 Raumminuten auf 1 Zeitminute und 15 Raumsecunden auf 1 Zeitsecunde.

Es sei **O Z W N** (Taf. I. Fig. 8) der Aequator, **Z** sein Durchschnittspunct mit dem Meridiane und **Z ♈** der Bogen, um welchen seit seiner Culmination der Frühlingspunct vom Meridiane westwärts fortgerückt ist. Verwandelt man die Grade, Minuten und Secunden dieses Bogens nach den ebengenannten Verhältnissen in Stunden, Minuten und Secunden, so hat man die s. g. Sternzeit, welche ebenso gleichmäßig fortschreitet, als die tägliche Rotation der Erde.

Das Maaß der Sternzeit ist also immer der seit der Culmination des Frühlinspunctes durch den Meridian gegangene Bogen des Aequators, nur wird bei solchen Zeitangaben der Aequator anders eingetheilt, als bei der Angabe von Bögen oder Winkeln.

2) Weil das menschliche Leben so bestimmt nach dem täglichen Erscheinen und Wiederverschwinden der Sonne geordnet ist, so ist dieser Himmelskörper für uns auch der natürliche Regulator der Zeit. Der Augenblick, wo die Sonne in den Meridian tritt und also ihren höchsten

Stand erreicht hat, heißt der **wahre Mittag**, und die Zwischenzeit von einer Culmination bis zur andern, der **wahre Sonnentag**. **Wahre Zeit** ist der Bogen ZS (Taf. I. Fig. 8) des Aequators, um welchen der Mittelpunct der Sonne S nach ihrem Durchgange durch den Meridian von diesem westwärts absteht, wenn man diesen Bogen in Zeittheile verwandelt und dabei immer 15^{o} auf 1 Stunde rechnet.

Die wahren Sonnentage sind aber nicht alle gleich lang, und wenn man einen jeden in 24 Stunden theilen wollte, so würden zu verschiedenen Jahreszeiten die Stunden ungleich ausfallen. Die Sonne rückt nämlich mit jedem Tage ungefähr 1^{o} in ihrer Bahn ostwärts; befand sie sich heute zu einer bestimmten Zeit in H (Taf. I. Fig. 5), so wird sie morgen zu derselben Zeit in H′, übermorgen in H″ stehen u. s. w. Legt man durch den Pol N und durch H, H′, H″ die Abweichungskreise NB, NI, NI′, so hat man bei B, I, I′ die Puncte des Aequators, welche heute, morgen, übermorgen mit der Sonne zugleich culminiren, und man sieht daher, daß die Sonne morgen soviel später culminirt, als heute, als der Bogen BI in Zeit beträgt. Wären die täglichen Fortrückungen der Sonne, BI, II′, bezüglich des Aequators einander gleich, so würden dennoch alle Sonnentage gleich lang, nur länger als ein Sterntag sein; allein die Sonne bewegt sich nicht im Aequator, sondern in der Ekliptik, und wenn sie auch hier täglich um gleiche Bögen HH′, H′H″ fortrückte, so würden die zugehörigen Fortrückungen im Aequator, BI, II′, doch ungleich sein. Aber die Sonne rückt auch nicht alle Tage gleichweit in der Ekliptik fort, und dieses alles bewirkt eine Ungleichheit der wahren Sonnentage.

3) Um dieser Ungleichheit auszuweichen, denkt man sich eine zweite Sonne, die **mittlere**, welche nicht in der Ekliptik, sondern im Aequator täglich um einen gleich großen Bogen ostwärts rückt und übrigens, mit der wahren Sonne gleichzeitig vom Frühlingspuncte ausgehend, auch in einerlei Zeit mit derselben ihren Umlauf am Himmel vollendet. Der Augenblick, wo diese eingebildete Sonne in den Meridian tritt, heißt der **mittlere Mittag**, und die Dauer von einer Culmination derselben bis zur nächsten ein **mitlerer Sonnentag**. **Mittlere Zeit** ist dann der Bogen ZS (Taf. I. Fig. 8) des Aequators, um welchen die mittlere Sonne westwärts vom

Meridiane absteht, wenn man diesen Bogen in Stunden u. s. w. verwandelt.

Das bürgerliche oder tropische Sonnenjahr ist der Zeitraum zwischen zwei aufeinander folgenden Frühlingsnachtgleichen, und es beträgt dasselbe 325,242255 mittlere Sonnentage. In dieser Zeit ist also die Sonne scheinbar durch einen Bogen von 360° gegangen, und ihre tägliche Fortrückung beträgt daher am Himmel, im Mittel $\frac{360^\circ}{365,242255} = 0,9856472$ Grad $= 0^\circ 59' 8'',33$. Hiernach läßt sich das Verhältniß zwischen dem Sterntage und dem wahren Sonnentage leicht ermitteln. War nämlich heute der Frühlingspunct ♈ (Taf. I. Fig. 5) mit der mittleren Sonne zugleich im Meridiane Q, so wird jener, wenn diese morgen wieder culminirt, schon um den Bogen Q♈ westwärts gerückt sein, welcher Bogen $0^\circ 59' 8'',33$, oder in Zeit ausgedrückt $0^h 3' 56'',555$ ausmacht. Um soviel ist daher ein mittlerer Sonnentag größer, als ein Sterntag. Wenn man daher den Sterntag, oder die Zeit einer wahren Axenumdrehung der Erde in $24^h = 86400$ Secunden theilt, so gehen 86636,555 solche Secunden, oder $24^h 3' 56'',555$ auf einen mittleren Sonnentag; wird aber umgekehrt der mittlere Sonnentag in $24^h = 86400$ Secunden getheilt, so gehen (nach der Proportion $86636,55 : 86400 = 86400 : x$) 86164,09 solche Secunden, oder $23^h 56' 4'',09$ auf den Sterntag.

Geht also eine Uhr nach mittler Zeit und zeigte sie heute, als der Frühlingspunct culminirte, gerade 12^h, so wird sie morgen bei der Culmination des Frühlingspunctes $3' 55'',91$ weniger, nämlich nur $11^h 56' 4'',09$ zeigen, da der Sterntag um $3' 55'',91$ mittlere Zeit kürzer ist, als der mittlere Sonnentag. Uebermorgen wird bei der Culmination des Frühlingspunctes die Uhr wieder $3' 55'',91$ weniger, nämlich nur $11^h 52' 8'' 18$ zeigen u. s. w. Daher kommen auch alle Fixsterne mit jedem neuen Tage $3' 55'',91$ gegen mittlere Zeit früher in den Meridian, und aus diesem Grunde nennt man die Zeitgröße $3,55'',91$ die Voreilung (Acceleration) der Fixsterne.

Uebrigens bemerken wir noch, daß die Astronomen den Tag mit dem Mittage, d. h., mit der Culmination der wahren oder mittleren Sonne, beginnen, und die Stunden von 1 bis 24 fortzählen. Im bürgerlichen Leben dagegen beginnt der Tag mit der Mitternacht, d. h., mit

dem Eintritte der Sonne in den unteren Theil des Meridians.

4) Der Unterschied zwischen wahrer und mittlerer Zeit heißt die Zeitgleichung. Diese verschwindet viermal im Jahre, nämlich am 15. April, 16. Juni, 2. September und 25. December. Zweimal im Jahre wird sie am größten, ungefähr einer Viertelstunde gleich, nämlich am 11. Februar und am 4. November, und wenn an diesen beiden Tagen die wahre Sonne im Meridian steht, so soll eine nach mittlerer Zeit gehende Uhr am ersten Tage $0^h 14' 34''$ und am andern $11^h 43' 43''$ zeigen. — Da demnach der Unterschied zwischen wahrer und mittlerer Zeit nur gering ist, so ist die letztere sehr wohl geeignet, den bürgerlichen Geschäften, sofern diese an den Lauf der Sonne gebunden sind, als Ordnerin zu dienen.

5) Die Zeit wird durch Uhren gemessen, die entweder mittlere Zeit oder Sternzeit angeben. Diese Instrumente müssen jedoch, ihrer Wandelbarkeit halber, durch astronomische Beobachtungen öfters geprüft und berichtigt werden, was auf folgende Weise geschehen kann.

Denkt man sich durch ein Gestirn **H'** (Taf. I. Fig. 5) und durch das Zenith **Z** einen größten Kreis gelegt, so heißt der zwischen dem Gestirne und dem Horizonte enthaltene Bogen **H'D** die Höhe des Gestirns **H'**; hingegen ist der Bogen **S'D** des Horizontes, vom Südpuncte **S'** bis zum Höhenkreise **ZH'D** gerechnet, das Azimuth des Gestirnes **H'**. Man sieht leicht, daß ein Gestirn, welches unbeweglich am Himmel steht, zu gleichen Zeiten vor und nach seiner Culmination gleiche Höhe und gleiches Azimuth haben muß.

Man setze nun, man habe eine nach mittlerer Zeit gehende Uhr. Man bemerke die Zeit, welche sie angiebt, wenn die Sonne Vormittags eine gewisse Höhe erreicht; es sei, z. B., $8^h 30' 24''$. Nachmittags bemerke man dann die Zeit der Uhr, wenn die Sonne wieder dieselbe Höhe erreicht: es sei, z. B., $3^h 58' 42''$. Die Mitte zwischen beiden Zeiten ist die Uhrzeit im wahren Mittage, d. h., als die Sonne im Meridiane stand, zeigte die Uhr $0^h 14' 33''$ über 12^h. Hierbei ist jedoch noch eine Correction anzubringen, weil die Sonne während der Zwischenzeit beider Beobachtungen ihren Ort am Himmel ändert und daher zu gleichen Zeiten vor und nach der Culmination nicht gleiche Höhe hat. Da nun außerdem noch berechnet wer-

den kann, was eine nach mittlerer Zeit gehende Uhr im wahren Mittage zeigen muß, so ergiebt sich hieraus der Fehler der Uhr gegen mittlere Zeit, und durch wiederholte Beobachtungen kann man auch die tägliche Voreilung oder Verspätung ermitteln.

§. 13.

Nunmehr läßt sich von der Art und Weise, wie Länge und Breite eines Ortes durch astronomische Beobachtungen bestimmt werden können, wenigstens ein Begriff geben. Da auch die Bestimmung der Mittagslinie eines Ortes von Wichtigkeit ist, so machen wir mit derselben den Anfang.

Auf einer horizontalen Ebene errichte man einen senkrechten Stift CE (Taf. II. Fig. 1) und beschreibe um dessen Fußpunct C einen Kreis MFGN. An einem sonnenhellen Tage bemerke man Vor- und Nachmittags die Puncte F und G, wo das Ende des vom Stifte verursachten Schattens in die Peripherie des gedachten Kreises fällt. Da nun in diesen beiden Augenblicken der Schatten des Stiftes gleichlang ist, so hat auch die Sonne gleiche Höhe und gleiches Azimuth, und wenn man daher den Bogen FG in H halbirt und CH zieht, so ist CH die verlangte Mittagslinie. Zur größern Sicherheit zieht man um C mehre concentrische Kreise und stellt die Beobachtung bei einem jeden an, wodurch man, in der Regel, abweichende Resultate erhalten wird, aus denen man ein Mittel nehmen muß. — Die Sonne ändert zwar während der Zwischenzeit der vor- und nachmittägigen Beobachtung ihren Ort am Himmel, allein wegen der Ungenauigkeit, die diesem Verfahren seiner Natur nach eigen ist, wird man hierauf keine Rücksicht nehmen.

Weit genauer findet man die Mittagslinie mittelst des s. g. Theodoliten, eines winkelmessenden Werkzeuges, welches aus einem horizontalen Kreise zum Messen der Azimuthalwinkel und einem darauf senkrechten zum Messen der Höhenwinkel besteht.

Es sei B (Taf. II. Fig. 6) der Beobachtungsort, dessen Mittagslinie BS zu suchen ist, und A ein entferntes terrestrisches Object, so ist die Lage der Mittagslinie offenbar bekannt, wenn man das Azimuth des Punctes A, d. h. den Winkel ABS (oder den Bogen SA des Horizonts) kennt, welchen die vom Beobachtungsorte

nach A gezogene Linie BA mit der Mittagslinie bildet. Man stelle also den Theodoliten in B auf, so daß, wenn das Fernrohr des Verticalkreises nach A gerichtet ist, der Inder des Horizontalkreises genau auf 0° der Theilung steht. Hierauf führe man, ohne die Lage des Horizontalkreises zu ändern, das Fernrohr des Verticalkreises und mit ihm den Inder des Horizontalkreises so weit fort, bis man im Fernrohre Vormittags die Sonne (ihren oberen oder unteren Rand) in einer beliebigen Höhe erblickt. Der Inder des Horizontalkreises setzt uns in den Stand, den Winkel ABH abzulesen, um welchen man das Fernrohr gedreht hat. Endlich drehe man das Fernrohr von H nach H', so weit nämlich, bis man Nachmittags die Sonne wieder auf derselben Höhe erblickt, und bemerke den Drehungswinkel ABH'. Es ist nun also auch der Winkel HBH' = HBA + ABH' bekannt, und da HBS = SBH' sein muß, so ist $HBS = \frac{HBA + ABH'}{2}$, und daher $ABS = \frac{HBA + ABH'}{2} - ABH = \frac{ABH' - ABH}{2}$. Diese Beobachtung muß mehrmals wiederholt und aus den für den Winkel ABS erhaltenen abweichenden Resultaten das Mittel genommen werden. Richtet man nun wieder das Fernrohr auf A so, daß der Inder des Horizontalkreises auf 0° steht, und dreht man dann das Fernrohr um den bekannten Winkel ABS, so giebt es die Richtung der Mittagslinie an, die man durch Signale markiren kann. — Es ist bekannt, daß im Fernrohre zwei sich senkrecht durchkreuzende Fäden angebracht sind, durch welche ein genaues Visiren möglich gemacht wird.

Wählt man zur Beobachtung die Sonne, so muß der Werth des Winkels ABS noch wegen der eigenen Bewegung dieses Himmelskörpers während der Zwischenzeit der Beobachtungen verbessert werden. Sonst kann man auch die Beobachtung zur Nachtzeit mit jedem Fixsterne anstellen; aber dann muß bei A eine weit sichtbare Lampe (Reverbere) aufgestellt werden.

§. 14.

Die Bestimmung der geographischen Breite eines Ortes ist mit der Bestimmung seiner Polhöhe einerlei.

In Taf. I. Fig. 4 ist der Winkel N'KR' die Polhöhe des Ortes B; derselbe ist aber gleich dem Winkel AKB, oder der geographischen Breite AB, weil beide Winkel mit BKN einen rechten ausmachen.

Um die Polhöhe zu bestimmen, beobachtet man die Höhen eines nicht untergehenden Sternes in den beiden Momenten, wo derselbe bei t und t' (Taf. I. Fig. 4) ober- und unterhalb des Poles in den Meridian tritt, also die größte und kleinste Höhe, die der Stern bei seiner täglichen Bewegung erreicht. Die halbe Summe beider Meridianhöhen ist die gesuchte Polhöhe. Denn da der Stern bei seiner täglichen Bewegung immer gleichen Abstand vom Pole behält, so fällt N' in die Mitte zwischen t und t'. Es ist aber tt' der Unterschied beider im Meridian beobachteten Höhen, nämlich $tt' = tR' - t'R'$, daher $N't' = \frac{tR' - t'R'}{2}$ und $N'R' = t'R' + \frac{tR' - t'R'}{2} = \frac{tR' + t'R'}{2}$.

Die so berechnete Polhöhe bedarf aber noch einer Verbesserung wegen der Strahlenbrechung. Nachdem nämlich die Lichtstrahlen aus dem leeren Raume des Himmels in die Atmosphäre der Erde eingetreten sind, beschreiben sie eine krumme Linie, die gegen die Erde hohl ist. Aus dieser Ursache scheinen die Sterne immer etwas höher über dem Horizonte zu stehen, als wirklich der Fall ist, und man nennt nun den Unterschied zwischen der wahren und scheinbaren Höhe, die Refraction. Diese ist am Horizonte am größten und vielen unregelmäßigen Veränderungen unterworfen: nach dem Zenith hin nimmt sie mehr und mehr ab und verschwindet im Zenith selbst. Am Horizonte beträgt sie etwas mehr als ½ Grad. Man sieht leicht, daß man nach dem vorigen Verfahren die Polhöhe um die halbe Summe der bei beiden Meridianhöhen stattfindenden Refractionen zu groß findet.

Gewöhnlich bedient man sich zu solchen Beobachtungen, wenn sie in der nördlichen Halbkugel der Erde angestellt werden, des Polarsternes, weil dieser dem Nordpole am nächsten steht. Man findet diesen Stern sehr leicht, wenn man sich durch die beiden hintersten Sterne im Vierecke des großen Bären (Taf. I. Fig. 7), den Jedermann kennt, eine gerade Linie gezogen denkt; diese

führt verlängert auf einen, unter den übrigen durch seine Größe sich auszeichnenden Stern, welcher eben der Polarstern ist und mit sechs anderen kleineren Sternen ein dem großen Bären ganz ähnliches Sternbild ausmacht, das man den kleinen Bären nennt.

Noch muß aber bemerkt werden, daß die nach dem angegebenen Verfahren gefundene Polhöhe noch einer Correction bedarf, welche von der elliptischen Gestalt der Erde herrührt. Sei QSAN (Taf. I. Fig. 1) ein Durchschnitt der Erdkugel durch eine Ebene, die man durch den Beobachtungsort B und die Erdaxe SN gelegt hat, so ist derselbe der Meridian für den Ort B und hat, wie man schon aus §. 2 weiß, eine elliptische Gestalt. Ist dann BL eine Normallinie der Ellipse in B, also mit der Richtung der Schwere einerlei, und zieht man die Horizontallinie BD, die senkrecht auf BL steht, so ist der Winkel bei D die Polhöhe, die man nach obigem Verfahren findet; denn er ist der Neigungswinkel der Weltaxe SN gegen den Horizont. Dieser Winkel ist nun, wie man leicht sieht, dem HLK und folglich auch dem QLB gleich. Wollte man nun den Winkel QLB für das Maaß der geographischen Breite nehmen, so müßte man außer seiner Größe auch noch den Abstand LK seines Scheitels vom Erdmittelpuncte kennen, was zu unnützen Weitläufigkeiten führen würde. Man mißt daher die geographischen Breiten durch Winkel, deren Scheitel am Erdmittelpuncte liegen, und muß daher den Winkel QKB statt QLB setzen. Den Winkel QLB nennt man die scheinbare oder elliptische, den QKB die wahre oder geocentrische Polhöhe. Ist die scheinbare Polhöhe $= \beta$, so ist die wahre $= \beta - 712,'48 \sin 2\beta - 4,''92 \sin 2\beta \sin \beta^2$, wenn die Abplattung der Erde $= \frac{1}{289}$ gesetzt wird. Der Unterschied zwischen wahrer und scheinbarer Polhöhe ist am größten bei 45° und beträgt nahe 12 Minuten.

§. 14.

1) Weit schwieriger und ungleich zweifelhafter ist die Bestimmung der geographischen Länge, weil es hierbei, neben anderen Beobachtungen, vorzüglich auf genaue Zeitbestimmung ankommt. Man denke sich (in Taf. I. Fig. 6) das Auge in der verlängerten Erdaxe stehend, so erscheint

der Aequator AQ als ein Kreis, dessen Mittelpunct der Pol N ist; die Meridiane aber werden als gerade Linien gesehen, welche Durchmesser des Aequators sind. Alle Oerter der Erde nun, die, wie M,M',M'' auf demselben Erdmeridiane liegen, sehen auch in einerlei Momente die Sonne culminiren und haben daher in demselben Augenblicke Mittag. Geht die scheinbare Umdrehung des Himmels von S nach Q', so ist begreiflich für den von M aus östlich gelegenen Ort B der Mittag schon vorbei, wenn die Sonne für den Ort M culminirt; der westlich gelegene Ort C aber hat ihn noch zu erwarten. Für den Ort B steht die Sonne schon um den Bogen DS des Aequators westwärts vom Meridiane, und dieser Bogen giebt also, in Stunden u. s. w. ausgedrückt, die Zeit des Ortes B in dem Augenblicke, wo es in M Mittag ist. In demselben Augenblicke ist für den Ort C der westliche Abstand der Sonne von dem Meridiane dem Bogen ERS gleich, und dieser giebt also die Zeit des Ortes C, wenn er in Stunden u. s. w. ausgedrückt wird.

Für die Bögen DS und ERS kann man aber auch die entsprechenden MB und CPM des Erdäquators, d. h., die Unterschiede der geographischen Längen setzen, weil diese unter sich dasselbe Verhältniß haben, wie jene, und hieraus folgt der Satz:

Die Unterschiede der geographischen Längen zweier oder mehrer Oerter verhalten sich, wie die Unterschiede der Zeiten, die an diesen Oertern in einem und demselben absoluten Augenblicke stattfinden, vorausgesetzt, daß alle Oerter, wenn sie die Sonne culminiren sehen, eine gleichvielste Stunde zählen, also, z. B., ihre Uhr auf 12 richten.

Daher drückt man auch sehr häufig die Längen oder Längenunterschiede in Stunden u. s. w. aus. Beträgt, z. B., der Längenunterschied zweier Oerter 1 Stunde, so bedeutet dieses, daß die Zeiten dieser Oerter in demselben absoluten Augenblicke um 1 Stunde verschieden sind. Diesen in Zeit ausgedrückten Längenunterschied kann man leicht in Grade des Kreises verwandeln, da 15^0 auf 1^h gehen.

2) Hieraus ergiebt sich denn ein leichtes Mittel, den Längenunterschied zweier Oerter A und B zu bestimmen. An jedem Orte muß ein Beobachter die Zeit bemerken,

zu welcher am Himmel eine Erscheinung statt hat, die sich für beide Oerter in demselben absoluten Augenblick ereignet. Der Unterschied der Zeiten ist der gesuchte Längenunterschied, und es ist hierbei gleichgültig, ob man nach wahrer, mittlerer oder Sternzeit rechnet. Solche tautochrone Erscheinungen sind Mondfinsternisse und Finsternisse, die auf dem Jupiter durch seine Trabanten verursacht werden; aber sie geben, besonders die Mondfinsternisse, keine hinreichend genauen Bestimmungen, weil sich die Zeit ihres Anfanges und Endes nicht sicher beobachten läßt. Genauer erhält man die Längenunterschiede durch Beobachtungen von Sonnenfinsternissen, Sternbedeckungen durch den Mond u. dgl.; aber diese Erscheinungen sind nicht ganz tautochron für alle Oerter der Erde, und daher erfordern die daraus abzuleitenden Längenunterschiede verwickelte Rechnungen, die nur den Astronomen geläufig sind.

3) Sind die Oerter A und B so gelegen, daß man von dem einen nach dem andern sehen kann, so brennt man an dem einen Pulversignale los und beobachtet die Zeit der Entzündung an beiden Oertern. Da das Licht irdische Räume in unmeßbaren Zeittheilen durchläuft, so ist der Moment der Entzündung für beide Oerter derselbe, und der Unterschied der Beobachtungszeiten giebt daher die gesuchte Längendifferenz. — Am 24. Juli 1803 beobachtete man:

Mittlere Zeit auf dem Ettersberge bei Weimar.	Mittlere Zeit auf der Sternwarte Seeberg.	Längenunterschied Seeberg westlich.
5ʰ 26′ 2″, 2	5ʰ 23′ 57″, 1	0 2′ 5″, 1
5 30′ 59″, 3	5 28′ 54″, 8	2′ 4″, 5
5 35′ 59″, 6	5 33′ 55″, 0	2′ 4″, 6
9 11′ 8″, 5	9 9′ 3″, 8	2′ 4″, 7
9 16′ 2″, 6	9 13′ 58″, 2	2, 4″, 4
9 21′ 2″, 0	9 18′ 57″, 3	2′ 4″, 7
	Mittel	0ʰ 2′ 4″, 67

Es liegt also Seeberg 0ʰ 2′ 4″, 67 westlicher, als die Spitze des Ettersberges, was nach Graden 0° 31′ 10″, 05 ausmacht.

4) Wenn nicht an den Oertern A und B zwei Beobachter zugleich sein können, so muß man eine Uhr, die nach der Zeit des Ortes A geht, nach B bringen und auf diese Weise die Zeiten beider Oerter vergleichen. Hat

man, z. B., schon im Voraus berechnet, daß eine Erscheinung am Himmel an dem Orte A an einem gewissen Tage Nachmittags 2 Uhr stattfindet; bringt man dann die nach der Zeit des Ortes A gehende Uhr nach B und zeigt dieselbe, wenn die berechnete Erscheinung eintritt, 1 Uhr, so schließt man, daß der Ort A eine Stunde westlicher liegt, als B. — Im Jahre 1786 am 29. Mai fand von Zach auf der Sternwarte des Grafen Brühl (London, Dowerstreet), daß sein Chronometer im wahren Mittage dieses Tages 2″, 1 zu wenig gegen die mittlere Zeit dieses Ortes gab, und außerdem hatte er durch viele Beobachtungen ermittelt, daß der Chronometer täglich 0″, 1715 gegen mittlere Zeit zurückblieb. Den 27. Juni, also 29 Tage später, kam er mit dieser Uhr auf der Sternwarte Seeberg (Gotha) an und fand, daß sie im wahren Mittage dieses Ortes 11^h 19′ 3″, 40 zeigte. Da sie aber in London 2″, 1 zu wenig gegen mittlere Zeit zeigte, so würde sie, wenn man diesen Fehler sogleich verbessert hätte, in Seeberg 11^h 19′ 5″, 50 gezeigt haben. Da sie ferner täglich 0″, 1715 zu spät ging, was in 29 Tagen 4″, 97 ausmacht, so würde sie in Seeberg 11^h 19′ 10″, 47 zeigen, wenn sie richtig ginge. Nun weiß man, daß eine nach mittlerer Zeit gehende Uhr am 27. Juni im wahren Mittage zu London 0^h 2′ 34″, 3, oder, was dasselbe ist, 12^h 2′ 34″, 3 zeigen muß; daher hat London 0^h 43′ 23″, 83 später Mittag, als Gotha, und liegt daher um eben so viel Zeit westlicher, was nach Graden 10° 50′ 57″, 45 ausmacht.

Man kann aber auch, ohne eine Uhr von A nach B zu bringen, den Längenunterschied zwischen beiden Oertern ermitteln. Hat man die Zeit einer Erscheinung am Himmel, z. B., eine Sternbedeckung durch den Mond, für den Ort A im Voraus schon berechnet, und ermittelt man dann durch astronomische Beobachtungen die Zeit, zu welcher man diese Erscheinung an dem Orte B sich ereignen sieht, so kann man begreiflich hieraus den Längenunterschied zwischen A und B ermitteln. Auf Reisen beobachtet man zu diesem Behufe Abstände des Mondes von bestimmten Fixsternen.

§. 16.

Nach diesen astronomischen und astronomisch-geographischen Betrachtungen wollen wir wieder auf die mathe-

matischen Verhältnisse der Erde zurückkommen. Wir bemerkten aber schon in §. 2, daß die Erde eine abgeplattete Gestalt habe. Man schloß dieses zuerst aus mechanischen Gründen und fand es nachher durch Messungen wirklich bestätigt. Die Erde scheint nämlich in ihrem Urzustande eine flüssige Masse gewesen zu sein, und wenn sie bei dieser Beschaffenheit keine Axenumdrehung hatte, so mußte sie nothwendig die Gestalt einer Kugel annehmen. Sobald sie aber anfing, sich um eine Axe zu drehen, erhielten die Theile unter dem Aequator einen größeren Schwung, als die übrigen, ihre Schwere und ihr Druck wurde geringer und konnte dem stärkeren Drucke der nach den Polen zu gelegenen Massentheile nicht mehr das Gleichgewicht halten; es mußte folglich eine Strömung der flüssigen Masse von den Polen nach dem Aequator hin eintreten und so lange dauern, bis das Gleichgewicht wieder hergestellt war. Die Theorie zeigt nun, daß solches nur möglich ist, wenn die Erde die Form eines an den Polen abgeplatteten elliptischen Sphäroides hat.

Um die Abplattung der Erde zu bestimmen, hat man die Länge mehrerer Meridiangrade unter sehr verschiedenen geographischen Breiten gemessen. Es sei in Fig. 1 (Tafel I.) **ANQS** ein durch ihre Axe gehender Durchschnitt der Erde, also ein Meridian, so hat dieser die Form der Ellipse, durch deren Umdrehung das Erdsphäroid entsteht. Es seien **B** und **B'** zwei Oerter auf diesem Meridiane, deren scheinbare Polhöhe um 1° unterschieden ist, so nennt man den elliptischen Bogen **BB'** einen Meridiangrad. Man sieht leicht, daß unter verschiedenen geographischen Breiten die Größe der Meridiangrade ungleich sein wird, und zwar unter dem Aequator kleiner, als an den Polen, weil man, wegen der stärkeren Krümmung des Meridians am Aequator, hier weniger weit fortzuschreiten braucht, als in der Gegend der Pole, um seine Polhöhe um 1° zu ändern. So fand man, z. B., in Peru unter 1° 31′ 0″ Breite die Länge des Meridiangrades = 56737 Toisen, in Frankreich unter 45° 4′ 17″ Breite = 57012 Toisen, und in Lappland unter 66° 20′ 10″ Breite = 57196 Toisen. — Zwei unter sehr verschiedenen Breiten gemessene Meridiangrade reichen hin, die Abplattung der Erde zu bestimmen. Die vorzüglichsten Gradmessungen geben sie im Mittel $= \frac{1}{312}$; doch erhält man durch ver-

schiedene Combinationen der gemessenen Grade auch ziemlich große Abweichungen von diesem Mittel.

Man hat aber noch ein anderes sehr verläßliches Mittel, die Abplattung der Erde zu bestimmen, und dieses ist das Pendel. Man versteht darunter bekanntlich einen aufgehängten Körper, welcher um seinen Aufhängepunct hin und her schwingt, wie das Pendel einer Uhr. Bei einem solchen Pendel existirt immer ein Punct, in welchem man sich die ganze schwere Masse desselben vereinigt denken kann, und die Entfernung dieses Punctes, des Mittelpunctes der Schwingungen, vom Aufhängepuncte ist die eigentliche Länge des Pendels. Soll dasselbe seine Schwingungen in einer bestimmten Zeit vollenden, z. B., in einer Secunde, so zeigt die Theorie, daß solches nur bei einer bestimmten Länge geschehen kann, welche von der Schwerkraft der Erde abhängt, und hieraus folgt, daß man aus der gemessenen Länge des Secundenpendels die Größe der Schwerkraft finden kann. Wegen der abgeplatteten Gestalt der Erde muß aber die Schwerkraft unter verschiedenen Graden der Breite verschieden sein, unter dem Aequator am kleinsten und von da nach den Polen hin zunehmend, nach einem Gesetze, dessen Abhängigkeit von der Abplattung sich bestimmt nachweisen läßt. Ein Pendel nun, das unter dem Aequator Secunden schlägt, muß verlängert werden, wenn es in höheren Breiten ebenfalls Secunden schlagen soll, und aus dem Verhältnisse der Verlängerung läßt sich die Abplattung berechnen.

Es ist merkwürdig, daß die Messungen der Pendellängen fast überall auf eine größere Abplattung schließen lassen, als die meisten Gradmessungen. Die sorgfältigste Vergleichung der Pendellängen gab die Abplattung der Erde $= \frac{1}{289}$, und man hat guten Grund, dieses Resultat als der Wahrheit nahe kommend anzusehen. Die beiden in Frankreich und Lappland gemessenen Meridiangrade geben auch sehr nahe denselben Werth der Abplattung, nämlich $\frac{1}{290}$.

Endlich hat der Scharfsinn der Astronomen noch ein Mittel aufgefunden, die Abplattung der Erde zu bestimmen; es wird dasselbe durch die Abweichungen des Mondes von seinem regelmäßigen Laufe, die von der Abplat-

tung der Erde abhängen, geboten. Diese wird hiernach $= \frac{1}{299}$ gefunden.

Wenn man nun die Abplattung der Erde zu $\frac{1}{289,1}$ annimmt und den in Frankreich gemessenen Meridiangrad zu Grunde legt, so erhält man für die Dimensionen der Erde folgende Resultate:

Halbmesser des Aequators	= 3271952	Toisen
Halbe Umdrehungsaxe	= 3260634	=
Mittel zwischen beiden	= 3266293	=
Länge eines Grades im Aequator	= 5710633	=

Bekanntlich ist die geographische oder deutsche Meile eine solche Länge, daß 15 derselben auf einen Grad des Aequators gehen. Sie enthält demnach 3807,09 Toisen oder 22842,54 Pariser Fuß. — Auf den Umfang des Aequators gehen 5400 Meilen, auf den Durchmesser desselben 1718,834 Meilen, und auf die Länge eines Meridians 5390,668 Meilen. Die ganze Oberfläche der Erde enthält 9260500 Quadratmeilen und ihr Volum beträgt 2650686000 Cubikmeilen.

§. 17.

Wegen der elliptischen Gestalt der Erde wird die Berechnung der geographischen Constructionen ziemlich schwierig, da sie außerdem durch die sphärische Trigonomtrie unmittelbar gegeben wäre, wenn die Erde genau die Gestalt einer Kugel hätte. Wenn indessen nicht die äußerste Schärfe gefordert wird, so reicht die letztere Voraussetzung vollkommen hin.

1) Wäre die Erde eine Kugel, so müßte man die Entfernung zweier darauf befindlichen Oerter P und P″ (Taf. I. Fig. 2) durch den zwischenliegenden Bogen eines größten Kreises messen; denn dieser Bogen ist die kürzeste Linie, die zwischen P und P″ auf der Kugelfläche gezogen werden kann. Sie liegt in der Verticalfläche der Oerter P und P″, d. h., in der durch P und P″ und durch den Erdmittelpunct gelegten Ebene, und in diese Ebene fallen die Verticallinien aller Oerter auf dem größten Kugelkreise, der durch P und P″ gezogen ist.

2) Eine der interessantesten Aufgaben der Geographie ist die, aus den gegebenen Breiten PM $= \beta$ und P″M′

$= \beta'$ zweier Oerter P und P'' (Taf. I., Fig. 2) nebst ihrem Längenunterschiede MM' $= \alpha$, ihre Entfernung PP'' $= \delta$, d. h. den zwischen ihnen enthaltenen größten Kreisbogen in Fußen, Meilen und dergl. zu finden. — Hier kennt man in dem sphärischen Dreieck PNP'' die Seiten NP $= 90^0 - \beta$, NP'' $= 90^0 - \beta'$ und den eingeschlossenen Winkel PNP'' $= \alpha$, und kann mithin die dritte Seite PP'' berechnen. Hierfür hat man bekanntlich die Formel $\cos PP'' = \cos NP \cos NP'' + \sin NP \sin NP'' \cos PNP''$, oder

$$\cos \delta = \sin \beta \sin \beta' + \cos \beta \cos \beta' \cos \alpha.$$

Man kann hiernach den Bogen PP'' $= \delta$ in Gradtheilen berechnen und daraus dann auch seine Länge in Meilen finden, da man weiß, daß 15 Meilen auf 1^0 gehen.

Wenn beide Oerter, wie P' und P'', unter einerlei Meridiane liegen, so ist ihre Entfernung P'P'' dem Unterschiede ihrer geographischen Breiten gleich. Liegen sie aber, wie P und P' unter einerlei Parallelkreise, d. h., ist $\beta' = \beta$, so erhält man für ihre Entfernung die Formel $\cos \delta = \sin \beta^2 + \cos \beta^2 \cos \alpha$, oder die noch bequemere $\sin \frac{1}{2} \delta = \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \beta$, indem sich nämlich das gleichschenkliche Dreieck PNP' durch ein Perpendikel NW in zwei rechtwinkliche zerlegt, wobei man im Dreieck NPW die Seite NP $= 90^0 - \beta$ und den Winkel PNW $= \frac{1}{2} \alpha$ kennt und daraus die Seite PW $= \frac{1}{2} \delta$ nach der obigen Formel berechnen kann.

3) Aus mancherlei Gründen und namentlich für die Zeichnung der Landcharten ist es erforderlich, daß man die Größe der Parallelkreise und ihrer Grade in den verschiedenen geographischen Breiten berechne. Wird der Erdhalbmesser, die Erde als Kugel betrachtet, $=$ r gesetzt, so ist der Halbmesser eines Parallels UV (Taf. I., Fig. 2), dessen Abstand PM vom Aequator $= \beta$ ist, $= r \cos \beta$*). Während daher ein Bogen MM' des Aequators, der α Grade umfaßt, eine Länge von 15 α Meilen enthält, gehen auf den Bogen PP' des Parallels UV nur 15 $\alpha \cos \beta$ Meilen **), vorausgesetzt, daß PP' ebenfalls α

*) Nämlich in der schon erklärten Figur (Taf. I., Fig. 3) ist des Parallels UV Halbmesser $=$ PK' $=$ KP . sin PKK' $=$ KP . cos MKP $= r \cos \beta$.

**) Weil nämlich in verschiedenen Kreisen die Peripherieen und folglich auch die Bögen von gleichviel Graden sich wie die Halbmesser verhalten.

Grade umfaßt, wie der Fall ist, wenn dieser Bogen mit **MM'** zwischen denselben zwei Meridiankreisen **NMS** und **NM'S** liegt.

§. 18.

Alle diese Rechnungen erfordern auf der elliptisch geformten Erde noch Correctionen wegen der Abplattung. Zuerst ist einleuchtend, daß die kürzeste Linie zwischen zwei Oertern **P** und **P''** (Taf. I., Fig. 2) kein größter Kreisbogen sein kann, ja diese Linie liegt nicht einmal in einer durch **P** und **P''** gelegten Ebene, ist also eine Linie von doppelter Krümmung. Sie heißt die geodätische, und ihre Bestimmung gehört schon zu den schweren Problemen der geometrischen Analysis. Man kann bemerken, daß die kürzeste Linie zwischen zwei Oertern **P** und **P''** diejenige ist, welcher ein zwischen beiden frei gespannter Faden annehmen würde; ihre Normalen oder Krümmungshalbmesser müssen also zugleich Verticallinien der Erdoberfläche sein. Diese Verticallinien liegen aber nicht in einer Ebene, und dieses gilt begreiflich auch von den Verticallinien der Endpuncte **P** und **P''**.

Unsere geodätischen Operationen bringen es mit sich, daß wir unmittelbar nur solche Linien zwischen zwei Oertern ziehen und messen, die in einer durch beide Oerter gehenden Ebene liegen. Wollen wir, z. B., die Entfernung zwischen **P** und **P''** messen und dabei in **P** den Anfang machen, so legen wir durch **P** eine Verticalebene und richten dieselbe zugleich durch **P''**. In dieser Ebene, in welcher freilich nicht auch die Verticallinie von **P''** liegt, messen wir nun von **P** nach **P''**. Wegen der geringen Excentricität der Erde kann man die Linie **PP''**, die eigentlich ein elliptischer Bogen ist, aber nie eine im Vergleiche mit dem Erdumfange beträchtliche Länge haben wird, als Bogen eines Kreises ansehen, dessen Halbmesser dem daselbst statthabenden Krümmungshalbmesser der Erdoberfläche gleichkommt.

Es wird mitunter erforderlich, daß man die gemessene krummlinige Entfernung **PP''**, welche wir mit $\triangle$ bezeichnen wollen, auf die gradlinige **PP''** $= \triangle'$ reducire. Man kann sich zu diesem Behufe der Formel bedienen:

$$\Delta' = \Delta - \frac{1}{24} \cdot \frac{\Delta^3}{C^2} \text{ *)},$$

wenn C den mittleren Erdhalbmesser bedeutet. Man kann hieraus leicht die Folgerung ziehen, daß, wenn die Entfernung der Oerter P und P″ nicht gar zu beträchtlich ist, der Bogen PP″ von seiner Sehne nicht viel abweichen wird. Ist, z. B., $\Delta = 114103$ Toisen, so findet man Δ' nur 5,803 Toisen geringer, was etwa $\frac{1}{19666}$ von Δ beträgt. Es umfaßt aber ein Bogen Δ von dieser Länge schon einen Winkel am Mittelpuncte von 2 Graden (§. 16).

2) Es sei QSAN (Taf. I., Fig. 1) ein Meridian, so hat dieser, wie schon bemerkt worden, die Form der Ellipse, durch deren Umdrehung das Erdsphäroid entsteht. Den Halbmesser KQ des Aequators und die halbe Umdrehungsaxe KN (die große und kleine Halbaxe der Ellipse) wollen wir immer bezüglich mit A und B bezeichnen, die Abplattung $\frac{A - B}{A}$ mit e und die Excentricität des Meridians $\frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A}$ mit ε. Da nun $B = A - eA = A\,(1-e)$, so findet man $\varepsilon = \frac{\sqrt{A^2 - A^2(1-e)^2}}{A}$ $= \sqrt{1-(1-e)^2} = \sqrt{e\,(2-e)}$, wo $e = \frac{1}{289{,}1}$ ist. Dieses giebt

---

*) Bezeichnen wir nämlich den Halbmesser des Kreises, wovon PP″ ein Bogen ist, mit S, so ist der Centriwinkel des Bogens PP″ $= \frac{\Delta}{S}$ (in Theilen des Halbmessers ausgedrückt), und daher die Sehne PP″ $= \Delta' = 2\,S \,.\, \sin \tfrac{1}{2} \frac{\Delta}{S}$. Weil aber Δ nur ein kleiner Bogen ist, so kann man mit hinreichender Genauigkeit $\sin \tfrac{1}{2} \frac{\Delta}{S} = \tfrac{1}{2} \frac{\Delta}{S} - \tfrac{1}{6} \cdot \left(\tfrac{1}{2} \frac{\Delta}{S}\right)^3 = \frac{\Delta}{2\,S} - \frac{\Delta^3}{48\,S^3}$ setzen, wodurch man $\Delta' = \Delta - \frac{\Delta^3}{24\,S^2}$ erhält. Setzt man aber, was hinreichend genau ist, statt S den mittleren Erdhalbmesser C, so erhält man die obige Formel.

$$\log \varepsilon^2 = 0{,}8392301 - 3$$
$$\varepsilon^2 = 0{,}006906055 = \frac{1}{144{,}8}$$

3) Von dem beliebigen Orte B des Meridians fälle man auf die beiden Axen die Perpendikel BM und BT = KM. Bezeichnet man KM mit x und BM mit y, so hat man nach der Ellipsengleichung aus dem Mittelpuncte

$$y^2 = B^2 - \frac{B^2}{A^2}x^2 = B^2\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right).$$

Den elliptischen Halbmesser KB des Ortes B wollen wir mit r bezeichnen, und dann hat man mittelst des Dreiecks KMB nach dem Satze des Pythagoras

$$r = \sqrt{B^2 + \frac{A^2 - B^2}{A^2}x^2} = \sqrt{B^2 + \varepsilon^2 x^2}.$$

Diese Gleichungen finden jedoch bei den geographischen Rechnungen keine unmittelbare Anwendung.

4) Man ziehe durch den Ort B an den Meridian eine Berührungslinie BD, so ist diese bekanntlich eine Horizontallinie des Ortes B, und die darauf gezogene Senkrechte oder Normale BH giebt die Richtung der Verticallinie des Ortes B. Bezeichnet man nun die elliptische (scheinbare) Polhöhe BLQ mit β und die geocentrische (wahre) QKB mit β', so ist

$$\text{I. } x = \frac{A \cos \beta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \beta^2}}$$

$$\text{II. } y = \frac{A(1 - \varepsilon^2) \sin \beta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \beta^2}} = \frac{\frac{B^2}{A} \sin \beta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \beta^2}}$$

$$= \frac{B^2}{A^2} x \operatorname{tg} \beta.$$

$$\text{III. } \operatorname{tg} \beta' = \frac{B^2}{A^2} \operatorname{tg} \beta = (1 - \varepsilon^2) \operatorname{tg} \beta.$$

$$\text{IV. } r = \frac{B}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos \beta'^2}}$$

$$\text{V. } \operatorname{tg} \beta = \frac{A^2}{B^2} \operatorname{tg} \beta' = \frac{\operatorname{tg} \beta'}{1 - \varepsilon^2}$$

VI. endlich die Länge der Normale BH

$$= \frac{A}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \beta^2}} \text{*)}.$$

---

*) Die Subnormale LM ist nämlich, wie man aus jedem guten Lehrbuche über die Kegelschnitte lernen kann, $= \frac{B^2}{A^2} x$. Man hat nun $\text{tg}\, \beta = \frac{BM}{LM}$, also $\text{tg}\, \beta^2 = \frac{BM^2}{LM^2} = B^2 \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) : \frac{B^4}{A^4} x^2 = \frac{A^4 - A^2 x^2}{B^2 x^2}$, woraus folgt $(A^2 + B^2 \text{tg}\, \beta^2) x^2 = A^4$. Setzt man hier $A^2 (1 - \varepsilon^2)$ statt B^2, so erhält man $(1 + \text{tg}\, \beta^2 - \varepsilon^2 \text{tg}\, \beta^2) x^2 = (\sec \beta^2 - \varepsilon^2 \text{tg}\, \beta^2) x^2 = A^2$, und wenn man beiderseits mit $\cos \beta^2$ multiplicirt: $(1 - \varepsilon^2 \sin \beta^2) x^2 = A^2 \cos \beta^2$, woraus sogleich die oben angeführte Formel für x folgt.

Da nun $ML = \frac{B^2}{A^2} x$, so hat man auch $ML = \frac{\frac{B^2}{A} \cos \beta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \beta^2}}$, und hieraus $BM = y = ML \cdot \text{tg}\, \beta = \frac{\frac{B^2}{A} \sin \beta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \beta^2}}$.

Auch hat man $LB = ML \sec \beta$, und $LH = LK \sec \beta$, daher $HB = LB + LH = (ML + LK) \sec \beta = x \sec \beta$, und daher, wenn man für x seinen Werth setzt:

$$HB = \frac{A}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \beta^2}}, \text{ weil } \sec \beta \cos \beta = 1.$$

Man hat $\text{tg}\, MKB = \text{tg}\, \beta' = \frac{y}{x} = \frac{B^2}{A^2} \text{tg}\, \beta$.

Endlich hat man $KB = r = KM \cdot \sec \beta' = x \sec \beta'$. Nach der vorstehenden Entwickelung aber war $(B^2 + A^2 \text{tg}\, \beta^2) x^2 = A^4$ gefunden worden, und wenn man hierein statt $\text{tg}\, \beta^2$ seinen Werth $= \frac{A^4}{B^4} \text{tg}\, \beta'^2$ setzt, so bekommt man $(A^2 + B^2 \text{tg}\, \beta'^2) x^2 = A^2 B^2$. Hier setze man linker Hand $A^2 (1 - \varepsilon^2)$ statt B^2, so folgt $(1 - \varepsilon^2 + \text{tg}\, \beta'^2) x^2 = (\sec \beta'^2 - \varepsilon^2) x^2 = B^2$, und wenn man beiderseits mit $\cos \beta'^2$ multiplicirt: $(1 - \varepsilon^2 \cos \beta'^2) x^2 = B^2 \cos \beta'^2$, daher $x = \frac{B \cos \beta'}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos \beta'^2}}$, und folglich

$$r = x \sec \beta' = \frac{B}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos \beta'^2}}.$$

Zum Schlusse wollen wir noch die Entwickelung von LM nach den gewöhnlichen Differentialformeln hersetzen. Man hat nämlich für die Subnormale die Differentialformel $\frac{y dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2} d (y^2)}{d x}$.

5) Die Gleichungen III und V sind sehr bequem, um aus der elliptischen Polhöhe die geocentrische, und umgekehrt zu berechnen. Zu dem Ende hat man $\log \frac{B^2}{A^2}$ $= 0{,}9969904 - 1$, $\log \frac{A^2}{B^2} = 0{,}0030096$. Es scheint indessen noch vortheilhafter, sich hier einer Reihe zu bedienen, die man leicht auf folgende Weise erhalten kann. Aus $\operatorname{tg} \beta' = \frac{B^2}{A^2} \operatorname{tg} \beta$ folgt $\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta' = \frac{A^2 - B^2}{A^2} \operatorname{tg} \beta$, oder wenn man die Tangenten durch Sinus und Cosinus ausdrückt: $\frac{\sin(\beta - \beta')}{\cos \beta'} = \frac{A^2 - B^2}{A^2} \sin \beta$. Bezeichnen wir nun $\beta - \beta'$ mit z, so hat man, da $\frac{A^2 - B^2}{A^2} = \varepsilon^2$:

$$\frac{\sin z}{\cos(\beta - z)} = \varepsilon^2 \sin \beta, \text{ oder}$$

$$\frac{\sin z}{\cos \beta \cos z + \sin \beta \sin z} = \frac{\operatorname{tg} z}{\cos \beta + \sin \beta \operatorname{tg} z}$$

$= \varepsilon^2 \sin \beta$, woraus folgt $\operatorname{tg} z = \frac{\varepsilon^2 \sin \beta \cos \beta}{1 - \varepsilon^2 \sin \beta^2}$.

Lösen wir dieses in eine Reihe auf und gehen bloß bis ε^4, verwechseln auch tg z mit z, so ist

$$z = \varepsilon^2 \sin \beta \cos \beta + \varepsilon^4 \sin \beta^3 \cos \beta$$

oder $z = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin 2\beta + \varepsilon^4 \sin \beta^3 \cos \beta$.

Hierbei wird jedoch β als gegeben vorausgesetzt. Wäre umgekehrt β' gegeben, so hätte man $\operatorname{tg} \beta = \frac{A^2}{B^2} \operatorname{tg} \beta'$, also $\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta' = \frac{A^2 - B^2}{B^2} \operatorname{tg} \beta'$. Ist nun wieder

---

Da nun $y^2 = B^2 - \frac{B^2}{A^2} x^2$, so hat man, wenn man differentiirt: $d(y^2) = -2 \frac{B^2}{A^2} x \,.\, dx$, und folglich die Subnormale LM für den Punct B $= - \frac{B^2}{A^2} x$. Das Zeichen — deutet hier bloß an, daß die Subnormale in der entgegengesetzten Richtung der Abscisse zu rechnen ist.

$\beta - \beta' = z$ und $\frac{\varepsilon^2 A^2}{B^2} = E^2$, so wird $\frac{\sin z}{\cos(\beta' + z)} = E^2 \sin \beta'$, woraus abermals folgt:

$$\operatorname{tg} z = \frac{E^2 \sin \beta' \cos \beta'}{1 + E^2 \sin \beta'^2} = E^2 \sin \beta' \cos \beta' - E^2 \sin \beta'^3 \cos \beta',$$ oder

$$z = \tfrac{1}{2} E^2 \sin 2\beta' - E^4 \sin \beta'^3 \cos \beta'.$$

6) Um nach der Formel $\frac{B}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos \beta'^2}}$ den Halbmesser r zu berechnen, wird man $\varepsilon \cos \beta'$ logarithmisch berechnen und das Product $= \sin \varphi$ setzen. Aus $\sin \varphi$ findet man durch leichte Interpolation $\cos \varphi$ und dann hat man $r = \frac{B}{\cos \varphi}$. Uebrigens ist log. B = 6,5133020 und log. A = 6,5148068, wenn A und B in Toisen ausgedrückt werden.

7) So wie man aus der elliptischen Polhöhe die geocentrische ableitet, so wird es auch erforderlich, daß man aus einem elliptischen Azimuth ein geocentrisches berechne und umgekehrt. Um von dem, was man unter elliptischem und geocentrischem Azimuth zu verstehen habe, einen Begriff zu geben, denke man sich unter NH (Tafel II., Fig. 2) die Erdaxe und in K ihren Mittelpunct. Es seien NL und NM zwei Meridiane und B und B' zwei Oerter auf denselben. Ist nun BH die Verticallinie des Ortes B und legt man durch dieselbe und durch B' eine Ebene, so ist der Neigungswinkel derselben gegen die Ebene des Meridians NL das elliptische Azimuth des Ortes B'. vorausgesetzt, daß man diesen Neigungswinkel auf der Südseite der Verticallinie BH mißt. Ist ferner BK der Erdhalbmesser für den Ort B und legt man durch denselben und durch B' eine Ebene, so heißt ihr Neigungswinkel gegen die Ebene des Meridians NB, ebenfalls auf der Südseite von BK genommen, das geocentrische Azimuth des Ortes B' gegen den Ort B.

Um aus dem elliptischen Azimuth eines Ortes B, welches wir mit τ bezeichnen wollen, das geocentrische, welches τ' heißen mag, zu berechnen, muß man den Winkel KBB' des Erdhalbmessers in B mit der von B nach B' gezogenen Sehne $= \gamma$ nebst dem Winkel KBH kennen, den der Erdhalbmesser und die Normale in B miteinander

bilden. Dieser letztere Winkel ist aber $= NKB - NHB$, und zwar ist NKB das Complement der geocentrischen Polhöhe $= 90^0 - \beta'$, und NHB das Complement der elliptischen Polhöhe $= 90^0 - \beta$, beides für den Ort B; daher $KBH = \beta - \beta'$.

Beschreibt man nun mit einem beliebigen Halbmesser, z. B. Bb um B eine Kugel, so erhält man das sphärische Dreieck bhk, in welchem die Seite $kh = \beta - \beta'$, $kb = \gamma$ ist. Der Winkel bhk ist das Supplement des elliptischen Azimuthes $= 180^0 - \tau$, und der Winkel bkh das geocentrische Azimuth τ' selbst. Nach den Gleichungen der sphärischen Trigonometrie ist aber:

$\sin bkh \cdot \cot khb = \cot kb \cdot \sin kh - \cos kh \cdot \cos bkh$,

d. i. $\sin \tau' \cot (180^0 - \tau) = \cot \gamma \sin (\beta - \beta') -$
$\cos (\beta - \beta') \cos \tau'$.

Weil aber $\beta - \beta'$ nur ein kleiner Bogen ist und in seinem höchsten Werthe nur $12'$ beträgt, so kann man seinen Sinus $= \beta - \beta'$, seinen Cosinus $= 1$ setzen. Weil auch $\cot (180^0 - \tau) = - \cot \tau$, so hat man $- \sin \tau' \cot \tau = (\beta - \beta') \cot \gamma - \cos \tau'$, oder $\cos \tau' - \sin \tau' \cot \tau = (\beta - \beta') \cot \gamma$. Setzt man hier $\frac{\cos \tau}{\sin \tau}$ statt $\cot \tau$, so erhält man $\cos \tau' \sin \tau - \sin \tau' \cos \tau = (\beta - \beta') \cdot \cot \gamma \sin \tau$, d. i. $\sin (\tau - \tau') = (\beta - \beta') \cot \gamma \sin \tau$. Da aber $\tau - \tau'$ ebenfalls nur klein ist, so kann man setzen $\tau - \tau' = (\beta - \beta') \cot \gamma \sin \tau$, woraus folgt:

$$\tau' = \tau - (\beta - \beta') \cot \gamma \sin \tau.$$

Will man die Rechnung noch genauer führen, so wird man $\cos (\beta - \beta')$ nicht $= 1$, sondern $= 1 - \frac{1}{2} (\beta - \beta')^2$ setzen. Man erhält dadurch

$\tau' = \tau - (\beta - \beta') \cot \gamma \sin \tau - \frac{1}{2} (\beta - \beta')^2 \cos \tau' \sin \tau$ und wenn man τ' mit τ verwechselt, so kann man $\cos \tau' \sin \tau = \frac{1}{2} \sin 2 \tau$ setzen, so daß man bekommt:

$\tau' = \tau - (\beta - \beta') \cot \gamma \sin \tau - \frac{1}{4} (\beta - \beta')^2 \sin 2 \tau$, doch beträgt das Glied $\frac{1}{4} (\beta - \beta')^2 \sin 2 \tau$ im schlimmsten Falle nur $0''$, 63.

Will man aus dem geocentrischen Azimuth das elliptische suchen, so hat man $\tau = \tau' + (\beta - \beta') \cot \gamma \sin \tau + \frac{1}{4} (\beta - \beta')^2 \sin 2 \tau$, wo man ohne Bedenken $\sin \tau'$ und $\sin 2 \tau'$ statt $\sin \tau$ und $\sin 2 \tau$ setzen kann, weil in allen Fällen der Anwendung τ und τ' nur wenig unterschieden sind.

§. 19.

1) Zieht man durch den Ort B (Taf. I., Fig. 1) einen Kreis parallel zum Aequator, so steht sein Halbmesser BT bekanntlich senkrecht auf der Erdaxe und ist daher = KM = x. Also ist der Halbmesser des Parallels unter der (elliptischen) Breite $\beta = \frac{A \cos \beta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \beta^2}}$, folglich sein Umfang $= \frac{2 A \pi \cos \beta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \beta^2}}$ (wo $\pi = 3,14 \ldots$) und die Länge eines Grades auf demselben =
$\frac{A \pi \cos \beta}{180 \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \beta^2}}$ (durch Division des Umfanges mit 360).

2) Aendert sich, indem man auf dem Meridiane von B nach B' fortgeht; die elliptische Polhöhe β um den Winkel z, so ist der elliptische Bogen

$$BB' = \frac{A (1 - \varepsilon^2) z}{(1 - \varepsilon^2 \sin \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ *)},$$

*) Das Differential eines Bogens hat man nämlich in der Formel $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, wenn x und y die Coordinaten bedeuten; d. h., wenn für die Abscisse x der Bogen = s ist, und wenn sich dann x um dx ändert, so ändert sich s um $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Nun ist in der Ellipse $y^2 = B^2 - \frac{B^2}{A^2} x^2$, daher $y dy = -\frac{B^2}{A^2} x \,.\, dx$, $dy^2 = \frac{B^4 x^2 dx^2}{A^4 y^2}$. Hierdurch erhalten wir $ds = \sqrt{dx^2 + \frac{B^4 x^2 dx^2}{A^4 y^2}} = \frac{dx}{A^2 y} \sqrt{A^4 y^2 + B^4 x^2}$. Setzen wir nun zuerst in $\sqrt{A^4 y^2 + B^4 x^2}$ statt x und y ihre Werthe aus §. 18, 4, so erhalten wir $\sqrt{A^4 y^2 + B^4 x^2} = \sqrt{\frac{A^2 B^4 \sin \beta^2 + A^2 B^4 \cos \beta^2}{1 - \varepsilon^2 \sin \beta^2}} = AB^2 \sqrt{\frac{\sin \beta^2 + \cos \beta^2}{1 - \varepsilon^2 \sin \beta^2}} = \frac{AB^2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \beta^2}}$, daher $ds = \frac{B^2 dx}{A y} \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \beta^2}}$. Nach einer Formel der Anmerkung des §. 18 war aber $(A^2 + B^2 \operatorname{tg} \beta^2) x^2 = A^4$, also, wenn man differentiirt, $2 x dx (A^2 + B^2 \operatorname{tg} \beta^2) + x^2 \,.\, B^2 \,.\, 2 \operatorname{tg} \beta (d \operatorname{tg} \beta) = 2 x dx (A^2 + B^3 \operatorname{tg} \beta^2) + \frac{2 B^2 x^2 \,.\, \operatorname{tg} \beta \,.\, d \beta}{\cos \beta^2} = 0$, oder wenn man mit $\cos \beta^2$ mul-

vorausgesetzt, daß der Bogen z, der hier in Theilen des Halbmessers ausgedrückt ist, nur klein ist.

Setzen wir hier statt z den Bogen für 1°, welcher nach bekannter Rechnung $= \frac{\pi}{180^\circ}$, so erhalten wir die Länge eines Breitengrades unter der Breite β. Bezeichnen wir diesen also mit g, so haben wir

$$g = \frac{A\,(1 - \varepsilon^2)\,\pi}{180^\circ\,(1 - \varepsilon^2 \sin \beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

eine Formel, welche bei geographischen Rechnungen von großem Nutzen ist.

Ist unter einer andern Breite b der Breitengrad $= \gamma$, so hat man $\gamma = \frac{A\,(1-\varepsilon^2)\,\pi}{180^\circ\,(1 - \varepsilon^2 \sin b^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{g}{\gamma} = \left(\frac{1-\varepsilon^2 \sin b^2}{1 - \varepsilon^2 \sin \beta^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ und $\left(\frac{g}{\gamma}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{g^{\frac{2}{3}}}{\gamma^{\frac{2}{3}}} = \frac{1-\varepsilon^2 \sin b^2}{1-\varepsilon^2 \sin \beta^2}$, woraus man durch eine leichte Reduction die Formel findet

$$\varepsilon^2 = \frac{\sqrt[3]{g^2} - \sqrt[3]{\gamma^2}}{\sin \beta^2 \sqrt[3]{g^2} - \sin b^2 \sqrt[3]{\gamma^2}},$$

durch welche man also aus zwei gemessenen Graden unter zwei verschiedenen Breiten die Excentricität und die Abplattung der Erde berechnen kann.

---

tiplicirt und mit 2 x dividirt: $dx\,(A^2 \cos \beta^2 + B^2 \sin \beta^2) + B^2\, x \operatorname{tg} \beta \,.\, d\beta = 0$, woraus folgt $dx = \frac{-B^2\, x \operatorname{tg} \beta\, d\beta}{A^2 \cos \beta^2 + B^2 \sin \beta^2}$, $\frac{dx}{y} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{B^2 \operatorname{tg} \beta \,.\, d\beta}{A^2 \cos \beta^2 + B^2 \sin \beta^2}$. Nach §. 18, 4 ist $\frac{x}{y} = \frac{A^2}{B^2} \,.\, \cot \beta$, daher $\frac{dx}{y} = -\frac{A^2\, d\beta}{A^2 \cos \beta^2 + B^2 \sin \beta^2}$.

Hier setzen wir $A^2\,(1 - \varepsilon^2)$ statt B^2 und erhalten dadurch $\frac{dx}{y} = \frac{-d\beta}{\cos \beta^2 + \sin \beta^2 - \varepsilon^2 \sin \beta^2} = \frac{-d\beta}{1 - \varepsilon^2 \sin \beta^2}$. Dieses substituiren wir in den letzten Ausdruck für ds und erhalten folglich $ds = \frac{-B^2\, d\beta}{A\,(1-\varepsilon^2 \sin \beta^2)^{\frac{3}{2}}}$, und wenn wir wiederum $A^2\,(1-\varepsilon^2)$ statt B^2 setzen, $ds = \frac{A\,(1 - \varepsilon^2)\, d\beta}{(1-\varepsilon^2 \sin \beta^2)^{\frac{3}{2}}}$. Dieses giebt den obigen Ausdruck für BB′, wenn wir z statt dβ setzen.

3) Zieht man durch den Ort B (Taf. I., Fig. 1) eine Normale oder Verticale BH, so giebt es auf ihr bekanntlich einen Punct P, aus dem ein Kreis mit dem Halbmesser PB sich beschreiben läßt, dessen Krümmung am wenigsten von der des Meridians in B abweicht. Man nennt daher den Halbmesser PB den Krümmungshalbmesser des Meridians für den Ort B, und wenn man ihn durch ϱ bezeichnet, so hat man

$$\varrho = \frac{A\,(1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2 \sin \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ *)}.$$

Eine kleine Strecke des Meridians, z. B., in einer Ausdehnung von 2°, kann man nun als einen mit dem Krümmungshalbmesser beschriebenen Kreisbogen, und einen kleinen Theil der Erdoberfläche als einen Theil der mit dem Krümmungshalbmesser beschriebenen Kugel betrachten.

§. 20.

Ehe wir zu der Beschreibung der sogenannten Landesvermessungen übergehen, wollen wir noch zeigen, wie man aus der geographischen Lage eines Ortes B (Taf. II., Fig. 2) die eines anderen B' berechnen kann, wenn die Entfernung beider Oerter (der Bogen BB') in Meilen oder einem andern Längenmaaße und das Azimuth des Ortes B' in Bezug auf B gegeben sind. Diese Aufgabe ist bei Landesvermessungen von der höchsten Wichtigkeit.

Man setze also die Breite von B $= \beta$, die von B' $=$ b, die Distanz BB' $= \triangle$. Ferner sei das Azimuth des Ortes B' gegen B $= \tau$, das von B gegen B' $=$ t und die Längendifferenz beider Orte, oder der Neigungswinkel

---

*) Bekanntlich ist der Krümmungshalbmesser ϱ durch die Differentialformel $\frac{ds}{d\beta}$ gegeben, wo ds das Differential des Bogens an irgend einer Stelle und d β das Differential des Winkels bedeutet, den die Normallinie und die Abscissenlinie an derselben Stelle miteinander bilden. In unserem Falle bedeutet der Winkel β die Breite oder Polhöhe des Ortes B, und da man das Differential des Bogens unter der Polhöhe β = ds $= \frac{A\,(1-\varepsilon^2)\,d\beta}{(1-\varepsilon^2 \sin \beta^2)^{\frac{3}{2}}}$ gefunden hat, so ergiebt sich hieraus auch sogleich der Krümmungshalbmesser $\varrho = \frac{ds}{d\beta} = \frac{A\,(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 \sin \beta^2)^{\frac{3}{2}}}$.

ihrer Meridianebenen $= \lambda$. Hier kommt es nun darauf an, aus den Größen β, $\triangle$, τ die Größen b, t und λ zu finden, was auf folgende Weise geschehen kann.

I. Da die unmittelbaren Beobachtungen nur die elliptische Breite und das elliptische Azimuth geben, so reducire man zuerst die elliptische Polhöhe β des Ortes B auf die geocentrische β' nach der Formel

$$\operatorname{tg} \beta' = \left[0{,}9969904 - 1\right] \operatorname{tg} \beta,$$

wo der eingeklammerte Factor schon ein Logarithmus ist. Hierauf berechne man die Differenz $\beta - \beta'$.

II. Man berechne den Erdhalbmesser $BK = r$ durch die Formel: $\sin \varphi = \varepsilon \cos \beta'$ und $r = \dfrac{B}{\cos \varphi}$.

III. Aus der krummlinigen Entfernung $BB' = \triangle$ berechne man die gerade $BB' = \triangle' = \triangle - \dfrac{\triangle^3}{24C^2}$, unter C den mittleren Erdhalbmesser verstanden. Es ist $\log \left(\dfrac{1}{24\, C^2}\right) = 0{,}59168 - 15$.

IV. Man berechne vorläufig die geocentrische Polhöhe b' des Ortes B' nach der Formel

$$\sin b' = \sin \left(\beta' - \frac{\triangle \cos \tau}{r \sin 1''}\right) \cos \left(\frac{\triangle \sin \tau}{r \sin 1''}\right)$$

wo unter τ das Azimuth des Ortes B' in B zu verstehen ist*).

V. Mittelst des so gefundenen Werthes von b' berechne man den Erdhalbmesser $KB' = r'$ des Ortes B' nach den Formeln

$$\sin \varphi' = \varepsilon \cos b' \text{ und } r' = \frac{B}{\cos \varphi'}.$$

---

*) Diese Formel folgt so. Zieht man $B'E$ senkrecht auf BN, so kann man das sphärische Dreieck $BB'E$, seiner Kleinheit wegen, als ein ebenes ansehen und man hat dann $BE = \Delta \cos (180^\circ - \tau) = - \Delta \cos \tau$ und $EB' = \Delta \sin \tau$. Wenn man dann K als Mittelpunct der Seiten betrachtet, so sind diese Seiten in Secunden ausgedrückt $\dfrac{BE}{KB \sin 1''} = \dfrac{-\Delta \cos \tau}{r \sin 1''}$ und $\dfrac{EB'}{KB \sin 1''} = \dfrac{\Delta \sin \tau}{r \sin 1''}$. In dem sphärischen bei E rechtwinklichen Dreieck ENB' ist aber $\cos B'N = \cos (90^\circ - b') = \sin b' = \cos EN \cdot \cos EB' = \cos (90^\circ - \beta - BE) \cos EB' = \sin (\beta + BE) \cos EB'$, welches die obige Formel ist, wenn man statt BE und EB' ihre Werthe setzt.

VI. Hierdurch findet man den Halbmesser K B′ hinlänglich genau, und da man nun die Seiten des Dreiecks KBB′ kennt, so kann man hieraus seine Winkel $BKB' = \delta$, $KBB' = \gamma$ und $KB'B = \gamma'$ berechnen. Man hat nach den Formeln der ebenen Trigonometrie

$$\sin\tfrac{1}{2}\,\delta = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(r-r'+\triangle')\,(r'-r+\triangle')}{rr'}}$$

und dann noch $\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\gamma'-\gamma) = \frac{r-r'}{r+r'}\cot\tfrac{1}{2}\,\delta$, oder abgekürzt

$$\tfrac{1}{2}(\gamma'-\gamma) = \frac{(r-r')\cot\tfrac{1}{2}\,\delta}{(r+r')\sin 1''},$$

woraus nun, da $\tfrac{1}{2}(\gamma+\gamma') = 90^0 - \tfrac{1}{2}\,\delta$, γ und γ' beide zugleich gefunden werden.

VII. Aus dem gegebenen elliptischen Azimuth τ des Ortes B′ in B berechne man das geocentrische τ' nach §. 18, 5, nämlich

$$\tau' = \tau - (\beta - \beta')\cot\gamma\sin\tau - \tfrac{1}{4}(\beta-\beta')^2\sin 2\tau.$$

VIII. Beschreibt man nun um K mit einem beliebigen Halbmesser eine Kugel, so erhält man das sphärische Dreieck nml, in welchem man die Seiten $mn = 90^0 - \beta'$ und $ml = \delta$ nebst dem eingeschlossenen Winkel $nml = 180^0 - \tau'$ kennt. Hieraus kann man die übrigen Stücke berechnen, und zwar ist die Seite nl das Complement der geocentrischen Polhöhe des Ortes $B' = 90^0 - b'$, der Winkel bei n ist als Neigungswinkel der Meridianebenen von B und B′ die gesuchte Längendifferenz $= \lambda$, und wenn wir das geocentrische Azimuth von B in B′ mit t′ bezeichnen, so ist der Winkel $nlm = t' - 180^0$. Wir rechnen nämlich die Azimuthe sämmtlich morgenwärts, so daß, wenn man z. B. in B′ stehend, nach Süden blickt und sich dann morgenwärts herumdreht, bis man den Ort B sieht, der Drehungswinkel das Azimuth von B ist. Die sphärische Trigonometrie giebt uns nun bekanntlich die Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(nlm - lnm) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(nm - ml)}{\sin\tfrac{1}{2}(nm + ml)}\cot\tfrac{1}{2}\,nml$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(nlm + lnm) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(nm - ml)}{\cos\tfrac{1}{2}(nm + ml)}\cot\tfrac{1}{2}\,nml$$

$$\sin nl = \frac{\sin mn \cdot \sin nml}{\sin nlm},$$

oder wenn wir die hier gebrauchte Bezeichnung substituiren:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(t' - 180^\circ - \lambda) = \frac{\sin \frac{1}{2}(90^\circ - \beta' - \delta)}{\sin \frac{1}{2}(90^\circ - \beta' + \delta)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\tau'$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(t' - 180^\circ + \lambda) = \frac{\cos \frac{1}{2}(90^\circ - \beta' - \delta)}{\cos \frac{1}{2}(90^\circ - \beta' + \delta)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\tau'.$$

Hiernach findet man die Winkel t' und λ, und sodann auch b' durch die Gleichung

$$\cos b' = \frac{\cos \beta' \sin \tau'}{\sin (t' - 180^\circ)}.$$

IX. Aus der geocentrischen Polhöhe b' des Ortes B' berechne man die elliptische b nach der Gleichung

$$\operatorname{tg} b = \left[0{,}0030096\right] \operatorname{tg} b',$$

wo der eingeklammerte Factor schon ein Logarithmus ist.

X. Endlich berechne man aus dem geocentrischen Azimuth t' des Ortes B' das elliptische t nach der Formel:

$$t = t' + (b - b') \cot \gamma' \sin t' + \tfrac{1}{4}(b - b')^2 \sin 2t' \sin 1''.$$

Die Rechnung ist zwar etwas weitläufig, aber sicher. Wir wählten sie deshalb, weil sie aus den Sätzen der sphärischen Trigonometrie in Verbindung mit den bisherigen Entwickelungen unmittelbar hervorgeht. Sonst lassen sich noch beträchtliche Abkürzungen anbringen, besonders wenn die Entfernung der Oerter B und B' nicht groß ist; doch liegt die Entwickelung dieser Abkürzungen nicht in unserem Plane.

Es sei z. B. $\beta = 50^\circ$, $\tau = 140^\circ$, $\triangle = 100000$ Toisen. Man hat dann

nach I.

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{tg}\beta &= 10{,}0761865 \\
& \underline{0{,}9969903 - 1} \\
\log \operatorname{tg}\beta' &= 10{,}0731768 \\
\beta' &= 49^\circ 48' 15'',73 \\
\beta - \beta' &= 0^\circ 11' 44'',27 = 704'',27;
\end{aligned}$$

nach II.

$$\begin{aligned}
\log \varepsilon &= 0{,}9196150 - 2 \\
\log \cos \beta' &= \underline{9{,}8098286} \\
\log \sin \varphi &= 8{,}7294436 \\
\log B &= 6{,}5133020 \\
\log \cos \varphi &= \underline{0{,}9993744 - 1} \\
\log r &= 6{,}5139276 \\
r &= 3265334 \text{ Toisen};
\end{aligned}$$

nach III.

$$\begin{aligned} \log \Delta^3 &= 15{,}00000 \\ &\ \underline{0{,}59168-15} \\ &\ 0{,}59168 \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta^3}{24\, C^2} = 3{,}905 \text{ Toisen}$$

$$\Delta' = 99996{,}095;$$

nach IV.

$$\begin{aligned} \log \Delta &= 5{,}00000 \\ \log \cos \tau &= 0{,}88425-1^{n} \\ \text{compl. } \log r &= 0{,}48607-7 \\ \text{compl. } \log \sin 1'' &= \underline{5{,}31443} \\ &\ 3{,}68475^{n}\text{*)} \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta \cos \tau}{r \sin 1''} = -4838{,}9''$$

$$= -1^{\circ}20'38{,}9''$$

$$\beta' - \frac{\Delta \cos \tau}{r \sin 1''} = 51^{\circ}8'54'',63$$

$$\begin{aligned} \log \Delta &= 5{,}00000 \\ \log \sin \tau &= 0{,}80807-1 \\ \text{compl. } \log r &= 0{,}48607-7 \\ \text{compl. } \log \sin 1'' &= \underline{5{,}31443} \\ &\ 3{,}60857 \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta \sin \tau}{r \sin 1''} = 4060'',4 = 1^{\circ}7'40'',4$$

$$\log \sin \left(\beta' - \frac{\Delta \cos \tau}{r \sin 1''}\right) = 9{,}8914117$$

$$\log \cos \left(\frac{\Delta \sin \tau}{r \sin 1''}\right) = \underline{0{,}9999159-1}$$

$$\begin{aligned} \log \sin b' &= 9{,}8913276 \\ \text{vorläufiges } b' &= 51^{\circ}8'5'',0; \end{aligned}$$

nach V.

$$\begin{aligned} \log \varepsilon^2 &= 0{,}9196150-2 \\ \log \cos b' &= \underline{9{,}7976077} \\ \log \sin \varphi' &= 8{,}7172227 \end{aligned}$$

---

*) Das angehängte n zeigt an, daß die dem Logarithmen zugehörige Zahl negativ ist.

$$\log B = 6{,}5133020$$
$$\log\cos\varphi' = \underline{0{,}9994087-1}$$
$$\log r' = 6{,}5138933$$
$$r' = 3265076$$
$$r'-r = -258$$
$$r'+r \text{ nahe } = 2r;$$

nach VI.

$$\log(r'-r+\triangle') = 4{,}9988611$$
$$\log(r-r'+\triangle') = 5{,}0011021$$
$$\text{compl. }\log r = 0{,}4860724-7$$
$$\text{compl. }\log r' = 0{,}4861067-7$$
$$\text{compl. }\log 4 = \underline{0{,}3979400-1}$$
$$0{,}3700823-4$$
$$\log\sin\tfrac{1}{2}\delta = 8{,}1850411$$
$$\tfrac{1}{2}\delta = 0^\circ 52' 38'',517$$
$$\delta = 1^\circ 45' 17'',03$$

$$\log(r-r') = 2{,}41162$$
$$\log\cot\tfrac{1}{2}\delta = 1{,}81491$$
$$\text{compl. }\log(r'+r) = 0{,}18506-7$$
$$\text{compl. }\log\sin 1'' = \underline{5{,}31443}$$
$$\log\tfrac{1}{2}(\gamma'-\gamma) = 2{,}72602$$
$$\tfrac{1}{2}(\gamma'-\gamma) = 532'',13 = 0^\circ\ 8'52'',13$$
$$\tfrac{1}{2}(\gamma'+\gamma) = \underline{89^\circ\ 7'21'',48}$$
$$\gamma' = 89^\circ 16' 13'',61$$
$$\gamma = 88^\circ 58' 29'',35$$

nach VII.

$$\log(\beta-\beta') = 2{,}8477$$
$$\log\cot\gamma = 0{,}2527-2$$
$$\log\sin\tau = \underline{0{,}8081-1}$$
$$0{,}9085$$
$$8'',10$$
$$\log(\beta-\beta')^2 = 5{,}695$$
$$\log\sin 2\tau = 0{,}993-1^n$$
$$\log\sin\tfrac{1}{4}'' = \underline{0{,}084-6}$$
$$0{,}772-1^n$$
$$-0'',59$$

$$\tau' = 140^\circ - 8'',10 + 0'',59$$
$$= 139^\circ 59' 52'',49;$$

nach VIII.

$$\log \sin \tfrac{1}{2}(90^\circ - \beta' - \delta) = 9{,}5174646$$
$$\log tg \tfrac{1}{2}\tau' = 10{,}4389095$$
$$19{,}9563741$$
$$\log \sin \tfrac{1}{2}(90^\circ - \beta' + \delta) = 9{,}5538388$$
$$\log tg \tfrac{1}{2}(t' - 180^\circ - \lambda) = 10{,}4025353$$
$$\tfrac{1}{2}(t' - 180^\circ - \lambda) = 68^\circ 24' 24'',62$$

$$\log \cos \tfrac{1}{2}(90^\circ - \beta' - \delta) = 9{,}9750911$$
$$\log tg \tfrac{1}{2}\tau' = 10{,}4389095$$
$$20{,}4140006$$
$$\log \cos \tfrac{1}{2}(90^\circ - \beta' + \delta) = 9{,}9702239$$
$$\log tg \tfrac{1}{2}(t' - 180^\circ + \lambda) = 10{,}4437767$$
$$\tfrac{1}{2}(t' - 180^\circ + \lambda) = 70^\circ 12' 16'',02$$

$$\tfrac{1}{2}(t' - 180^\circ + \lambda) = 70^\circ 12' 16'',02$$
$$\tfrac{1}{2}(t' - 180^\circ - \lambda) = 68^\circ 24' 24'',62 \quad \text{add. u. subtr.}$$
$$t' - 180^\circ = 138^\circ 36' 40'',64$$
$$t' = 318^\circ 36' 40'',64$$
$$\lambda = 1^\circ 47' 51'',40$$

$$\log \cos \beta' = 9{,}8098286$$
$$\log \sin \tau' = 9{,}8080863$$
$$19{,}6179149$$
$$\log \sin (t' - 180^\circ) = 9{,}8203092$$
$$\log \cos b' = 9{,}7976057$$
$$b' = 51^\circ 8' 5'',78;$$

nach IX.

$$\log tg\, b' = 10{,}0937232$$
$$0.0030097$$
$$\log tg\, b = 10{,}0967329$$
$$b = 51^\circ 19' 43'',65$$
$$b - b' = 0^\circ 11' 37'',87$$
$$= 697'',87;$$

nach X.

$$\log (b - b') = 2{,}8438$$
$$\log \cot \gamma' = 0{,}1050 - 2$$
$$\log \sin t' = 0{,}8203 - 1^n$$
$$0{,}7691^n$$
$$5'',88$$

$\log (b-b')^2 = 5{,}688$
$\log \sin 2t' = 0{,}996-1^n$
$\log \sin \frac{1}{4}'' = 0{,}084-6$
$0{,}768-1^n$
$-0',59$

$t = 318^\circ 36' 40'',64 - 5'',88 - 0'',59 = 318^\circ 36' 34'',17.$

Anmerkung. Die Berechnung der Ansatze I., II., III., V. und IX. könnten durch vorher berechnete Hülfstabellen umgangen werden, wodurch begreiflich die ganze Rechnung bedeutend abgekürzt wird. Man wird bemerkt haben, daß das voläufig berechnete b' dem wahren sehr nahe kommt; da aber schon ein weniger genäherter Werth von b' hinreicht, um r' mit hinlänglicher Sicherheit zu finden, so kann man dafür das nahe kommende $\beta' - \frac{\triangle \cos \tau}{r \sin 1''}$ nehmen. Die Rechnung für r' und die Winkel δ, γ und γ' ließe sich auch durch Näherungsformeln bewirken, allein für unsere Zwecke würde das zu weit führen.

Will man überhaupt weniger genau rechnen, so kann man so verfahren, wobei vorausgesetzt wird, daß die geocentrischen Polhöhen durchgängig gegeben sind. Zuerst suche man den Winkel B K B' (Fig. 2, Taf. II) $= \delta$ so, als ob KB = KB' wäre, da dann $\delta = \frac{\triangle}{r \sin 1''}$ ist. Will man hierbei etwas genauer verfahren, so rechne man nach einem Mittelwerthe von r, der nämlich zwischen KB und KB' liegt. Dieses läßt sich am besten auf folgende Weise bewirken: Es ist $KB = r = \frac{B}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos \beta'^2}} = B\,(1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos \beta'^2)$ und $KB' = r' = B\,(1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos b'^2)$, also $r - r' = \frac{1}{2}\varepsilon^2 B\,(\cos \beta'^2 - \cos b'^2) = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 B \sin(\beta' + b') \sin(\beta' - b')$.

Nach Obigem ist aber $\beta' - b'$ nahe $= \frac{\triangle \cos \tau}{r}$, also

$$r' - r = \frac{1}{2}\varepsilon^2 B \sin\left(2\beta' - \frac{\triangle \cos \tau}{r}\right) \cdot \sin \frac{\triangle \cos \tau}{r}.$$

Statt $\sin \frac{\triangle \cos \tau}{r}$ können wir aber $\frac{\triangle \cos \tau}{r}$ und statt r das nahe kommende B setzen, so daß $r' - r =$

$\frac{1}{2}\,\varepsilon^2 \triangle \cos\tau \sin\left(2\beta' - \frac{\triangle\cos\tau}{r}\right)$ wird. Man hat daher $\frac{r+r'}{2} = r + \frac{1}{4}\,\varepsilon^2 \triangle \cos\tau \sin\left(2\beta' - \frac{\triangle\cos\tau}{r}\right)$ als den Werth des mittleren Halbmessers, und wenn man hiermit in $\triangle$ dividirt, so erhält man den Werth von δ, nämlich

$$\delta = \frac{\triangle}{r \sin 1''} - \frac{1}{4}\,\varepsilon^2 \frac{\triangle^2}{r^2 \sin 1''} \cos\tau \sin\left(2\beta' - \frac{\triangle\cos\tau}{r}\right).$$

Setzt man also $\delta' = \frac{\triangle}{r \sin 1''}$ so wird

$$\delta = \delta' - \frac{1}{4}\,\varepsilon^2 \delta'^2 \sin 1'' \cos\tau \sin(2\beta' - \delta' \cos\tau),$$

oder wenn man noch $2\beta'$ statt $2\beta' - \delta' \cos\tau$ setzt:

$$\delta = \delta' - \frac{1}{4}\,\varepsilon^2 \delta^2 \sin 1'' \cos\tau \sin 2\beta'.$$

Nach dieser Formel wird man für das obige Beispiel $\delta = 1^0\ 45'\ 17'',05$ finden.

Hierauf berechne man aus dem elliptischen Azimuth (denn nur dieses ist durch Beobachtung gegeben) das geocentrische nach der Formel $\tau' = \tau - (\beta - \beta') \cot\gamma \sin\tau$. Weil wir das Dreieck B K B' als gleichschenklig annahmen, so ist $\gamma = 90^0 - \frac{1}{2}\,\delta$, und $\cot\gamma = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\delta = \frac{1}{2}\,\delta$. Für $\beta - \beta'$ setze man aus § 18, 5, $\frac{1}{2}\,E^2 \sin 2\beta'$, so daß

$$\tau' = \tau - \frac{1}{4}\,E^2\,\delta \sin\tau \sin 2\beta',$$

wo $\log(\frac{1}{4}\,E^2) = 0,23867 - 3$ für die angenommene Abplattung $= \frac{1}{289,1}$. Zwar giebt diese Formel das geocentrische Azimuth nicht ganz genau, allein zu gegenwärtiger Absicht mit hinreichender Schärfe.

Nach diesen Vorbereitungen berechne man die Größen λ, t' und b' eben so, wie oben unter **VIII.** gezeigt worden.

Die Größen λ und b' werden hierdurch genau gefunden, allein t' ist etwas fehlerhaft, weil oben τ' nicht richtig genommen wurde. Indessen muß man noch, wenn der fernere Gebrauch es nöthig macht, aus t' das elliptische Azimuth t nach der Formel

$$t = t' + \frac{1}{4}\,E^2\,\delta \sin t' \sin 2b'$$

ableiten, und dieses stellt sich wieder richtig heraus.

Diese Rechnung wird von der vorigen nicht leicht um $\frac{1''}{10}$ in den Resultaten differiren.

Anmerkung. Die hier gegebene Rechnung, welche wir auf die elementarste Weise durchzuführen versucht haben, ist von Gauß bei Gelegenheit der Hannöverschen Vermessung auf die früher von ihm behandelte Aufgabe: Die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird (Schumacher's astronomische Abhandlungen, 3. Heft, 1822), zurückgeführt worden. Darnach wird der zu vermessende Theil der Erdoberfläche, also ein Theil des Ellipsoides, auf eine Kugel übertragen und die Dreiecke auf der letztern bekommen mit denen auf dem Ellipsoide ganz gleiche Winkel und nur wenig verschiedene Seiten, die mit den ellipsoidischen immer gleiches, von der Einheit sich nur sehr wenig entfernendes Verhältniß haben. Nur die astronomischen Größen, Länge, Breite und Azimuth der Abbildung stimmen mit denen des Urbildes nicht ganz überein und bedürfen kleiner Verbesserungen, nachdem man das Dreieckssystem ganz wie ein sphärisches berechnet hat. Um jedoch die diesem Werke gesetzten Grenzen nicht zu überschreiten, verweise ich auf die obengenannte Schrift und dann auf: Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie von Carl Friedrich Gauß; Göttingen, in der Dietrich'schen Buchhandlung, 1844.

§. 21.

Obgleich die gegenseitige Lage der Oerter durch Beobachtung ihrer Längen und Breiten vollständig bekannt wird, so will sich doch diese astronomisch-geographische Methode nicht dann eignen, wenn die zu bestimmenden Oerter durch nicht gar große Distanzen getrennt sind. Denn die astronomischen Beobachtungen sind zu mühsam und zeitraubend, als daß man sie so häufig anstellen könnte, sie würden aber auch nicht einmal die gewünschte Genauigkeit der Resultate geben. Liegen z. B. zwei Oerter P′ und P″ (Taf. I Fig. 2) unter demselben Meridiane, so ist der Unterschied ihrer Polhöhen ihre Entfernung. Wäre nun dieser Unterschied der Polhöhen, wie es sehr leicht möglich ist, um 5″ fehlerhaft gefunden, so würde dieser Fehler im Längenmaße 476 Fuß betragen, d. h., die Entfernung der Oerter P′ und P″ wäre um 476 Fuß fehlerhaft. Diesen Fehler würde man sich nun

zwar gefallen lassen, wenn die Entfernung zwischen P' und P'' viele Meilen betrüge; wenn aber diese Entfernung nur einige Tausend Fuß groß wäre, so würde ein um 476 Fuß fehlerhaftes Resultat ganz unannehmbar sein. Hauptsächlich würden aber aus den Längenbestimmungen große Fehler hervorgehen, weil diese gerade so schwer mit leidlicher Genauigkeit zu erhalten sind.

Deßhalb unterstützt man die astronomisch-geographische Ortsbestimmung durch eine rein-geometrische, nach welcher die gegenseitige Lage der Oerter, unabhängig von Beobachtungen am Himmel, durch bloße geometrische Constructionen, namentlich durch Dreiecksverbindungen, gefunden wird. Diese Methode, welche wir jetzt beschreiben wollen, gestattet zwar keine Ausdehnung über die ganze Erdoberfläche, läßt sich aber doch über sehr große Länder ausbreiten und bis in die kleinsten Einzelheiten, bis zur Ausmessung der Feldgrundstücke, verfolgen.

§. 22.

Wir müssen aber noch folgende Betrachtung vorausschicken. Das feste Land ist bekanntlich keine regelmäßig gekrümmte Fläche, sondern wechselt mit vielen Bergen und Thälern ab. Ob nun gleich diese Abwechselungen im Vergleiche zum ganzen Erdballe so gering erscheinen, daß dadurch der Regelmäßigkeit der Erdgestalt im Ganzen kein Abbruch geschieht, so sind wir doch genöthigt, bei unseren nur kleine Strecken umfassenden Messungen darauf Rücksicht zu nehmen. Man begreift, daß durch Länge und Breite eines Ortes seine Lage eigentlich noch nicht genau bestimmt ist, sondern daß hierzu noch eine dritte Dimension erfordert wird: nämlich sein Abstand vom Erdmittelpuncte, wofür man jedoch durchgängig seinen Abstand von der Oberfläche des Meeres oder seine absolute Höhe angiebt.

Das Meer muß nämlich, wegen der Beweglichkeit aller seiner Massentheile, die Gestalt der Erde ganz vollkommen annehmen, und wenn man daher seine Oberfläche erweitert, daß man das vollständige Erdsphäroid erhält, so hat man die eigentliche Grundgestalt der Erde. Es sei nun QSAN (Taf. I. Fig. 1) ein Meridian der Meeresoberfläche und P die Spitze eines darauf befindlichen Berges. Zieht man durch P eine Normale PW, so heißt das zwischen der Bergspitze und der Meeresober-

fläche gelegene Stück PU die absolute Höhe dieses Berges. Unter relativer Höhe versteht man dagegen den Unterschied der absoluten Höhen zweier Oerter, wodurch man demnach erfährt, um wie viel der eine Ort höher liegt, als der andere.

Den Fußpunct U der Höhe PU nennt man die Projection des Ortes P auf den Meereshorizont oder Meeresspiegel, und für unsere terrestrischen Messungen gilt nun der Satz, daß alle Puncte, deren gegenseitige Lage wir bestimmen wollen, auf den Meereshorizont projicirt werden. Indem wir also z. B. von der Entfernung zweier Oerter reden, meinen wir den Abstand ihrer Projectionen auf den Meereshorizont, gemessen durch die dazwischen liegende geodätische Linie, also durch einen größten Kreisbogen, wenn man sich die Erde als Kugel vorstellt. Darum werden auch auf den Charten nicht die Entfernungen der Oerter selbst, sondern ihre Projectionen auf den Meereshorizont aufgetragen.

Man muß also durch alle die zu bestimmenden Puncte Normallinien ziehen und die Puncte bemerken und nach ihrer Lage bestimmen, wo diese Normallinien in den Spiegel des Meeres einschneiden. Dieser Grundsatz wird bis in die kleinsten Detailvermessungen, bis zur öconomischen Grundstücksvermessung festgehalten; aber weil diese nur kleine Erdstrecken umfassen, so kann man die Normallinien sämmtlicher Puncte als parallel, und den Theil des Meeresspiegels, worauf das zu messende Stück Land projicirt wird, als eine Ebene ansehen. Demgemäß denkt man sich, wenn XZ (Taf. II. Fig. 11) ein zu messendes Stück Land bedeutet, eine Horizontalebene X′Z′ gelegt und von jedem der zu bestimmenden Puncte A, B, C, D u. s. w. Perpendikel AA′, BB′ u. s. w. auf diese Horizontalebene gefällt. Man hat dann die ganze Sache so anzuseheu, als ob die Messung sich auf die Fußpuncte A′, B′ u. s. w. dieser Perpendikel bezöge, und indem man z. B. von der Entfernung der Puncte A und B redet, meint man die auf den Horizont projicirte Entfernung A′B′. Oder wenn von dem Winkel BCD (Tafel II. Fig. 10) die Rede ist, den zwei Puncte, B und D, auf der Erde an einem dritten Puncte C, mit einander bilden, so meint man den Winkel B′C′D′, den die drei auf den Horizont projicirten Puncte mit einander machen. Diesen Winkel erhält man begreiflich, wenn durch C und

die Puncte B und D zwei Verticalebenen gelegt werden, wo dann die beiden Durchschnittslinien C′ B′ und C′ D′ mit der Horizontalebene den gemeinten Winkel abgeben.

Ueberhaupt ist unter dem Winkel, den zwei Orte, A und B (Taf. II. Fig. 7), der Erde an einem dritten Orte, C, mit einander bilden, der Neigungswinkel der beiden Ebenen zu verstehen, die durch die Verticallinie CK des Ortes C am Scheitel und durch die Orte A und B gelegt werden. Unsere besten winkelmessenden Instrumente sind so eingerichtet, daß sie diesen Neigungswinkel unmittelbar angeben. Wäre die Erde eine vollkommene Kugel, so würden in den durch A und B gerichteten Verticalebenen des Ortes C auch die Verticallinien von A und B liegen, und wenn man noch eine Verticalebene durch A und B legte, so würde man ein sphärisches Dreieck ABC erhalten. Da nun die Abweichung der Erde von einer Kugel nicht beträchtlich ist, so kann man wenigstens ein im Vergleich mit der ganzen Erdoberfläche kleines Dreieck als ein sphärisches betrachten und demgemäß berechnen.

§. 23.

1) Will man nun ein großes Land vermessen, so überspannt man dasselbe mit einem sogenannten Dreiecksnetze, das heißt, mit einer Folge zusammenhängender Dreiecke APB, APC (Taf. II. Fig. 3) u. s. w., bei denen sich jedoch nie zwei Seiten unmittelbar schneiden, in der Weise, wie die Figur es deutlich an die Hand giebt. Jedes Dreieck kann hier als Fortsetzung eines andern angrenzenden betrachtet werden; z. B. das Dreieck APC als Fortsetzung des Dreiecks APB u. s. w. Die Seiten aller dieser Dreiecke, welche aus Gründen, die später auseinandergesetzt werden, möglichst gleichseitig sein müssen und keine Winkel unter 24° oder über 156° enthalten sollen, werden sehr groß genommen, etwa gleich 30000 Toisen und darüber, jedoch nicht gern über 50000 Toisen (nach der Instruction für die topographischen Arbeiten des königl. preuß. Generalstabes nicht unter 15000 und nicht über 25000 preuß. Ruthen). Die Winkelpuncte dieses Netzes heißen Puncte erster Ordnung.

2) Ehe man an die Berechnung dieser Dreiecke denken kann, wird es nöthig, daß man die Länge einer ihrer Seiten nach einem bekannten Längenmaße kennen lerne, was nicht anders, als durch unmittelbares Anlegen des

Maßstabes geschehen kann. Es ist aber unmöglich, eine 30000 bis 50000 Toisen lange Linie unmittelbar zu messen; man muß sich mit Linien von etwa 4000 Toisen Länge begnügen, was bei der Vollkommenheit der jetzigen Winkelinstrumente auch hinreicht. Diese Linie, die Standlinie A B, wird auf einem horizontalen und hinreichend festen Boden gewählt und mit der größten Sorgfalt mit Maßstäben, die auf vorher erbaute Gerüste gelegt werden, gemessen, und dieses ist eine der schwierigsten Operationen der Geodäsie. Eine solche Stand- oder Grundlinie wird, der Prüfung (Verification) halber, entweder mehrmals gemessen, oder man mißt noch eine zweite Linie, die aus jener ersten durch eine Dreiecksverbindung sich berechnen läßt. Die Uebereinstimmung der unmittelbaren Messung der zweiten Linie mit dem durch Berechnung gefundenen Resultate ist ein Kennzeichen der Richtigkeit beider Linienmessungen.

Da nun die Standlinie weit kleiner ist, als die Seiten des Hauptdreiecksnetzes, so muß man nach und nach von der Standlinie aus immer größere Dreiecke zu erhalten suchen; aber dieser Uebergang von kleineren zu größeren Dreiecken darf nur allmählig geschehen.

3) Von jedem Dreiecke werden seine drei Winkel auf das Sorgfältigste mit den vorzüglichsten Instrumenten, z. B. mit dem Reichenbach'schen Repetitionstheodoliten, gemessen. Die Messung geschah sonst, um Fehler, die wegen der schiefen Beleuchtung der Signale entstehen, zu vermeiden, des Nachts, wobei man auf den Puncten, nach denen man zu visiren hatte, helle Lampen mit parabolischen Reflectoren (Reverberen) aufstellte; jetzt aber ist man durch das von Gauß erfundene Heliotrop, welches dem Beobachter mittelst eines Spiegels aus der Ferne Sonnenlicht zuwirft und ihn den reflectirenden Spiegel wie einen Stern erblicken läßt, in den Stand gesetzt, die Winkelmessungen bei Tage und daher mit größerer Bequemlichkeit zu verrichten. Die Erfahrung hat gelehrt, daß man mittelst guter Instrumente die Winkel des Dreiecks so genau messen kann, daß ihre Summe von der wahren Summe um weniger als eine Secunde abweicht. Diese Genauigkeit wird hauptsächlich durch die von T. Mayer d. ä. erfundene Methode des Repetirens oder Multiplicirens erreicht, nach welcher man von dem gemessenen Winkel ein Vielfaches, z. B. ein 15faches,

erhält und daraus durch Division den Winkel selbst ableitet. Man begreift, daß auf diese Weise ein Winkel bis auf einzelne Secunden genau erhalten werden kann, während die Theilung des Kreises, z. B. bei einem Reichenbach'schen Repetitionstheodoliten, ihn unmittelbar nur bis auf 10 Secunden abzulesen gestattet.

4) Da die Dreiecke sphärische sind, so wird ihre Winkelsumme größer als 180° sein. Man nennt bekanntlich den Ueberschuß den sphärischen Exceß. Derselbe beträgt, weil die Dreiecke, der Kleinheit ihrer Seiten wegen, von ebenen wenig abweichen, nur wenige Secunden; indessen muß man ihn doch kennen, theils um die Richtigkeit der gemessenen Winkel zu prüfen, theils um die Dreiecksberechnung so genau, als möglich, zu bewirken. Nun ist bekanntlich, wenn E den sphärischen Exceß, T den Inhalt des Dreiecks und r den Kugelhalbmesser bedeutet, $T = E r^2 \sin 1''$, also $E = \frac{T}{r^2 \sin 1''}$. Ist aber, z. B., im Dreiecke ABG die durch Berechnung des vorhergehenden Dreiecks bekannte Seite AB, so findet man eine zweite Seite AG durch die Formel $AG = \frac{AB \cdot \sin ABG}{\sin AGB}$, und dann die Höhe $GM = AG \cdot \sin GAM$, worauf man auch den Inhalt $T = \frac{AB \times GM}{2}$ berechnen und folglich den sphärischen Exceß ermitteln kann. Obgleich bei dieser Rechnung das sphärische Dreieck ABG als ein ebenes angesehen wird, so giebt sie doch den Inhalt Behufs der Ausmittelung des sphärischen Excesses hinreichend genau. Zieht man nun von der Summe der gemessenen Winkel 180° ab, so muß der Rest dem so berechneten sphärischen Excesse gleich sein, wenn die Winkel richtig gemessen sind. Freilich können sich auch die Fehler bei der Addition gegenseitig aufheben, und die Probe durch den sphärischen Exceß ist daher nicht absolut sicher.

5) Hat man die gemessenen Winkel durch den sphärischen Exceß geprüft und den sich etwa ergebenden Fehler ihrer Summe auf jeden einzelnen gleich vertheilt, so wird zur Berechnung des Dreiecks geschritten. Da man zuerst mit dem Dreiecke beginnt, dessen eine Seite die Standlinie bildet, und von da immer zu einem anliegenden Dreiecke übergeht, so kennt man von jedem zu be-

rechnenden Dreiecke eine Seite und seine drei Winkel, und man kann also nach dem Satze der sphärischen Trigonometrie, daß sich die Sinus der Seiten, wie die Sinus ihrer Gegenwinkel verhalten, die beiden andern Seiten berechnen. Indessen lassen sich solche Dreiecke, bei denen der sphärische Exceß nur gering ist, ganz wie ebene behandeln, wenn man von jedem Winkel $\frac{1}{3}$ des sphärischen Excesses abzieht. Nachdem man also alle drei Winkel auf diese Weise reducirt hat, rechnet man nach dem Satze der ebenen Trigonometrie, daß sich die Seiten wie die Sinus ihrer Gegenwinkel verhalten.

6) Hierdurch wird nun zwar die gegenseitige Lage aller Netzpuncte, nicht aber ihrer Lage auf der Erde bekannt. Zu dem Ende muß die Länge und Breite eines Punctes P, welcher gewöhnlich eine Sternwarte ist, sowie das Azimuth FPS eines zweiten Punctes F ausgemittelt werden, woraus sich sodann die geographische Lage aller übrigen Dreieckspuncte herleiten läßt. Nach §. 20 kann man nämlich hieraus Länge und Breite des Ortes F und das Azimuth von P in F berechnen, woher sich der Winkel N'FP der Seite PF gegen den Meridian von F ergiebt. Da man aber auch den Winkel PFB kennt, so folgt hieraus das Azimuth S'FB des Ortes B in F, und man kann folglich auch die geographische Lage von B berechnen u. s. w.

7) Durch das Netz erster Ordnung hat man nun Hauptanhaltepuncte für die ganze Vermessung gewonnen; ihre Zahl ist aber noch nicht hinreichend, die Detailvermessung daran zu knüpfen. Deßwegen schließt man an die Dreiecke erster Ordnung noch andere kleinere Dreiecke, die Dreiecke zweiter Ordnung, an, wie Dea, ePg. Die Seiten dieser Dreiecke betragen im Allgemeinen nicht über den vierten Theil einer Dreiecksseite erster Ordnung; auch hängt man mehre Dreiecke aneinander, wenn es erforderlich wird; doch ist ein Aneinanderreihen vieler Dreiecke weder nöthig, noch statthaft. Die Dreiecke zweiter Ordnung werden, ohne Berücksichtigung des sphärischen Excesses, wie ebene berechnet; die Berechnung der Länge, der Breite und des Azimuths wird zwar im Allgemeinen nach denselben Grundsätzen geführt, die wir bereits erklärt haben, doch können die Rechnungen, wegen der Kleinheit der Dreiecksseiten zweiter Ordnung, bedeutend abgekürzt werden, was wir hier nicht weiter auseinandersetzen wollen.

An die Dreiecke zweiter Ordnung schließen sich wieder Dreiecke **dritter** Ordnung an, welche sich von ersteren nur dadurch unterscheiden, daß sie nicht weiter zur Bestimmung neuer Dreiecke dienen. Jedes Dreieck zweiter Ordnung also, welches unter mehren seines Gleichen die Reihe beschließt, wird ein Dreieck dritter Ordnung. Auf diese Weise kann man ein Land mit so viel Puncten überspinnen, daß man eine Detailvermessung daran knüpfen kann. Man kann etwa auf eine Quadratmeile drei Puncte rechnen.

8) Häufig ereignet sich bei Winkelmessungen der Fall, daß man das Instrument nicht am Scheitelpuncte C eines Winkels ACB (Taf. II. Fig. 8) aufstellen kann, sondern genöthigt ist, dasselbe seitwärts in c zu bringen. In diesem Falle erhält man den Winkel AcB, statt des wahren ACB. Um diesen aus jenem abzuleiten, d. h., den gemessenen Winkel **auf das Centrum zu reduciren**, muß man noch den Winkel $CcA = \varphi$ und den Abstand $cC = d$ messen. Zieht man die Perpendikel $Cm = x$ und $Cn = y$ und bezeichnet die Winkel ACB und AcB kurz mit C und c, so hat man $Cm = x = d \sin \varphi$, $Cn = y = d \sin (c + \varphi)$, und $\sin CAm = \sin A = \frac{x}{a}$, $\sin CBn = \sin B = \frac{y}{b}$, wenn wir nämlich $CA = a$, $CB = b$ setzen. Da nun $C + A = c + B$, so folgt
$$C = c + B - A = c + \frac{d \sin (\varphi + c)}{b \sin 1''} - \frac{d \sin \varphi}{a \sin 1''},$$
indem man nämlich den Sinus der Winkel A und B mit den Bögen verwechselt. Man vergleiche hierüber Capitel 5, § 80. Die Werthe von a und b verschafft man sich dadurch, daß man das Dreieck ACB so berechnet, als ob Winkel $C = c$ wäre.

§. 24.

Wir haben nun ferner zu zeigen, wie an das trigonometrische Netz die Detailmessung anzuknüpfen ist. Hierzu ist es nöthig, daß man das ganze Land in Abtheilungen zerlege, was auf verschiedene Weise geschehen kann. Nach der Instruction für die topographischen Arbeiten des k. preuß. Generalstabes werden die Abtheilungen durch Meridiane und Parallelkreise construirt. Man denke sich zwei Meridiane NAS und NBS (Taf. II. Fig. 5),

deren Längenunterschied 1° beträgt; man ziehe ferner in 1° Abstand von einander zwei Parallelkreise U V und U′V′, so entsteht die Figur ABCD, welche eine **Gradabtheilung** genannt wird. Auf diese Weise wird das ganze zu messende Land in eine zusammenhängende Schichtung von Gradabtheilungen zerlegt. Die durch die Parallelkreise gebildeten Seiten AB und DC theilt man jede in 6, die durch die Meridiane gebildeten Seiten AD und BC jede aber wieder in 10 gleiche Theile, wodurch die Gradabtheilung in 60 Unterabtheilungen zerfällt, welche **Blätter** heißen. Also sind weder die Gradabtheilungen unter verschiedenen Breiten, noch die Blätter einander gleich, aber jedes Blatt umfaßt 6 Minuten der Breite und 10 Minuten der Länge.

Die Figur eines Blattes wird nun auf den Meßtisch getragen, welcher dasjenige Instrument ist, welches sich zur Aufnahme des Details, nämlich der Flüsse, Berge, Wege, Wälder, Gebäude u. s. w. am besten eignet. Der Maßstab der Aufnahme ist $\frac{1}{25000}$ der wahren Länge. Um das Blatt richtig aufzuzeichnen, muß man die Peripherien der Parallelkreise, sowie die Länge des Breitengrades berechnen, wovon seine Seiten Theile sind. Man setze z. B., es sei ABCD das Blatt, und seine Grundlinie AB liege unter 45° der Breite, so ist die Breite der Seite DC 45° 6′, weil nämlich die Seite AD = BC 6 Minuten vom Meridian umfaßt. Ein Meridiangrad unter 45° Polhöhe ist aber (nach §. 19, 2) =

$$\frac{A\,(1-\varepsilon^2)\,\pi}{180^\circ\left(1-\varepsilon^2\,(\sin 45^\circ)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 57007 \text{ Toisen, davon der}$$

zehnte Theil 5700,7 Toisen beträgt, und dieses ist die Seite AD = BC des Blattes. Der halbe Umfang des Parallelkreises unter 45° Breite ist $= \frac{A \cos 45^\circ\ \pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\,(\sin 45^\circ)^2}}$ (§. 19, 1) = 7281073 Toisen, also beträgt 1° dieses Parallels 40450 Toisen, und hiervon der sechste Theil, oder ein Bogen von 10′, 6742 Toisen. Dieses ist also die Länge der Grundlinie des Blattes. Eben so findet man durch Berechnung der Peripherie des 6′ nördlicher liegenden Parallels U′ V′ die Seite DC, die ebenfalls 6′ im Bogen umfaßt, = 6730 Toisen. Der Unterschied

zwischen der Grundlinie und ihrer Parallele beträgt also 12 Toisen.

Alle Dimensionen des Blattes sind nun mit $\frac{1}{25000} = \frac{4}{100000}$ zu multipliciren, wenn man die Dimensionen des auf dem Papiere darzustellenden verjüngten Blattes haben will. Die Höhe wird also = 0,228028 Toisen = 197,02 Linien, die Grundlinie = 233,00 Linien, und ihre Parallele 232,59 Linien. Man zieht also auf dem Meßtischblatte eine Linie AB (Taf. II. Fig. 9), der Grundlinie (233''',00) gleich, halbirt sie in E, errichtet hier das Perpendikel EF und macht es der Höhe (197''',02) gleich. Durch F zieht man wieder ein Perpendikel DC und nimmt DF = CF = der halben Parallele (= 116''',29). Zieht man endlich DA und CB, so ist ABCD das verlangte Blatt.

Hier sollten nun zwar die Seiten AD und BC der Höhe EF gleich sein, weil die Theile der Meridiane zwischen zwei Parallelkreisen DC und AB gleich sind; allein der Unterschied hat für den gewählten Maßstab keine practische Bedeutsamkeit mehr. Es ist nämlich, wenn man DG senkrecht auf AB zieht, $AD = \sqrt{DG^2 + AG^2} = DG + \frac{AG^2}{2 \cdot DG}$*), also $AD - DG = AD - EF = \frac{AG^2}{2 \cdot DG}$. Nun ist AG der halbe Unterschied zwischen AB und DC, also AG = 0''',21, und daher $AD - EF = \frac{(0,21)^2}{2 \times 197,02} = 0''',0001$, was dem Auge nicht mehr wahrnehmbar ist.

Es könnte noch ein Zweifel daher entstehen, daß die Meridiane und Parallelkreise sich rechtwinklig durchschneiden, das Blatt aber offenbar schiefe Winkel hat; allein hierdurch gerade wird die Sache richtig; denn sobald man den zwischen den Puncten A, B, C, D gelegenen Erdtheil zum Gegenstande der Messung macht, zieht man nicht die Parallelkreise AB und CD, sondern statt deren größte Kreise, in deren Ebenen die Messung von A

*) Sofern man $\sqrt{a + x}$ näherungsweise $= \sqrt{a} + \frac{x}{2\sqrt{a}}$ setzen kann.

nach B und von D nach C geschieht. Diese größten Kreise bilden aber mit den Meridianen A D und B C gerade die Winkel des Blattes, und die Abweichungen der Parallelkreisbögen A B und D C von den durch eben diese Puncte gezogenen größten Kreisbögen sind practisch unbedeutsam*).

---

*) Bezeichnet man die geographische Breite A M des Parallels U V mit β (Taf. II. Fig. 5), so ist sein Halbmesser $=$ R $\cos\beta$, die Erde als Kugel vom Halbmesser R betrachtet. Ist ferner der Bogen A B $= \varphi$ Secunden, so ist seine wahre Länge $= R \cos\beta \,.\, \varphi \sin 1''$.

Durch A und B ziehe man einen größten Kreis, so kennt man in dem gleichschenklichen sphärischen Dreiecke A B N die Schenkel N A und N B $= 90^0 - \beta$ und den eingeschlossenen Winkel A N B $= \varphi$. Zieht man also N m auf A B senkrecht, so hat man im rechtwinkligen Dreieck A m N die Hypotenuse A N $= 90^0 - \beta$ und den Winkel A N m $= \frac{1}{2}\varphi$. Bezeichnen wir aber den größten Kreisbogen A B mit c, so hat man, wegen $\sin Am = \sin NA \,.\, \sin ANm$, $\sin \frac{1}{2} c = \cos\beta \sin \frac{1}{2}\varphi$, also $\frac{1}{2} c = \text{arc}\,(\sin = \cos\beta \sin\frac{1}{2}\varphi) = \cos\beta \sin\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{6}\cos\beta^3 \sin\frac{1}{2}\varphi^3 \ldots\ldots$, nach der bekannten Reihe, welche den Bogen durch seinen Sinus ausdrückt. Statt $\sin\frac{1}{2}\varphi^3$ setzen wir hier $(\frac{1}{2}\varphi \sin 1'')^3$, und statt $\sin\frac{1}{2}\varphi$ die Reihe $\frac{1}{2}\varphi \sin 1'' - \frac{1}{6}(\frac{1}{2}\varphi \sin 1'')^3$, daß also $c \,.\, \sin 1'' = \varphi \,.\, \sin 1'' \,.\, \cos\beta - \frac{1}{24}\varphi^3 (\sin 1'')^3 \cos\beta \,.\, (1 - \cos\beta^2) = \varphi \cos\beta \sin 1'' - \frac{1}{24}\varphi^3 \cos\beta \sin\beta^2 (\sin 1'')^3$. Multiplicirt man diesen Ausdruck für $c \sin 1''$ noch mit dem Halbmesser R, so erhält man die Länge des größten Kreisbogens $AB = R\varphi \cos\beta \sin 1'' - \frac{1}{24} R \varphi^3 \cos\beta \sin\beta^2 (\sin 1'')^3$. Da nun der Parallelkreisbogen $AB = R\varphi \cos\beta \sin 1''$ ist, so ist dieser um $\frac{1}{24} R \varphi^3 \cos\beta \sin\beta^2 (\sin 1'')^3$ länger als jener. Da hier $\varphi = 10' = 600''$, so beträgt dieser Unterschied $0{,}003350 \sin\beta^2 \cos\beta$ Toisen und ist also unbedeutend.

Den Winkel N A m des Dreiecks N A m hat man durch die Gleichung $\text{tg } NAm = \dfrac{\cot ANm}{\cos AN} = \dfrac{\cot\frac{1}{2}\varphi}{\sin\beta}$. Bezeichnen wir aber den Unterschied dieses Winkels von 90^0 mit d, so ist $\text{tg } NAm = \text{tg}(90^0 - d) = \cot d = \dfrac{\cot\frac{1}{2}\varphi}{\sin\beta}$, oder $\text{tg } d = \text{tg}\,\frac{1}{2}\varphi \sin\beta$, wofür wir kurz $d = \frac{1}{2}\varphi \sin\beta$ setzen dürfen. Dieses ist nun genau die Abweichung des Winkels A (Taf. II. Fig. 9) vom Rechten, nämlich d $=$ A D G. Man hat nämlich $AB = R\varphi \cos\beta \sin 1''$, und da der Parallel D C, $6' = \frac{6}{10}\varphi$ Secunden nördlicher liegt, so ist $DC = R \cos(\beta + \frac{6}{10}\varphi) \,.\, \varphi \sin 1''$, also der Unterschied zwischen AB und $DC = R\varphi \sin 1'' \left(\cos\beta - \cos(\beta + \frac{6}{10}\varphi)\right) = 2R\varphi \sin 1'' \sin(\beta + \frac{3}{10}\varphi) \times \sin\frac{3}{10}\varphi$. Hier können wir aber $\frac{3}{10}\varphi \sin 1''$ statt $\sin\frac{3}{10}\varphi$ und $\sin\beta$ statt $\sin(\beta + \frac{3}{10}\varphi)$ setzen, und dadurch erhalten wir $AB - DC = \frac{6}{10} R\varphi^2 (\sin 1'')^2 \,.\, \sin\beta$, also $AG = \frac{1}{2}(AB - DC) = \frac{3}{10} R\varphi^2 \,.\, (\sin 1'')^2 \sin\beta$.

Endlich kommt es nun darauf an, die auf das Blatt fallenden Puncte des trigonometrischen Netzes nach ihrer gegenseitigen Lage richtig aufzutragen. Man bemerke zu dem Ende für's Erste, daß jede Gradabtheilung von einem vollen Grade der Länge und Breite an gerechnet wird; es bilden z. B. der 30. Längengrad und der 45. Breitengrad eine solche Abtheilung. Von einem jeden Blatte kennt man also genau die Längen und Breiten seiner vier Eckpuncte, und da man auch die Länge und Breite eines jeden Netzpunctes kennt, so kann man denselben hiernach auftragen. Es sei z. B. das Blatt A B C D das vierte in der Richtung der östlichen Länge und das fünfte in der Richtung der nördlichen Breite in der Abtheilung des 30. Längen- und 45. Breitengrades, so ist die Länge der Puncte A und D $= 30^0\ 30'$, der Puncte B und C $30^0\ 40'$; ferner die Breite der Puncte A und B $45^0\ 24'$, der Puncte D und C $45^0\ 30'$. Ein Netzpunct also, dessen Länge $30^0\ 35'\ 26'',4$ und dessen Breite $45^0\ 27'\ 38'',7$ beträgt, muß auf dieses Blatt fallen, und zwar $5'\ 26'',4 = 326'',4$ östlicher, als A oder D, und $3'\ 38'',7 = 218'',7$ nördlicher, als A oder B. Man kann hiernach die Abstände der Puncte m und n von D und A berechnen, in welchen der durch den aufzutragenden Punct p gezogene Meridian die Parallelkreise D C und A B schneidet; da nämlich A B sowohl, als D C, $10' = 600''$ umfassen, und A n und D m beide $326'',4$, so ist $A\,n = \frac{326{,}4}{600}\,A\,B$, $D\,m = \frac{326{,}4}{600}\,D\,C$. Nachdem man die Linie m n gezogen, welche $6' = 360''$ umfaßt, berechnet man $n\,p = \frac{218{,}7}{360}\,m\,n$ und erhält hiermit den Punct p.

Das Blatt kann nun durch seine Ausdehnung hindurch als eben angesehen und an die aufgetragenen Netzpuncte die Detailmessung geschlossen werden. Wie diese zu verrichten ist, zeigt der spätere Vortrag unseres Lehrbuchs.

Nun ist D G, als Meridianbogen von 6′ oder $\frac{6}{10}\,\varphi$ Secunden, $= \frac{6}{10}\,R\,\varphi \sin 1''$, daher $\operatorname{tg} A D G = \frac{A G}{D G} = \frac{1}{2}\,\varphi \sin 1'' \sin \beta$, also $A D G = \frac{1}{2}\,\varphi \sin \beta$, und dieses ist genau der Winkel d.)

§. 25.

1) Die im vorigen §. erklärte Zerlegungsmethode ist also, wie man sieht, eine bis in's Detail fortgesetzte geographische Ortsbestimmung; bequemer scheint indessen folgende Methode zu sein, bei welcher man zum Behufe der Detailmessung von der geographischen Ortsbestimmung abweicht, und die man bei den vorzüglichsten Catastralvermessungen angewendet hat.

Ein großes Land, bei welchem die Krümmung der Erde von merklichem Einflusse sein würde, theilt man in kleinere Theile, etwa nach Provinzen, ab; aber die Verbindung dieser Theile wird durch ein großes trigonometrisches Netz hergestellt, von welchem in jede Provinz einige Puncte fallen. Dieses ist das Netz erster Ordnung, und hieran schließt sich wieder ein zweites und drittes, damit auf einen bestimmten kleinern Raum, z. B. auf eine Quadratmeile, wenigstens drei trigonometrisch bestimmte Puncte zu liegen kommen. Die gegenseitige Lage aller dieser Puncte mag immerhin geographisch bestimmt werden, allein Behufs der Aufnahme des Details in jeder Provinz wird eine andere Einrichtung getroffen.

Durch einen beinahe in der Mitte der Provinz befindlichen Netzpunct P (Taf. II. Fig. 4) wird ein Meridian NS und auf diesen ein Perpendikel TU gezogen, und dann wird das zu messende Land durch Parallelen mit dem Meridiane und seinem Perpendikel in lauter Quadrate von gleicher Größe, z. B. in Quadratmeilen, zerlegt. Die Lage eines jeden Netzpunctes A wird nun durch seine senkrechten Abstände (Coordinaten) AL und AM vom Meridiane und seinem Perpendikel angegeben, wofür man begreiflich auch seine Abstände Al und Am von den Seiten des Quadrats, in welchem er liegt, substituiren kann.

Nach dem im Kaiserthume Oesterreich beobachteten Verfahren bildet jede Quadratmeile ein Meßtischblatt zur Aufnahme des sogenannten graphischen Netzes, welches nicht mehr durch Rechnung, wie das trigonometrische, sondern durch Construction der Dreiecke auf dem Meßtischblatte zu Stande gebracht wird. Der Maßstab, nach welchem die Quadratmeile (4000 Wiener Klaftern Seitenlänge) aufgetragen wird, ist $\frac{1}{14400}$ der wirklichen

Größe, und es hat also ein solches Meßtischquadrat 20 Wiener Zoll Seitenlänge. Die darauf fallenden 3 oder 4 trigonometrischen Puncte werden mittelst ihrer senkrechten Abstände von den Seiten des Quadrats auf das Sorgfältigste aufgetragen. Jede Quadratmeile wird nun wieder von Norden nach Süden in 4, von Osten nach Westen in 5 gleiche Schichten getheilt, wodurch sie in 20 Rechtecke zerfällt, von denen jedes, im Maßstabe $\frac{1}{2880}$ der wirklichen Größe aufgetragen, ein Meßtischblatt zur Aufnahme des Details bildet. Der Zweck des graphischen Netzes ist der, daß man auf jedem Meßtischblatte wenigstens 3 und also in jeder Quadratmeile wenigstens 60 schickliche Puncte bestimme, um daran die Datailmessung zu knüpfen. Als Anfangspuncte für dieses graphische Netz dienen die aufgetragenen trigonometrischen Puncte.

Nach dem im Königreiche Würtemberg beobachteten Verfahren werden die Parallelen des Meridians und seines Perpendikels enger, nämlich in einem Abstande von 4000 Fuß, gezogen. Der Centralpunct für die ganze Vermessung ist die Sternwarte zu Tübingen, an deren astronomisch-geographische Ortsbestimmung sich die Bestimmung aller übrigen Puncte durch ein Dreiecksnetz anschließt. Das ganze Land wird durch Parallelen des Tübinger Meridians und seines Perpendikels in Quadrate von 4000 Fuß Seitenlänge zerlegt, und jedes solches Quadrat bildet, im Maßstabe von $\frac{1}{2500}$ der wirklichen Größe, ein Meßtischblatt zur Aufnahme des Details. Die Häufung der trigonometrischen Puncte ist, nach Legung des Netzes erster Ordnung, so groß, daß auf jedes Meßtischblatt eine hinreichende Anzahl fallen, um darauf die Detailmessung unmittelbar gründen und das graphische Netz umgehen zu können. Wo dieses nicht möglich ist, sollen vier Meßtischblätter zu einem einzigen im Maßstabe $\frac{1}{5000}$ der wirklichen Größe vereinigt werden, um auf die darauf fallenden trigonometrischen Puncte ein graphisches Netz zu gründen.

2) Um die Abstände eines jeden Punctes vom Meridiane und seinem Perpendikel berechnen zu können, muß man das Azimuth **APN** (Taf. **II**. Fig. 4) irgend eines

Netzpunctes A kennen. Da durch die Dreiecksberechnung auch der Abstand P A gegeben ist, so hat man A L = PM = AP · sin APN und AM = PL = AP · cos APN. Hieraus ergeben sich auch die Abstände Al und Am von den Seiten des Quadrats, worin der Punct A liegt, da die Abstände der Parallelen xy und vw vom Meridiane und seinem Perpendikel bekannt sind. Will man weiter den Punct B bestimmen, so ist durch das Dreiecksnetz der Winkel P A B und die Distanz B A bekannt, und da man wegen des bekannten Azimuths von A den Winkel P A M = A P N weiß, so ergiebt sich auch der Winkel B A r, und man kann in dem rechtwinkeligen Dreiecke BAr die Seiten Ar und Br berechnen, da dann der Abstand B q = r M = A M — A r und Bq = B r + r q = B r + A L ist. Auf ähnliche Weise ergiebt sich die Bestimmung für jeden andern Punct, da sich aus den Winkeln der Dreiecke die Winkel, welche eine jede Seite mit den Coordinaten ihrer Endpuncte bildet, von selbst ergeben.

3) Diese sehr leichten Rechnungen setzen den ganzen Theil der Erde, über welche sich die nach Parallelen des Meridians und seines Perpendikels geregelte Messung erstreckt, als eine Ebene voraus. Betrachtet man die Erde als eine Kugel, so ist, ohne Widerrede, der Meridian **NS** des Centralpunctes **P** ein größter Kreis, und sein Perpendikel **TU** gleichfalls ein solcher; aber was sind die Parallelen zum Meridiane und seinem Perpendikel? Ohne uns hier auf verschiedene Constructionsweisen und Prüfung derselben einzulassen, was für unseren gegenwärtigen Zweck zu weit führen würde, bemerken wir, daß es nicht ungeeignet scheint, das ganze zu messende Stück Land auf die Ebene zu projiciren, welche die Erdoberfläche im Centralpuncte P berührt, und zu diesem Zwecke das Auge auf den durch den Centralpunct gehenden Erdhalbmesser in eine Entfernung zu setzen, die dem Dreifachen dieses Halbmessers gleich ist. Ist nämlich A′ P B′ (Taf. III. Fig. 1) die Berührungsebene und K P der Halbmesser des Centralpunctes, so steht dieser bekanntlich auf jener Ebene senkrecht; nimmt man ferner auf der Verlängerung von K P den Punct L so, daß P L drei Erdhalbmessern gleich ist, und zieht man durch L und einen beliebigen Punct A des zu messenden Landes eine gerade Linie LA, so schneidet diese die Berührungsebene in dem Puncte

A′, welcher die Projection von A ist. Auf diese Weise wird das ganze zu messende Land auf der Berührungsebene mit einer Genauigkeit dargestellt, die in jeder practischen Rücksicht nichts zu wünschen übrig läßt. Zunächst sind nämlich die Projectionen aller Linien, deren Richtung durch den Centralpunct P geht, ihrem Urbilde gleich, z. B., der Bogen PA seiner Projection PA′, und wenn die Richtungen der Linien nicht durch den Centralpunct gehen, wie, z. B., die Linie AB, deren Projection A′B′ ist, so ist der Unterschied zwischen Projection und Urbild sehr klein und beträgt im Maximo, selbst in einem Abstande von 21 geographischen Meilen vom Centralpuncte, etwa nur $\frac{1}{10000}$ der ganzen Länge, so daß, wenn, z. B, AB eine Meile betrüge, ihre Projection A′B′ nur um 2 Fuß größer sein würde*). Freilich ist die Projection von AB

---

*) Setzt man den Winkel PKA $= \alpha$ und den Erdhalbmesser KP $=$ r, so ist der größte Kreisbogen PA $= r\,\alpha$, wenn α in Theilen des Halbmessers 1 genommen wird. Da ferner LK $= 2$ r, also LP $= 3$ r ist, so hat man, wenn man den Winkel A′LP $=$ x setzt, PA′ $= 3\,r\,.\,tg\,x$. Im Dreiecke AKL hat man aber aus den Seiten KA $=$ r, KL $=$ 2r und dem Winkel AKL $= 180^\circ - \alpha$ nach der bekannten Formel $tg\,x = \frac{r \sin\alpha}{2r + r\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{2 + \cos\alpha}$, oder wenn man $\alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{120}\alpha^5$ statt $\sin\alpha$ und $1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{24}\alpha^4$ statt $\cos\alpha$ setzt: $tg\,x = \frac{\alpha(1 - \frac{1}{6}\alpha^2 + \frac{1}{120}\alpha^4)}{3 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{24}\alpha^4}$, woraus man mittelst der gewöhnlichen Division $tg\,x = \frac{1}{3}\alpha\left(1 - \frac{1}{180}\alpha^4\right)$ findet. Demnach $PA' = 3\,r\,.\,tg\,x = r\,\alpha\left(1 - \frac{1}{180}\alpha^4\right)$. Der noch Statt findende Unterschied zwischen dem Bogen PA $= r\,\alpha$ und seiner Projection ist also $= \frac{r\,\alpha^5}{180}$ und muß daher sehr klein sein, wenn α keinen großen Werth hat. Nehmen wir für r den Halbmesser des Aequators an, so beträgt dieser Unterschied bei einem Bogen von $3^\circ\ 33'\ 10''$, das heißt, bei einer Länge von mehr als 53 Meilen, erst 1 Par. Fuß.

Um den Unterschied zwischen dem Bogen AB und seiner Projection A′B′ zu finden, setzen wir AB $= \delta$, A′B′ $= \Delta$, den Bogen PA, in Längenmaße ausgedrückt, $= \alpha$, PB $= \beta$, und den sphärischen Winkel APB, welcher mit dem ebenen A′PB′ einerlei ist, $=$ P. Da nun PA′ und PB′ mit den Bögen PA und PB gleiche Größe haben, so hat man im Dreiecke A′PB′

$$\Delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\,\alpha\beta\cos P.$$

Ist dann der sphärische Exceß des Kugeldreiecks APB $=$ E, so können wir bekanntlich dieses kleine Dreieck wie ein ebenes berech-

nicht genau eine gerade Linie, da nicht alle von L durch die Puncte des größten Kreisbogens AB gezogene Linien in eine Ebene fallen können, allein die Abweichung von der geraden Linie ist ohne practische Bedeutsamkeit.

Wenn man also ein Land, dessen Ausdehnung vom Centralpuncte aus nicht über 15 bis 20 Meilen geht, auf die vorgeschriebene Weise projicirt, so findet zwischen den kleineren Theilen der Projection und ihren Urbildern eine solche Aehnlichkeit Statt, daß die noch vorhandenen Differenzen die genaueste Detailmessung nicht im mindesten hindern können. Der Meridian und sein Perpendikel er-

---

nen, wenn man jeden seiner Winkel um $\frac{1}{3}$ E vermindert. Man hat daher $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos(P - \frac{1}{3}E)$. Nun ist $\cos(P - \frac{1}{3}E) = \cos P \cos \frac{1}{3}E + \sin P \sin \frac{1}{3}E$, und da E sehr klein ist, so kann man $\cos \frac{1}{3}E = 1$, $\sin \frac{1}{3}E = \frac{1}{3}E$ setzen, wodurch $\cos(P - \frac{1}{3}E) = \cos P + \frac{1}{3}E \sin P$ gefunden wird. Folglich ist $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos P - \frac{2}{3}\alpha\beta E \sin P = \Delta^2 - \frac{2}{3}\alpha\beta E \sin P$, und daher $\Delta^2 = \delta^2 + \frac{2}{3}\alpha\beta E \sin P$. Fällen wir von A auf PB das Perpendikel AM, so ist $AM = \alpha \sin P$, folglich der Inhalt des Dreiecks
$APB = \frac{PB \times AM}{2} = \frac{\alpha\beta \sin P}{2}$ und sein sphärischer Exceß
$= E = \frac{\alpha\beta\sin P}{2r^2}$, woraus folgt $\alpha\beta = \frac{2r^2E}{\sin P}$, und daher $\Delta^2 = \delta^2 + \frac{4}{3}r^2E^2$. Drücken wir aber nunmehr den sphärischen Exceß durch die Seiten PA und AB und den eingeschlossenen Winkel $PAB = u$ aus, so haben wir auf ähnliche Art, wie vorhin,
$E = \frac{\alpha\delta \sin u}{2r^2}$ und $E^2 = \frac{\alpha^2\delta^2\sin u^2}{4r^2}$, woraus folgt $\Delta^2 = \delta^2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{\alpha^2}{r^2}\delta^2 \sin u^2 = \delta^2\left(1 + \frac{\alpha^2}{3r^2}\sin u^2\right)$ und mithin, wenn wir näherungsweise $\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{3r^2}\sin u^2} = 1 + \frac{\alpha^2}{6r^2}\sin u^2$ setzen:

$$\Delta = \delta\left(1 + \frac{\alpha}{6r^2}\sin u^2\right).$$

Hier ist nun $\alpha \sin u$ das von P auf AB gezogene Perpendikel, oder der senkrechte Abstand des Bogens AB vom Centralpuncte P. Bezeichnen wir diesen mit h, so ist

$$\Delta = \delta\left(1 + \frac{h^2}{6r^2}\right).$$

Nehmen wir hier für r den Halbmesser des Aequators und h = 21 Meilen = 79949 Toisen, so finden wir $\Delta = \delta\left(1 + \frac{1}{10050}\right)$, daß also Δ nur um den 10050. Theil von δ unterschieden ist. Nimmt man h nur halb so groß, so beträgt jener Unterschied nur $\frac{1}{40200}$.

scheinen in der Projection als gerade Linien, und wenn man durch Parallelen die Projection in Quadrate, z. B. in Quadratmeilen theilt, so entspricht jedem solchen Quadrate auf der wirklichen Erdfläche eine vierseitige Figur, die von ihm nur um practisch unbedeutende, für den Maßstab der Aufnahme gar nicht darstellbare Differenzen unterschieden ist. Die in die Quadrate hineingemessenen Details werden daher auch eben so genau aneinander passen. Die Linien der Erdoberfläche, welche den Parallelen des Meridians und seines Perpendikels in der Projection entsprechen, sind begreiflich Kugelkreise, deren Ebenen durch den Punct gehen, wohin zur Construction der Projection das Auge gesetzt wurde; sie gehen also nicht durch den Kugelmittelpunct und sind keine größten Kreisbögen, aber sie weichen von solchen nur um practisch unbedeutende Differenzen ab.

Um aber die richtige Lage der projicirten Puncte zu erhalten, darf man nicht die Rechnung nach Nr. 2 führen, sondern man muß mit Berücksichtigung der Krümmung der Erde so verfahren: Es sei (in Taf. II., Fig. 4) A ein Punct, dessen sphärischer Winkel APN $= \tau$ mit dem Meridiane und dessen Bogenabstand AP $=$ d vom Centralpuncte P bekannt ist. In der Projection ist aber die projicirte Linie AP nicht nur ihrem Urbilde gleich, sondern sie bildet auch mit dem projicirten Meridiane denselben Winkel; man hat daher den Abstand AL des projicirten Punctes A vom projicirten Meridiane $=$ d sin τ, und seinen Abstand AM vom projicirten Perpendikel d cos τ.

Für jeden andern Punct C kommt es also nur darauf an, seinen Abstand CP vom Centralpuncte, d. h., den zwischen C und P gezogenen größten Kreisbogen, nebst seinem Azimuth CPN, zu kennen, was durch die berechneten Seiten und Winkel des Dreiecksnetzes möglich wird. Da nämlich die Winkel CAB und BAP wirklich gemessen und die Abstände AC und AP berechnet sind, so kennt man im Dreieck CAP zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel und kann folglich auch die beiden anderen Winkel ACP und APC und die dritte Seite PC finden. Die Rechnung ist nach den bekannten Formeln der ebenen Trigonometrie, nur mit Rücksicht auf den sphärischen Exceß des Dreiecks ACP zu führen. Diesen wird man also nach der früher gegebenen Anleitung zuerst suchen, den dritten Theil desselben vom Winkel CAP ab-

ziehen und mit dem so erhaltenen Winkel und den Seiten AC und AB das Dreieck ACP wie ein ebenes berechnen. Hierdurch wird der Abstand CP richtig gefunden, aber zu jedem der berechneten Winkel ACP und APC muß man noch $\frac{1}{3}$ des sphärischen Excesses addiren, um die wahren sphärischen Winkel zu erhalten. Aus den Winkeln APN und CPA weiß man CPN, und man kann folglich die Coordinaten der Projection von C wie vorhin berechnen.

Von C kann man zu einem folgenden Puncte E übergehen, denn da die Winkel ECB, BCA und PCA bekannt sind, so weiß man auch ECP und kennt folglich im Dreieck ECP zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, daher die Rechnung wie vorhin zu führen ist.

4) Fragen wir nun, welche von den beiden hier erklärten Vermessungsmethoden den Vorzug verdient, so müssen wir Folgendes überlegen: Die erste Methode, welche das Land nach Gradabtheilungen mißt, hat den Vorzug, daß sie ohne Unterbrechung ihre Messungen über die ganze Erde erstrecken kann, und jedes ihrer Blätter giebt durch seine Seiten die Richtung nach dem Nordpole an; allein wenn man sich mit dem Vorzug einer größern Genauigkeit schmeichelt, so hat man, nach meiner Meinung, Unrecht. Zwar passen die einzelnen Sectionen oder Blätter gut aneinander, weil ihre Construction nur ideal, d. h., von aller Messung unabhängig ist; ob aber diese Blätter noch genau aneinander schließen, wenn die Details hineingemessen sind, ist eine andere Frage. Wie leicht kann nicht, z. B., die Polhöhe eines Netzpunctes um 1″ unrichtig gefunden werden, zumal da die Abplattung der Erde noch im Verhältniß 15 : 16 unsicher ist! Hierdurch würde dieser Punct 95 par. Fuß weiter nord- oder südwärts gerückt, was im Maßstabe von $\frac{1}{25000}$ doch noch 0,67 Linien ausmacht. Höchstens kann also diese Methode für diesen kleinen Maßstab ausführbar sein. Außerdem hat sie aber noch den Nachtheil, daß sie sehr umständliche Rechnungen erfordert.

Die zweite hat zwar den Nachtheil, daß sie nur über einen kleinen Erdtheil ausgedehnt werden kann. Größere Länder müssen daher in kleinere Theile zerlegt und unabhängig voneinander hinsichtlich des Details vermessen werden. Aber diese Detailmessungen werden ungleich

richtiger ausfallen, als nach der ersten Methode, weil sie von aller Hypothese über die Gestalt der Erde unabhängig und nur auf die gewiß richtige Voraussetzung basirt sind, daß man ein kleines Stück der Erdoberfläche als Theil einer Kugelfläche betrachten darf. Diese Methode wird sich also vorzugsweise für solche Vermessungen eignen, die, wie die Catastralvermessungen, nach einem großen Maßstabe ausgeführt werden müssen. Durch ein großes, über das ganze Land gezogenes Netz, dessen Puncte geographisch bestimmt werden, kann man ja immer noch die einzeln vermessenen Landtheile zu einer allgemeinen Charte vereinigen.

§. 26.

Wie aber auch immer eine Vermessung ausgeführt werden mag, so muß sie doch jederzeit von dem Grundsatze geleitet werden, daß man aus dem Großen in's Kleine arbeite, und diesen Grundsatz muß man auch bei Vermessung des kleinsten Erdtheils, ja selbst bei Messung eines kleinen Grundstücks beobachten. Denn man begreift, daß wenn man eine Charte aus den einzelnen Zeichnungen kleiner Theile derselben zusammensetzen wollte, die bei Aufnahme jedes Theils begangenen Fehler sich fortpflanzen und häufen würden, so daß die Zusammensetzung dem Urbilde ganz unähnlich werden müßte. Deßhalb wird erst das große trigonometrische Netz gelegt, bei welchem zwar, indem von der kleinen Standlinie ausgegangen wird, ein Arbeiten aus dem Kleinen in's Große Statt findet; allein diese Arbeit wird auch mit der größten Sorgfalt und den vorzüglichsten Instrumenten vollführt, so daß die hieraus entspringenden Fehler practisch unbedeutend sind. Aber die Anknüpfung der secundären Netzpuncte und jede folgende Operation ist ein Uebergehen vom Großen zum Kleinen. Die Fehler der Dreiecke erster Ordnung können sich daher nicht fortpflanzen, sondern müssen innerhalb des Dreiecks selbst ihre Grenze haben und sich gleichmäßig vertheilen.

§. 27.

1) Wir bemerkten früher, daß man alle Messungen auf den Horizont des Meeres zu reduciren gewohnt sei, und dieses geschieht schon dadurch, daß die gemessene Standlinie auf den Meeresspiegel reducirt wird. Es sei (Ta-

fel II., Fig. 13) Pa die auf einer Ebene gemessene Standlinie $= b$ und $pP = h$ die Erhebung dieser Ebene über den Meereshorizont. Zieht man hier die Erdhalbmesser KP und Ka, so ist der Bogen $pa' = b'$ die reducirte Standlinie Pa. Man hat aber $KP : Kp = Pa : pa'$, d. h., wenn der Erdhalbmesser $Kp = r$ gesetzt wird, $r + h : r = b : b'$, daher $b' = \frac{br}{r + h}$, wofür wir durch Division mit $r + h$ in r die Näherungsformel $b' = b - \frac{bh}{r}$ erhalten.

2) Nun fragt sich aber, wie man die Erhebung eines Ortes über die Meeresfläche finden kann. Es sei daher P (Taf. I., Fig. 1) ein über die Meeresfläche hervorragender Ort, und man setze, daß man von ihm aus da, wo das scheinbare Himmelsgewölbe auf der Erde aufruht, das Meer sehen könne. Zieht man dann eine Linie PV nach der Durchschnittslinie des Himmelsgewölbes mit der Erde, so berührt diese den Meeresspiegel in V und macht mit der Normale VW des Punctes V einen rechten Winkel. Wenn man daher den Winkel ZPV mißt, den die Normale des Ortes P mit der Line PV macht, d. h., die Zenithdistanz von V in P, so kennt man in dem rechtwinklichen Dreieck PWV den Winkel VPW und folglich auch $PWV = \delta$, nebst dem Erdhalbmesser $VW = r$. Man hat dann aber $PW = r \sec \delta$ und daher $PU = r \sec \delta - r = r (\sec \delta - 1) = r \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta$ *).

3) Kann man von einem Orte aus das Meer nicht sehen, so muß man bis dahin Zwischenstationen nehmen, und die Höhenunterschiede aller Stationen nebst der Erhebung der letzten Station über der Meeresfläche ermitteln, woraus sich alsdann auch die Höhe der ersten Station über dem Meere ergiebt.

Um den Höhenunterschied BD zweier Oerter A und B (Taf. II., Fig. 13) zu finden, muß man in B die Ze-

---

*) Es ist nämlich

$$\sec \delta - 1 = \frac{1}{\cos \delta} - 1 = \frac{1 - \cos \delta}{\cos \delta} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \delta^2}{\cos \frac{1}{2} \delta^2 - \sin \frac{1}{2} \delta^2} =$$
$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta^2}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta^2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta.$$

Billiger Weise sollten diese und andere ähnliche Formeln in den Lehrbüchern der Trigonometrie mit aufgeführt sein.

nithdistanz Z′BA von A, und in A die Zenithdistanz ZAB von B beobachten; desgleichen muß auf irgend eine Weise, z. B., durch eine Dreiecksverbindung mit einer gemessenen Standlinie die horizontale Weite AD ermittelt werden. Diesen größten Kreisbogen DA muß man auf die Sehne DA reduciren (§. 18, 1), wenn er merklich von ihr unterschieden wäre. Ist dann der Krümmungshalbmesser der Erde in dieser Gegend $= r$, der Bogen $DA = \triangle$, so ist der Centriwinkel $DKA = \delta = \frac{\triangle}{r \sin 1''}$, und daher jeder der Winkel Z′DA und $ZAD = 90^0 + \frac{1}{2}\delta$. Fand man ferner $ZAB = z$, $ABZ' = z'$, so ist $DBA = 180^0 - z'$, $BAD = 90^0 - z + \frac{1}{2}\delta$. Hierdurch sind nun die sämmtlichen Winkel des Dreiecks DAB bekannt, und man kann folglich mit Hülfe der bekannten Seite DA den Höhenunterschied DB nach den Formeln der ebenen Trigonometrie berechnen. —

Man sieht aber leicht ein, daß hierbei ein Winkel mehr beobachtet wird, als unumgänglich nothwendig ist; denn wenn die Winkel ABD und BDA bekannt sind, so ist es auch BAD, und man brauchte folglich die Zenithdistanz $ZAB = z$ nicht. Indessen wird dieselbe doch mit beobachtet, um den Einfluß der Strahlenbrechung zu beseitigen, welche die Zenithdistanzen verkleinert. Es muß nämlich im Dreieck BAK, $180^0 - z' + 180^0 - z + \delta = 180^0$, d. h., $z + z' = 180^0 + \delta$ sein. Immer aber wird man $z + z' < 180^0 + \delta$ finden, und der Ueberschuß $180^0 + \delta - z - z'$ ist die Wirkung der Strahlenbrechung. Von ihr nimmt man die Hälfte, nämlich $\frac{180^0 + \delta - z - z'}{2}$ und legt sie zu jeder beobachteten Zenithdistanz z und z′ hinzu, um die richtigen Zenithdistanzen zu erhalten. Mehr über die Art, beobachtete Zenithdistanzen wegen der Strahlenbrechung zu corrigiren, sehe man in dem Capitel vom Nivelliren (Cap. 11).

4) Um die Höhe eines Ortes, z. B., einer Bergspitze über einer nicht gar zu weit entfernten Ebene zu finden, ist besonders folgendes Verfahren brauchbar. Auf der Ebene wähle man eine Standlinie AB (Taf. II., Fig. 12) und messe sie. Von der Spitze des Berges denke man sich ein Perpendikel MN auf die Ebene ge-

fällt und messe die Höhenwinkel MAN und MBN, sowie die Azimuthalwinkel NAB und ABN, was mit Hülfe eines Theodoliten leicht geschehen kann. Man kann dann im Dreieck ABN aus der Seite AB und den daran gelegenen Winkeln die Seiten AN und BN, und dann im rechtwinklichen Dreieck MNA aus dem Höhenwinkel bei A und der Seite AN die Höhe MN berechnen; auch läßt sich mittelst des Dreiecks MNB eine zweite Rechnung für MN anstellen. Man erhält auf diese Weise immer die Höhe des Berges über der durch die Standlinie gelegten Horizontalebene, und es ist deßhalb noch eine Correction, und zwar eine Vergrößerung der berechneten Höhe erforderlich, über welche in dem Capitel vom Nivelliren unter der Benennung: „Reduction vom scheinbaren auf den wahren Horizont" nähere Auskunft gegeben wird.

Man hat noch andere, weniger brauchbare Constructionen zu Höhenmessungen, die wir mit gutem Fug übergehen können; wir bemerken nur, daß alle Höhenmessungen der Art, besonders die in 2 und 3 aufgeführten, wegen der Brechung der Lichtstrahlen, wodurch die Zenithdistanzen und die Höhenwinkel fehlerhaft gefunden werden, ziemlich unsicher sind. Von der sogenannten irdischen Strahlenbrechung werden wir später bei Gelegenheit des Nivellirens reden.

5) Eine andere und sehr bequeme Art, Höhenunterschiede und auch Erhebungen über der Meeresfläche zu bestimmen, bietet das Barometer dar. Hierüber werden wir uns in einem spätern Capitel verbreiten.

6) Mitunter wird es Behufs technischer Zwecke, z. B., Bahnanlagen, Röhrenleitungen, Mühlenbauten, nöthig, den Höhenunterschied zweier Oerter sehr genau zu ermitteln, und hierfür ist keins der vorhin angegebenen Mittel geeignet, sondern man muß eine sehr genaue unmittelbare Abmessung der Höhenunterschiede von Zwischenpuncten (Stationen) vornehmen. Dieses Verfahren heißt Nivelliren und ist ebenfalls ein Gegenstand gründlicher Erörterung dieses Lehrbuches.

§. 28.

Der Maßstab, nach welchem man die Charten entwirft, ist verschieden, wie die Absichten, die man mit einer Charte erreichen will. Hat man die Absicht, alle einzelnen Grundstücke einer Flur, selbst die kleinsten Parcellen,

darzustellen, so heißt die Charte eine **Flurcharte**, und für solche ist der zweitausendtheilige Maßstab zu empfehlen, so daß also eine jede Länge auf der Charte $\frac{1}{2000}$ der gleichnamigen auf dem Felde ist. Mitunter ist die Parcellirung so klein, daß selbst dieser Maßstab nicht ausreicht, und dann wird der 1800-, 1500- oder 1000-theilige gewählt, welcher letztere namentlich für die Ortscharten zweckmäßig ist, weil hier schon größere Parcellirungen vorkommen. Nach der Instruction mancher Länder wird ein kleinerer Maßstab gewählt, z. B., in Oesterreich der 2880theilige, in Würtemberg der 2500theilige, in Baiern der 5000theilige (bei der Landes-Catastralvermessung), in Preußen der 5000- und 2500theilige u. s. w. Ist die Parcellirung nicht bedeutend, wie, z. B., bei der Vermessung von Waldungen der Fall ist, so kann man füglich einen kleineren Maßstab wählen.

Die topographischen Charten des k. preuß. Generalstabes werden nach dem 25000theiligen Maßstabe ausgeführt. Man hat damit den Zweck, alle Gewässer, Brükken, Waldungen, Gebäude, Wege, vorzüglich die verschiedenen Neigungswinkel des Erdbodens gegen den Horizont behufs militärischer Operationen dem Auge darzustellen. Mehrer solcher Charten werden wieder zu einer einzigen, nach einem kleinern Maßstabe ausgeführten vereinigt; so können, z. B., die 60 Blätter einer Gradabtheilung nach dem 150000theiligen Maßstabe zu einer einzigen Charte verbunden werden, aber dann werden auch viele Gegenstände aus der Zeichnung ganz wegbleiben müssen, die sich im 25000theiligen Maßstabe noch ausdrükken lassen.

Die Genauigkeit, mit welcher bei einem gegebenen Maßstabe das Resultat der Messung auf der Charte ausgedrückt werden kann, läßt sich jedesmal nach der Genauigkeit beurtheilen, mit welcher kleine Linientheile auf dem Papiere noch darstellbar sind. Da hier eine Länge von $\frac{1}{40}$ par. Linien nicht gut von einem Puncte unterschieden werden kann, und diese Größe nach dem 2000theiligen Maßstabe auf dem Felde 4 Zoll 2 Linien beträgt, so kann man nach diesem Maßstabe alle Dimensionen nur bis auf 4 Zoll genau ausdrücken; es ist also für die Charte ganz gleichgültig, ob eine Linie 4 Zoll zu lang oder zu kurz

gemessen ist, wenn sich der Fehler nur nicht fortpflanzt und anhäuft. Bei'm Gebrauche des 25000theiligen Maßstabes beträgt dieser Fehler schon 4 Fuß 3 Zoll, und er wird überhaupt in demselben Verhältnisse größer, als der Maßstab kleiner wird. Hiernach kann man auch beurtheilen, wie groß ein Gegenstand wenigstens sein muß, um bei einem gegebenen Maßstabe auf der Charte noch genau ausgedrückt werden zu können.

§. 29.

1) Zum Beschlusse dieses Capitels wollen wir noch ein Paar trigonometrische Aufgaben berühren, die bei kleineren Triangulirungen von Nutzen sein können. Bei Netzlegungen werden die Dreiecke erster und zweiter Ordnung so aneinander gereiht, daß sich ihre Seiten nicht durchschneiden, sondern daß jeder Punct als Mittelpunct eines Polygons erscheint. Hierbei kommt immer nur die einfache Berechnung des Dreiecks aus seinen Winkeln und einer Seite vor. — Bei den Dreiecken dritter Ordnung können jedoch auch zwei auf einerlei Seite derselben Grundlinie stehen, wie ePd und ePg (Taf. II., Fig. 3.) Hier entsteht nun die Frage, wie groß der Abstand der Spitzen d und g sein werde, welche Frage mit der Aufgabe einerlei ist: aus einer Standlinie eP die Entfernung zweier Oerter d und g zu bestimmen. — Da man von jedem der Dreiecke ePd und ePg die Winkel gemessen hat, so kann man mit Zuziehung der bekannten Grundlinie eP die übrigen Seiten dieser Dreiecke berechnen. Durch die Winkel deP und geP wird aber auch deg bekannt; man kennt also im Dreieck deg die Seiten ed und eg nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel und kann folglich, nach den bekannten Formeln der ebenen Trigonometrie, auch die dritte Seite dg, sowie die beiden andern Winkel berechnen. Dieselbe Rechnung kann man auch im Dreieck dPg anstellen.

2) Ungleich interessanter ist folgende Aufgabe, die unter dem Namen der Pothenot'schen oder des Problemes der vier Puncte bekannt ist, und die wir in der Folge für den Gebrauch des Meßtisches noch specieller erläutern. Sie heißt: Aus drei ihrer Lage nach auf dem Felde gegebenen Puncten A, B, C (Taf. II., Figur 14) die Lage eines vierten Punctes D zu bestimmen.

Da die Lage der drei Puncte gegeben ist, so sind Seiten und Winkel des Dreiecks ABC gegeben; man bezeichne seine Winkel mit A, B, C und die Gegenseiten mit a, b, c, wie in der Figur angedeutet ist.

Man mißt nun an D die Winkel ADC und BDC, unter welchen die Seiten AC und BC gesehen werden; ihre Summe giebt auch den Winkel ADB an.

Es sei daher $\alpha = BDC$ der Winkel der Seite a, $\beta = ADC$ der Winkel der Seite b, $\gamma = ADB$ der Winkel der Seite c, so ist

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

Offenbar würde nun die Aufgabe gelös't sein, wenn man die Winkel $CAD = \varphi$ und $CBD = \psi$ wüßte. Man hat aber im Dreieck ADC:

$$\sin ADC : \sin DAC = AC : DC,$$

$$\text{d. i. } \sin \beta : \sin \varphi = b : DC,$$

$$\text{daher } DC = \frac{b \sin \varphi}{\sin \beta}.$$

Ferner im Dreieck BDC:

$$\sin CDB : \sin DBC = BC : DC,$$

$$\text{d. i. } \sin \alpha : \sin \psi = a : DC,$$

$$\text{daher } DC = \frac{a \sin \psi}{\sin \alpha}.$$

Setzt man also die beiden Werthe von DC einander gleich, so hat man

$$\frac{b \sin \varphi}{\sin \beta} = \frac{a \sin \psi}{\sin \alpha},$$

woraus folgt $\dfrac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \dfrac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}$.

Subtrahirt man von jeder Seite der Gleichun die 1, so erhält man $\dfrac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \psi} = \dfrac{a \sin \beta - b \sin \alpha}{b \sin \alpha}$; addirt man aber 1 zu jeder Seite, so wird

$$\frac{\sin \varphi + \sin \psi}{\sin \psi} = \frac{a \sin \beta + b \sin \alpha}{b \sin \alpha},$$

also wenn man die Differenz mit der Summe dividirt:

$\dfrac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \varphi + \sin \psi} = \dfrac{a \sin \beta - b \sin \alpha}{a \sin \beta + b \sin \alpha}$. Hier hat man zuerst, nach den trigonometrischen Formeln, $\dfrac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \varphi + \sin \psi} = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} (\varphi + \psi) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi - \psi)$. Ferner hat man

$$\frac{a \sin \beta - b \sin \alpha}{a \sin \beta + b \sin \alpha} = \frac{1 - \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}}{1 + \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}}.$$

Hier setzen wir: $\frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} = \mathrm{tg}\, \lambda$, und erhalten dadurch $\frac{a \sin \beta - b \sin \alpha}{a \sin \beta + b \sin \alpha} = \frac{1 - \mathrm{tg} \lambda}{1 + \mathrm{tg} \lambda} = \mathrm{tg}(45^0 - \lambda)$, daher $\cot \frac{1}{2} (\varphi + \psi) \mathrm{tg} \frac{1}{2} (\varphi - \psi) = \mathrm{tg}(45^0 - \lambda)$, also

$$\mathrm{tg} \tfrac{1}{2} (\varphi - \psi) = \frac{\mathrm{tg}(45^0 - \lambda)}{\cot \frac{1}{2} (\varphi + \psi)} =$$
$$\mathrm{tg}(45^0 - \lambda) \mathrm{tg} \tfrac{1}{2} (\varphi + \psi).$$

In dem Viereck A D B C beträgt die Summe der vier Winkel 360^0, daher $\varphi + \psi = 360^0 - C - \gamma$ und $\frac{1}{2} (\varphi + \psi) = 180^0 - \frac{1}{2} (C + \gamma)$. Da demnach $\frac{1}{2} (\varphi + \psi)$ bekannt ist, so kann man nach der vorigen Formel für $\mathrm{tg} \frac{1}{2} (\varphi - \psi)$ den Winkel $\frac{1}{2} (\varphi - \psi)$ und sonach auch φ und ψ selbst finden.

Die Rechnung wird also nach folgenden Formeln geführt:

1) $\gamma = \alpha + \beta$

2) $\frac{1}{2} (\varphi + \psi) = 180^0 - \frac{1}{2} (C + \gamma)$

3) $\mathrm{tg}\, \lambda = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}$

4) $\mathrm{tg} \frac{1}{2} (\varphi - \psi) = \mathrm{tg}(45^0 - \lambda) \mathrm{tg} \frac{1}{2} (\varphi + \psi)$

5) $\varphi = \frac{1}{2} (\varphi + \psi) + \frac{1}{2} (\varphi - \psi)$ und
$\psi = \frac{1}{2} (\varphi + \psi) - \frac{1}{2} (\varphi - \psi)$.

Hat man hiernach die Winkel φ und ψ berechnet, so sind in den Dreiecken A D C und D B C alle Winkel nebst den Seiten A C und B C bekannt, und man kann daher die übrigen Seiten berechnen, wobei die doppelte Berechnung von D C eine Controle abgeben kann. Doch erfordert die Rechnung wegen der auf die Vorzeichen der Winkel und ihrer trigonometrischen Linien zu nehmenden Rücksichten geübte Trigonometer. Wir bemerken, daß die Winkel φ und ψ so lange positiv herauskommen, als sie mit den Winkeln A und B des Dreiecks ABC auf dieselbe Seite von den Dreiecksseiten A C und B C fallen, mag nun D außerhalb des Dreiecks ABC oder innerhalb desselben liegen. Wenn aber der Punct D so zu liegen kommt, wie D', so fallen φ und ψ, nämlich D'AC und

D'BC mit den Winkeln A und B auf verschiedene Seiten von AC und BC und kommen daher negativ heraus. Dabei ist aber noch Folgendes zu bemerken. Je näher der Punct D auf der Linie DC nach C hinrückt, desto größer werden die Winkel α und β, und wenn nun D über C hinaus nach D' zu liegen kommt, so darf man nicht die Winkel BD'C und AD'C, sondern man muß deren Nebenwinkel statt α und β in Rechnung nehmen, wenn die obigen Formeln ohne Weiteres auch für diesen Fall in Anwendung kommen sollen. Allemal wird man, um nach den obigen Formeln zu rechnen, die Seiten, welche den Winkel, nach dem die mittlere Visirlinie DC gezogen ist, einschließen, mit a und b bezeichnen, woraus die übrige Bezeichnung von selbst folgt, da C von a und b eingeschlossen wird, A dem a und B dem b gegenüber liegt, und φ mit A, ψ mit B den Scheitel gemein hat. α ist der Winkel von a, β der von b. Liegt der Punct D innerhalb des Dreiecks ABC, so ist es gleichgültig, welche von D nach einem Winkelpuncte des Dreiecks gezogene Linie als mittlere genommen wird. Liegen die Puncte A, C, B in gerader Linie, so ist der Winkel C = 180°. — Mehr hierher Gehöriges, besonders über die Unmöglichkeit der Bestimmuug von D, wenn dieser Punct im Umfange des durch A, B, C beschriebenen Kreises liegt, sehe man Cap. 5, §. 91.

Nachdem auf diese Weise die Winkel eines der Dreiecke, z. B., ADC, nebst seinen Seiten bekannt geworden sind, kann man auch die senkrechten Abstände DF und DL des Punctes D vom Meridian und seinem Perpendikel finden, wenn die Puncte A, B, C vorher schon in Bezug auf solche Abstände berechnet wurden, wie aus §. 25, 2 ohne Weiteres hervorgeht.

Man hat noch andere Auflösungen dieses Problemes, allein die gegenwärtige befriedigt alle Anforderungen vollkommen und gewährt überdies auch leichte Rechnung.

§. 29 a.

Die beiden Aufgaben des vorigen §. wollen wir nun noch auf eine andere Art, nämlich nach der Coordinatengeometrie, auflösen. Ein Anfänger, der nach diesem Systeme sicher rechnen lernen will, hat sich vor allen Dingen den Zeichenwechsel der trigonometrischen Functionen in den verschiedenen Quadranten geläufig zu machen und

dann zu bedenken, daß rechtwinkliche Coordinaten in der Ebene mit der Construction von Sinus und Cosinus vollkommen identisch sind. Um die Lage eines Punctes M zu bestimmen, denken wir uns zwei sich rechtwinklich schneidende Gerade, Axen, deren Durchschnitt O heißen mag, und fällen auf sie von M die Perpendikel MN und ML. (Die Figur wird sich der Leser leicht selbst entwerfen.) (Diese Perpendikel MN und ML, oder gewöhnlicher die gleichen Theile OL und ON der Axen heißen die Coordinaten des Punctes M, und es mag ON mit x, OL mit y bezeichnet werden. Darnach wird die eine Axe die der x, die andere die der y benannt. Die Größe von x und y ist allein nicht hinreichend, die Lage von M zu bestimmen, sondern wenn bloß die Größe von x und y gegeben wäre, so würden vier verschiedene Lagen von M möglich bleiben, je nachdem x und y nach der einen oder der andern Seite von O aus genommen werden. Jede Axe nämlich wird durch O in zwei Theile zerlegt, und wenn nun auf dem einen Theile der Axe der x die x positiv genommen werden, so sind sie auf dem andern negativ, und in gleicher Weise verhält sich's mit der Axe der y. Wir haben daher auch von O aus vier verschiedene Hauptrichtungen, die Richtungen der positiven x, der positiven y, der negativen x und der negativen y. — Durch jede Axe wird die Ebene in zwei Theile getheilt, welche sich dadurch von einander unterscheiden, daß in ihnen die entgegengesetzten Coordinatenstücke der andern Axe liegen, z. B., die Axe der x theilt die Ebene in zwei Theile, und in dem einen liegen bloß positive y, in dem andern bloß negative y.

Zieht man von O nach M eine gerade Linie OM, so wird dieselbe immer positiv in Rechnung genommen, und um ihre Lage zu bestimmen, denkt man sich, man stehe in O und sehe nach der Richtung der positiven x. Dreht man sich nun aus dieser Richtung so, daß man unmittelbar in den Theil der Ebene übergeht, in welchem die positiven y liegen, und setzt die Drehung bis in die Lage OM fort, so bestimmt der Drehungswinkel φ offenbar die Lage von OM gegen die Axe der x. Winkel, welche nach dieser Drehungsrichtung beschrieben werden, nehmen wir immer positiv, und wir müssen daher solche Winkel, welche durch Drehung nach entgegengesetzter Richtung entstehen, negativ in Rechnung bringen. — Es ist hieraus klar, daß ON = x nichts anderes, als der Co-

sinus und O L = y nichts anders, als der Sinus des Winkels φ für den Halbmesser O M ist. — Vergrößern wir den Winkel φ um 180°, so kommen wir in die entgegengesetzte Lage von O M, und es läßt sich daher statt $+\varphi$ und $+$ O M, wodurch die Lage des Punctes M bestimmt wird, auch $180^{\circ} + \varphi$ und $-$ O M setzen, ohne daß in der Lage von M eine Aenderung eintritt. — Hier nennt man auch φ und O M polare Coordinaten von M, und darnach erscheint die Trigonometrie als derjenige Theil der geometrischen Analysis, wodurch polare Coordinaten (φ und O M) in rechtwinkliche (x und y) umgewandelt werden und umgekehrt.

Außer M denken wir uns nun noch einen zweiten Punct M', mit seinen Coordinaten $x_{,}$ und $y_{,}$. Die Linie von M nach M' sei $= r$. Um die Lage der Linie MM' (nicht der entgegengesetzten M'M) gegen die Axe der x zu bestimmen, denken wir uns durch M zwei den Axen der x und y parallele Linien, die secundären Axen, gezogen und bestimmen auf diesen die vier Hauptrichtungen nach denen auf den ursprünglichen Axen. Auf den secundären Axen ist nämlich die Richtung der positiven x nach eben der Gegend, nach welcher sie auf den ursprünglichen Axen genommen ist, und so bestimmt sich auch die Richtung der positiven y und darnach endlich auch die positive Drehungsrichtung in M. Drehen wir uns nun in M aus der Richtung der positiven x nach der positiven Drehungsrichtung bis in die Lage MM', so bestimmt der Drehungswinkel φ die Lage der Linie MM' gegen die Axe der x. Man könnte hier mit voller Bestimmtheit sagen: Die Linie r macht mit der Axe der x im Endpuncte M nach der positiven Drehungsrichtung den Winkel φ.

In Bezug auf die secundären Axen sind die Coordinaten von M' einmal $x_{,} - x$ und $y_{,} - y$ und dann auch $r \cos \varphi$ und $r \sin \varphi$, und man hat daher die Gleichungen:

$$x_{,} - x = r \cos \varphi$$
$$y_{,} - y = r \sin \varphi,$$

von welchen die Rechnungen in der Coordinatengeometrie immer ihren Auslauf nehmen. Man übersehe dabei nicht, daß die Coordinaten desjenigen Punctes abgezogen sind, in welchem man bei der Bestimmung des Winkels φ den Mittelpunct der Drehung legte. Die Linie r wird dabei immer positiv genommen, statt dessen kann man aber r auch negativ nehmen und dafür φ um 180° vergrößern,

denn dann ändern auch $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ ihre Vorzeichen, und die Producte $(-r) \cos (180^0 + \varphi)$ und $(-r) \sin (180^0 + \varphi)$ bleiben identisch mit $r \cos \varphi$ und $r \sin \varphi$.

Einen Punct, dessen Coordinaten x und y sind, bezeichnen wir immer mit [xy].

Erste Aufgabe.

Die Coordinaten der Puncte [xy] und $[x_, y_,]$ sind gegeben, und an den Puncten $[\xi\eta]$ und $[\xi_,\eta_,]$ mißt man die Winkel α und β, α' und β', welche die Linien $[\xi\eta]$ bis $[xy] = d$, $[\xi\eta]$ bis $[x_,y_,] = \delta$, $[\xi_,\eta_,]$ bis $[xy] = d'$ und $[\xi_,\eta_,]$ bis $[x_,y_,] = \delta'$ mit der Linie $[\xi\eta]$ bis $[\xi_,\eta_,] = r$ nach der positiven Drehungsrichtung machen; man soll hieraus die Coordinaten der Puncte $[\xi\eta]$ und $[\xi_,\eta_,]$, sowie alle übrigen unbekannten Stücke berechnen.

Auflösung.

Bei einer systematischen Landesvermessung ist die eine Axe ein Meridian und die andere ein darauf gezogenes Perpendikel, und die positiven x werden auf dem Meridiane etwa südwärts, die positiven y auf dem Perpendikel etwa morgenwärts gezählt, so daß die positive Drehungsrichtung erhalten wird, wenn man südwärts sieht und sich dann morgenwärts herumdreht. Dreht man sich so im Puncte $[\xi\eta]$ bis in die Richtung von r und von da aus wieder bis in die Richtung von d, so hat man den Winkel α, und so ist klar, wie auch die übrigen Winkel zu bestimmen sind. Ein Anfänger wird wohl thun, wenn er sich die Bestimmung der Winkel α, β, α', β' an Zeichnungen einübt, in welchen die erwähnten vier Puncte verschiedene Lage gegen die Coordinatenaxen haben.

Nun nehme man an, die Linie r mache mit der Axe der x (nach der positiven Drehungsrichtung) den Winkel φ, wenn $[\xi\eta]$ als Mittelpunct der Drehung angesehen wird, aber den Winkel φ' wenn man den Mittelpunct der Drehung nach $[\xi,\eta,]$ versetzt. Dann macht offenbar die Linie d im Puncte $[\xi\eta]$ den Winkel $\varphi + \alpha$ und die Linie δ den Winkel $\varphi + \beta$ mit der Axe der x. Die Linien d' und δ' machen im Puncte $[\xi_,\eta_,]$ die Winkel $\varphi' + \alpha'$ und $\varphi' + \beta'$ mit der Axe der x. Begiebt man sich also nach $[\xi\eta]$ und geht von da auf den Punct $[\xi_,\eta_,]$ über, so hat man die Gleichungen:

1) $\xi_{,} - \xi = r \cos \varphi$
2) $\eta_{,} - \eta = r \sin \varphi$.
Geht man aber von $[\xi\eta]$ nach $[xy]$ über, so folgt:
3) $x - \xi = d \cos (\varphi + \alpha)$
4) $y - \eta = d \sin (\varphi + \alpha)$
und wenn man noch von $[\xi\eta]$ nach $[x_{,}y_{,}]$ übergeht:
5) $x_{,} - \xi = \delta \cos (\varphi + \beta)$
6) $y_{,} - \eta = \delta \sin (\varphi + \beta)$.
So folgt auch, wenn man sich nach $[\xi_{,}\eta_{,}]$ begiebt und von da nach $[\xi\eta]$, $[xy]$ und $[x_{,}y_{,}]$ übergeht:
7) $\xi - \xi_{,} = r \cos \varphi'$
8) $\eta - \eta_{,} = r \sin \varphi'$
9) $x - \xi_{,} = d' \cos (\varphi' + \alpha')$
10) $y - \eta_{,} = d' \sin (\varphi' + \alpha')$
11) $x_{,} - \xi_{,} = \delta' \cos (\varphi' + \beta')$
12) $y_{,} - \eta_{,} = \delta' \sin (\varphi' + \beta')$.
In diesen 12 Gleichungen stecken die 11 unbekannten Größen ξ η $\xi_{,}$ $\eta_{,}$ r φ φ' d δ d' δ', und es muß daher eine Gleichung überflüssig sein. Da nun $\xi - \xi_{,} = -(\xi_{,} - \xi)$ und $\eta - \eta_{,} = -(\eta_{,} - \eta)$, so folgt aus 1), 2), 7) und 8):
$r \cos \varphi' = - r \cos \varphi$ oder $\cos \varphi' = - \cos \varphi$
$r \sin \varphi' = - r \sin \varphi$ „ $\sin \varphi' = - \sin \varphi$
und daher muß $\varphi' = 180^\circ + \varphi$ sein. Nämlich eine gerade Linie r, welche in einem Endpuncte mit der Axe der x den Winkel φ macht, macht im andern den Winkel $180^\circ + \varphi$. Setzen wir nun $180^\circ + \varphi$ statt φ' und berücksichtigen, daß überhaupt $\sin (180^\circ + \psi) = - \sin \psi$, $\cos (180^\circ + \psi) = - \cos \psi$, so erhalten wir aus den vorigen 12 Gleichungen die folgenden 10:
13) $\xi_{,} - \xi = r \cos \varphi$
14) $\eta_{,} - \eta = r \sin \varphi$
15) $x - \xi = d \cos (\varphi + \alpha)$
16) $y - \eta = d \sin (\varphi + \alpha)$
17) $x_{,} - \xi = \delta \cos (\varphi + \beta)$
18) $y_{,} - \eta = \delta \sin (\varphi + \beta)$
19) $x - \xi_{,} = - d' \cos (\varphi + \alpha')$
20) $y - \eta_{,} = - d' \sin (\varphi + \alpha')$
21) $x_{,} - \xi_{,} = - \delta' \cos (\varphi + \beta')$
22) $y_{,} - \eta_{,} = - \delta' \sin (\varphi + \beta')$,
welche die 10 unbekannten Größen ξ η $\xi_{,}$ $\eta_{,}$ r φ d δ d' δ' enthalten und daher zur Auflösung der Aufgabe vollkommen ausreichen.

Dividirt man 16 mit 15, so bekommt man

$$\frac{y - \eta}{x - \xi} = \frac{\sin(\varphi + \alpha)}{\cos(\varphi + \alpha)},$$

d. h. 23) $y - \eta = (x - \xi)\,\mathrm{tg}\,(\varphi + \alpha)$.

Dividirt man 18 mit 17, so erhält man leicht:

$(y_{,} - \eta)\cos(\varphi + \beta) = (x_{,} - \xi)\sin(\varphi + \beta)$,

was wir umformen in:

$$\Big((y' - y) + (y - \eta)\Big)\cos(\varphi + \beta) = \Big((x_{,} - x) + (x - \xi)\Big)\sin\varphi\,(+\beta)$$

$$(y_{,} - y)\cos(\varphi + \beta) + (y - \eta)\cos(\varphi + \beta) = (x_{,} - x)\sin(\varphi + \beta) + (x - \xi)\sin(\varphi + \beta).$$

Statt $x - \eta$ setzen wir aber seinen Werth aus 23) und erhalten:

$$(y_{,} - y)\cos(\varphi + \beta) - (x_{,} - x)\sin(\varphi + \beta) = (x - \xi)\Big[\sin(\varphi + \beta) - \cos(\varphi + \beta)\,\mathrm{tg}\,(\varphi + \alpha)\Big].$$

Setzt man aber $\frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\cos(\varphi+\alpha)}$ statt $\mathrm{tg}\,(\varphi+\alpha)$, so bekommt man leicht $\sin(\varphi+\beta) - \cos(\varphi+\beta)\,\mathrm{tg}\,(\varphi+\alpha) = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\varphi+\alpha)}$, und die letzte Gleichung verwandelt sich in:

$$(y_{,} - y)\cos(\varphi + \beta) - (x_{,} - x)\sin(\varphi + \beta) = \frac{(x - \xi)\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\varphi + \alpha)}.$$

Ferner bestimmen wir einen Hülfswinkel A so, daß man hat:

24) $\mathrm{tg}\,A = \frac{y_{,} - y}{x_{,} - x}$,

also auch $y_{,} - y = (x_{,} - x)\,\mathrm{tg}\,A$. Setzen wir dies in die letzte Gleichung, so bekommen wir:

$$(x_{,} - x)\Big(\cos(\varphi + \beta)\,\mathrm{tg}\,A - \sin(\varphi + \beta)\Big) = \frac{(x - \xi)\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\varphi + \alpha)},$$ oder

$$\frac{(x_{,} - x)\sin(A - \beta - \varphi)}{\cos A} = \frac{(x - \xi)\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\varphi + \alpha)},$$

woraus folgt:

25) $$x - \xi = \frac{(x_{,} - x)\sin(A - \beta - \varphi)\cos(\varphi + \alpha)}{\cos A\,\sin(\beta - \alpha)}.$$

Nun dividiren wir 20) mit 19) und bekommen:

$$(y - \eta_{,})\cos(\varphi + \alpha') = (x - \xi_{,})\sin(\varphi + \alpha'),$$

d. h.

$$\Big((y - \eta) - (\eta_{,} - \eta)\Big)\cos(\varphi + \alpha')$$
$$= \Big((x - \xi) - (\xi_{,} - \xi)\Big)\sin(\varphi + \alpha').$$

Statt $y - \eta$, $\xi_{,} - \xi$ und $\eta_{,} - \eta$ setzen wir ihre Werthe aus 23), 13) und 14) und erhalten:

$$(x - \xi)\Big(\mathrm{tg}(\varphi + \alpha)\cos(\varphi + \alpha') - \sin(\varphi + \alpha')\Big)$$
$$= r\Big(\sin\varphi\cos(\varphi + \alpha') - \cos\varphi\sin(\varphi + \alpha')\Big)$$

das ist

$$\frac{(x - \xi)\sin(\alpha - \alpha')}{\cos(\varphi + \alpha)} = - r\sin\alpha',$$

daher

$$26)\quad r = \frac{(x - \xi)\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin\alpha'\cos(\varphi + \alpha)}.$$

Endlich dividiren wir noch 22) mit 21), wodurch wir bekommen:

$$(y_{,} - \eta_{,})\cos(\varphi + \beta') = (x_{,} - \xi_{,})\sin(\varphi + \beta'),$$

was umgeformt werden muß in:

$$\Big((y_{,} - y) + (y - \eta) - (\eta_{,} - \eta)\Big)\cos(\varphi + \beta')$$
$$= \Big((x_{,} - x) + (x - \xi) - (\xi_{,} - \xi)\Big)\sin(\varphi + \beta').$$

Setzen wir nun zuerst statt $\xi_{,} - \xi$ und $\eta_{,} - \eta$ ihre Werthe aus 13) und 14), so findet sich:

$$\Big((y_{,} - y) + (y - \eta)\Big)\cos(\varphi + \beta')$$
$$= \Big((x_{,} - x) + (x - \xi)\Big)\sin(\varphi + \beta')$$
$$+ r\Big(\sin\varphi\cos(\varphi + \beta') - \cos\varphi\sin(\varphi + \beta')\Big)$$

$$(y_{,} - y)\cos(\varphi + \beta') - (x_{,} - x)\sin(\varphi + \beta') =$$
$$(x - \xi)\sin(\varphi + \beta') - (y - \eta)\cos(\varphi + \beta') - r\sin\beta'.$$

Setzen wir nun noch statt $y_{,} - y$ und statt $y - \eta$ ihre Werthe aus 24) und 23), so finden wir:

$$(x_{,} - x)\Big(\cos(\varphi + \beta')\,\mathrm{tg}\,A - \sin(\varphi + \beta')\Big) =$$
$$(x - \xi)\Big(\sin(\varphi + \beta') - \cos(\varphi + \beta')\,\mathrm{tg}(\varphi + \alpha)\Big) - r\sin\beta',$$

oder $\frac{(x_{,}-x)\sin(A-\beta'-\varphi)}{\cos A} = \frac{(x-\xi)\sin(\beta'-\alpha)}{\cos(\varphi+\alpha)} - r\sin\beta'$.

Hier führen wir statt r noch seinen Werth aus 26) ein und erhalten:

$$\frac{(x_{,}-x)\sin(A-\beta'-\varphi)}{\cos A} =$$
$$\frac{x-\xi}{\cos(\varphi+\alpha)}\left(\sin(\beta'-\alpha) - \frac{\sin(\alpha'-\alpha)\sin\beta'}{\sin\alpha'}\right).$$

Aber es wird $\sin(\beta'-\alpha) - \frac{\sin(\alpha'-\alpha)\sin\beta'}{\sin\alpha'}$

$$= \frac{\sin(\beta'-\alpha)\sin\alpha' - \sin(\alpha'-\alpha)\sin\beta'}{\sin\alpha'}$$

$= \frac{\sin\alpha\sin(\beta'-\alpha')}{\sin\alpha'}$, und daher

$$\frac{(x_{,}-x)\sin(A-\beta'-\varphi)}{\cos A} = \frac{(x-\xi)\sin\alpha\sin(\beta'-\alpha')}{\cos(\varphi+\alpha)\sin\alpha'},$$

oder endlich

$$27)\quad x-\xi = \frac{(x_{,}-x)\sin(A-\beta'-\varphi)\cos(\varphi+\alpha)\sin\alpha'}{\cos A\sin\alpha\sin(\beta'-\alpha')}.$$

Setzen wir nun die beiden Werthe von $x-\xi$ in 25) und 27) einander gleich, so bekommen wir:

$$\frac{\sin(A-\beta-\varphi)}{\sin(A-\beta'-\varphi)} = \frac{\sin(\beta-\alpha)\sin\alpha'}{\sin(\beta'-\alpha')\sin\alpha}.$$

Wir setzen zunächst

$$28)\quad \mathrm{tg}\,\lambda = \frac{\sin(\beta-\alpha)\sin\alpha'}{\sin(\beta'-\alpha')\sin\alpha}$$

und bekommen

$$\frac{\sin(A-\beta-\varphi)}{\sin(A-\beta'-\varphi)} = \mathrm{tg}\,\lambda.$$

Addiren wir beiderseits 1, so wird:

$$\frac{\sin(A-\beta'-\varphi)+\sin(A-\beta-\varphi)}{\sin(A-\beta'-\varphi)} = 1+\mathrm{tg}\,\lambda;$$

wird aber dieselbe Gleichung von 1 subtrahirt, so bekommt man noch

$$\frac{\sin(A-\beta'-\varphi)-\sin(A-\beta-\varphi)}{\sin(A-\beta'-\varphi)} = 1-\mathrm{tg}\,\lambda,$$

und wenn man nun noch jenes mit diesem dividirt:

$$\frac{\sin(A-\beta'-\varphi)+\sin(A-\beta-\varphi)}{\sin(A-\beta'-\varphi)-\sin(A-\beta-\varphi)} = \frac{1+\mathrm{tg}\,\lambda}{1-\mathrm{tg}\,\lambda}.$$

Aber es ist allgemein

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cot\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

und daher erhalten wir aus der letzten Gleichung:

$$\operatorname{tg}\left(A - \frac{\beta' + \beta}{2} - \varphi\right)\cot\left(\frac{\beta - \beta'}{2}\right) = \operatorname{tg}(45^0 + \lambda),$$

oder

$$29)\quad \operatorname{tg}\left(A - \frac{\beta + \beta'}{2} - \varphi\right) = \operatorname{tg}(45^0 + \lambda)\operatorname{tg}\left(\frac{\beta - \beta'}{2}\right)$$

und hiermit ist die Aufgabe vollständig gelös't. Das Verfahren ist also folgendes:

Man berechne zuerst die Winkel A und λ nach den Formeln:

$$\operatorname{tg} A = \frac{y_{,} - y}{x_{,} - x} \text{ und } \operatorname{tg}\lambda = \frac{\sin(\beta - \alpha)\sin\alpha'}{\sin(\beta' - \alpha')\sin\alpha}.$$

Dann suche man den Winkel $A - \frac{\beta' + \beta}{2} - \varphi$ durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\left(A - \frac{\beta + \beta'}{2} - \varphi\right) = \operatorname{tg}(45^0 + \lambda)\operatorname{tg}\left(\frac{\beta - \beta'}{2}\right);$$

zieht man diesen von $A - \frac{\beta + \beta'}{2}$ ab, so findet man auch φ. Ist φ gefunden, so erhält man $x - \xi$ durch die beiden Ausdrücke:

$$x - \xi = \frac{(x_{,} - x)\sin(A - \beta - \varphi)\cos(\varphi + \alpha)}{\cos A \sin(\beta - \alpha)}$$

$$x - \xi = \frac{(x_{,} - x)\sin(A - \beta' - \varphi)\cos(\varphi + \alpha)\sin\alpha'}{\cos A \sin\alpha \sin(\beta' - \alpha')}$$

und durch die doppelte Berechnung von $x - \xi$ wird die ganze bisherige Rechnung geprüft. Aus $x - \xi$ findet man $y - \eta$ durch

$$y - \eta = (x - \xi)\operatorname{tg}(\varphi + \alpha)$$

und hierauf ξ und η, wenn man $x - \xi$ von x, $y - \eta$ von y abzieht. Hierauf berechne man r aus

$$r = \frac{(x - \xi)\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin\alpha' \cos(\varphi + \alpha)}$$

und sodann $\xi_{,} - \xi$ und $\eta_{,} - \eta$ aus

$$\xi_{,} - \xi = r\cos\varphi \text{ und } \eta_{,} - \eta = r\sin\varphi.$$

Indem man ξ zu $\xi_{,} - \xi$ und η zu $\eta_{,} - \eta$ addirt, ergeben sich $\xi_{,}$ und $\eta_{,}$. Zuletzt ergeben sich die Abstände

$$d = \frac{x - \xi}{\cos(\varphi + \alpha)} = \frac{y - \eta}{\sin(\varphi + \alpha)}$$

$$\delta = \frac{x_, - \xi}{\cos(\varphi + \beta)} = \frac{y_, - \eta}{\sin(\varphi + \beta)}$$

$$d' = -\frac{x - \xi_,}{\cos(\varphi + \alpha')} = -\frac{y - \eta_,}{\sin(\varphi + \alpha')}$$

$$\delta' = -\frac{x_, - \xi_,}{\cos(\varphi + \beta')} = -\frac{y_, - \eta_,}{\sin(\varphi + \beta')}.$$

Es ist nur noch in Bezug auf die Winkel A und φ etwas zu bemerken übrig. Es ist $\operatorname{tg} A = \frac{y_, - y}{x_, - x}$, und wenn man durch [x y] zwei secundäre Axen mit den Axen der x und y parallel zieht, so sieht man, daß die Coordinaten von [$x_,$ $y_,$] in Bezug auf diese neuen Axen = $x_, - x$ und $y_, - y$ sind. Ist h die gerade Linie zwischen [x y] und [$x_,$ $y_,$] so ist daher $x_, - x$ der Cosinus, $y_, - y$ der Sinus von A für den Halbmesser h, und folglich bestimmt sich der Werth von A genau darnach, was $x_, - x$ als Cosinus und $y_, - y$ als Sinus für Vorzeichen haben. Ist z. B. $x_, - x$ sowohl, als auch $y_, - y$ negativ, so liegt A im dritten Quadranten, da ein negativer Cosinus zugleich mit einem negativen Sinus einem Winkel im dritten Quadranten entspricht. Nach der Größe von tg A bestimmt sich nun der Werth von A vollständig. A ist nämlich der Winkel, welchen die Linie h im Puncte [x y] mit der Axe der x macht.

Der Winkel φ wird durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\left(A - \frac{\beta + \beta'}{2} - \varphi\right) = \operatorname{tg}(45^0 + \lambda)\operatorname{tg}\left(\frac{\beta - \beta'}{2}\right)$$

bestimmt. Ist nun $\operatorname{tg}\left(A - \frac{\beta + \beta'}{2} - \varphi\right)$ positiv, so können wir den zugehörigen Winkel positiv und spitz oder im dritten Quadranten nehmen, oder negativ und im zweiten oder vierten Quadranten. Ist aber dieselbe Tangente negativ, so entspricht ihr ein positiver Winkel im zweiten oder vierten Quadranten, oder ein negativer im ersten oder dritten Quadranten. Welcher Winkel nun zu nehmen ist, darüber ist keine Entscheidung vorhanden, wenn man nicht φ so bestimmen will, daß r positiv herauskommt. Käme r negativ heraus, so zeigt dies an,

daß man φ um 180° größer genommen hat, als erforderlich ist, um r positiv zu erhalten, sonst aber hat dieser Umstand auf die Rechnung keinen Einfluß weiter.

Zweite Aufgabe.

Es sind die Coordinaten dreier Puncte $[x\,y]$, $[x_1\,y_1]$ und $[x_2\,y_2]$ gegeben und an einem vierten Puncte $[\xi\,\eta]$ hat man die Winkel α und β gemessen, welche die Linien

von $[\xi\,\eta]$ bis $[x_1\,y_1] = d_1$

von $[\xi\,\eta]$ bis $[x_2\,y_2] = d_2$

mit der Linie von $[\xi\,\eta]$ bis $[x\,y] = d$

nach der positiven Drehungsrichtung bilden. Man soll hieraus die Coordinaten von $[\xi\,\eta]$, sowie die Entfernungen $d\ d_1\ d_2$ berechnen.

Macht d mit der Axe der x den Winkel φ, so machen d_1 und d_2 mit eben dieser Axe die Winkel $\varphi + \alpha$ und $\varphi + \beta$, und man hat folgende Gleichungen:

1) $x - \xi = d \cos \varphi$;

2) $y - \eta = d \sin \varphi$;

3) $x_1 - \xi = d_1 \cos (\varphi + \alpha)$;

4) $y_1 - \eta = d_1 \sin (\varphi + \alpha)$;

5) $x_2 - \xi = d_2 \cos (\varphi + \beta)$;

6) $y_2 - \eta = d_2 \sin (\varphi + \beta)$;

die Gleichungen 1) und 2) geben mit einander dividirt:

7) $y - \eta = (x - \xi) \operatorname{tg} \varphi$.

Aus 3) und 4) folgt durch Elimination von d_1

$(y_1 - \eta) \cos (\varphi + \alpha) = (x_1 - \xi) \sin (\varphi + \alpha)$

oder:

$$\Big((y_1 - y) + (y - \eta)\Big) \cos (\varphi + \alpha)$$
$$= \Big((x_1 - x) + (x - \xi)\Big) \sin (\varphi + \alpha).$$

Setzen wir aber statt $y - \eta$ seinen Werth aus 7), so finden wir ferner:

$$(y_1 - \eta) \cos (\varphi + \alpha) + (x - \xi) \operatorname{tg} \varphi \cos (\varphi + \alpha)$$
$$= (x_1 - x) \sin (\varphi + \alpha) + (x - \xi) \sin (\varphi + \alpha),$$

oder

$$(y_1 - y) \cos (\varphi + \alpha) - (x_1 - x) \sin (\varphi + \alpha)$$
$$= (x - \xi) \Big(\sin (\varphi + \alpha) - \operatorname{tg} \varphi \cos (\varphi + \alpha)$$
$$= \frac{(x - \xi) \sin \alpha}{\cos \varphi}.$$

Bestimmen wir nun einen Hülfswinkel so, daß

$$8)\ \operatorname{tg} A = \frac{y_1 - y}{x_1 - x},$$

also auch $y_1 - y = (x_1 - x) \operatorname{tg} A$,
so bekommen wir

$$(x_1 - x)\left(\cos(\varphi+\alpha) \operatorname{tg} A - \sin(\varphi+\alpha)\right) = \frac{(x-\xi)\sin\alpha}{\cos\varphi}$$

oder

$$\frac{(x_1 - x)\sin(A - \alpha - \varphi)\cos\varphi}{\cos A} = (x - \xi)\sin\alpha,$$

daher

$$9)\ x - \xi = \frac{(x_1 - x)\sin(A - \alpha - \varphi)\cos\varphi}{\cos A \sin\alpha}.$$

Aus 5) und 6) folgt noch:

$$(y_2 - \eta)\cos(\varphi+\beta) = (x_2 - \xi)\sin(\varphi+\beta),$$

was wir in

$$\left((y_2 - y) + (y - \eta)\right)\cos(\varphi+\beta)$$
$$= \left((x_2 - x) + (x - \xi)\right)\sin(\varphi+\beta)$$

umbilden. Dieses unterliegt aber derselben Behandlung, wie das Vorige, nur daß x_2 statt x_1 und β statt α steht. Setzen wir daher

$$10)\ \operatorname{tg} B = \frac{y_2 - y}{x_2 - x},$$

so muß sich

$$11)\ x - \xi = \frac{(x_2 - x)\sin(B - \beta - \varphi)\cos\varphi}{\cos B \sin\beta}$$

finden. Durch Vergleichung von 9) und 11) findet sich nun

$$\frac{\sin(A - \alpha - \varphi)}{\sin(B - \beta - \varphi)} = \frac{x_2 - x}{x_1 - x} \cdot \frac{\cos A \sin\alpha}{\cos B \sin\beta}$$

oder wenn wir

$$12)\ \operatorname{tg}\lambda = \frac{x_2 - x}{x_1 - x} \cdot \frac{\cos A \sin\alpha}{\cos B \sin\beta}$$

setzen:

$$\frac{\sin(A - \alpha - \varphi)}{\sin(B - \beta - \varphi)} = \operatorname{tg}\lambda,$$

woraus eben so, wie in der vorigen Aufgabe:

$$13)\ \operatorname{tg}\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}-\varphi\right)$$
$$=\operatorname{tg}(45^0+\lambda)\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{A-B}{2}\right)$$

gefunden wird, und wodurch nun die Aufgabe vollständig gelös't ist.

Man hat also folgende Berechnungen zu machen: Zuerst suche man die Winkel A, B und λ durch

$$\operatorname{tg} A=\frac{y_1-y}{x_1-x},\ \operatorname{tg} B=\frac{y_2-y}{x_2-x}$$
$$\operatorname{tg}\lambda=\frac{x_2-x}{x_1-x}\cdot\frac{\cos A\sin\alpha}{\cos B\sin\beta}.$$

Für die Winkel A und B hat man aber dasselbe zu beachten, was in der vorigen Aufgabe für A bemerkt worden. Alsdann suche man den Winkel

$$\frac{A+B}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}-\varphi$$

durch

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}-\varphi\right)$$
$$=\operatorname{tg}(45^0+\lambda)\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{A-B}{2}\right),$$

und wenn man dann

$$\frac{A+B}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}-\varphi \text{ von } \frac{A+B}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}$$

abzieht, so ergiebt sich φ. Ist φ gefunden, so hat man

$$x-\xi=\frac{(x_1-x)\sin(A-\alpha-\varphi)\cos\varphi}{\cos A\sin\alpha}$$
$$=\frac{(x_2-x)\sin(B-\beta-\varphi)\cos\varphi}{\cos B\sin\beta}$$

und dann

$$y-\eta=(x-\xi)\operatorname{tg}\varphi,$$

woraus sich ξ und η ergeben. Zuletzt hat man noch:

$$d=\frac{x_1-\xi}{\cos(\varphi+\alpha)}=\frac{y_1-\eta}{\sin(\varphi+\alpha)}$$
$$d_2=\frac{x_2-\xi}{\cos(\varphi+\beta)}=\frac{y_2-\eta}{\sin(\varphi+\beta)}.$$

Zweites Capitel.

Erläuterung einiger für die practische Geometrie wichtiger Gegenstände.

§. 30.

Unter allen Hülfswissenschaften der practischen Geometrie sind neben den Lehrsätzen der reinen Mathematik noch die der Optik, sofern sie von dem geradlinigen Fortgange der Lichtstrahlen und deren Brechung und Spiegelung abhängen, die wichtigsten; theils, weil der Grundsatz vom geradlinigen Fortgange des Lichtes die unmittelbare Grundlage aller geodätischen Operationen ist, theils aber auch, weil erst durch Anwendung optischer Instrumente die Genauigkeit der Messungen zu einem hohen Grade gefördert werden kann. Es dürfte daher höchst zweckmäßig sein, hier von den optischen Wissenschaften so viel vorzutragen, als eben nach heutigem Standpuncte für die Geodäsie zu wissen nöthig ist.

§. 31.

1) Die Bedingung der Sichtbarkeit alles Körperlichen nennen wir Licht. Wo kein Licht ist, da ist Finsterniß, und wenn diese mit dem Lichte zusammengrenzt, wird sie Schatten genannt.

2) Ueber die Natur des Lichtes existiren jetzt in der Physik zwei wesentlich verschiedene Ansichten, die Hypothese der Emanation oder Emission, und dann die der Undulation oder Vibration. Nach der ersteren Ansicht stellt man sich das Licht als kleine materielle Partikeln vor, welche von den leuchtenden oder beleuchteten Körpern ausströmen; nach der andern Ansicht aber denkt man sich eine sehr feine elastisch-flüssige Materie (Aether) durch den ganzen Weltraum verbreitet, in welchem die leuchtenden Körper eine Art zitternder Bewegung erregen, die sich wellenförmig, wie die Wellen auf der Oberfläche eines Wassers, nach allen Seiten hin fortpflanzt. Beide Hypothesen lassen noch viel zu wünschen übrig; allein eine Reihe optischer Erscheinungen spricht entschieden für die letztere, die sich außerdem noch ganz

besonders durch ihre strengen mathematischen Durchführungen in Ansehen erhält.

3) Glücklicher Weise sind gerade diejenigen Sätze, durch welche die practische Meßkunde begründet oder unterstützt wird, von aller Hypothese über die Natur des Lichtes unabhängig. Mit Sicherheit können wir annehmen, daß das Licht von den leuchtenden oder beleuchteten Körpern nach allen Seiten hin geradlinig ausströmt, und dieses ist das Gesetz des geradlinigen Sehens, welches ganz besonders in der gemeinen Erfahrung seine Bestätigung findet, daß ein gesehenes Object allemal verschwindet, so oft ein Hinderniß in die gerade Linie zwischen ihm und dem Auge eintritt.

Die geraden Linien, nach welchen wir die Richtung des Ausströmens beurtheilen, nennen wir Strahlen. Von jedem leuchtenden Puncte gehen also nach allen Richtungen unzählige Lichtstrahlen aus.

§. 32.

1) Denken wir uns unter der Linie A B (Taf. III. Fig. 2) einen Gegenstand, z. B. einen Stab, und bei O ein Auge, das wir als einen bloßen Punct betrachten wollen; ziehen wir dann die Linien oder Strahlen A O und B O, so heißt der Winkel A O B der Sehwinkel des Gegenstandes A B. Man begreift, daß ein Gegenstand im Allgemeinen um so größer erscheinen muß, je größer sein Sehewinkel ist, daß aber bloß aus diesem die wahre Größe des Gegenstandes noch nicht beurtheilt werden kann. Man nennt daher auch wohl den Sehewinkel eines Gegenstandes seine scheinbare Größe. Alle Objecte, die, wie A B, A′B′, A″B″, zwischen die Schenkel desselben Sehewinkels fallen, haben demnach gleiche scheinbare Größe, wie denn in diesem Falle auch das Entferntere von dem Näheren, obgleich Kleineren, genau verdeckt wird.

2) Ist der Gegenstand A B senkrecht auf einem Schenkel des Sehewinkels, und bezeichnen wir seine wahre Größe mit h, seinen Abstand A O vom Auge mit a, seinen Sehewinkel mit O, so haben wir die Gleichung $h = a \operatorname{tg} O$. Diese Gleichung zeigt, wie man eine der Größen h, a, O berechnen kann, wenn die beiden andern gegeben sind. Gewöhnlich sind in solchen Fällen die Sehewinkel so klein, daß man tg O mit dem

Bogen von O verwechseln kann, da dann, wenn O in Secunden ausgedrückt wird, $b = \frac{O}{206265} \times a$ sein wird.

3) Wenn der Sehewinkel unter eine gewisse Grenze herabgeht, so kann das Auge den Gegenstand nicht mehr empfinden. Der Sehewinkel, bei welchem ein Gegenstand zu verschwinden anfängt, heißt der kleinste, und es ist derselbe für verschiedene Augen, ja selbst für dasselbe Auge bei verschiedenen Gegenständen sehr verschieden. Insgemein nimmt man ihn zu 1 Munute an, aber die Fixsterne, deren Sehewinkel weit kleiner, als 1 Secunde ist, sind dennoch dem Auge recht wohl erkennbar, weil dasselbe durch ihren starken Lichtglanz sehr gereizt wird. Demnach kommt es bei der Bestimmung der kleinsten Sehewinkel wesentlich auf die Beleuchtung des Gegenstandes, und namentlich auf die Beleuchtung des Hintergrundes an, auf welchem es gesehen wird; denn es wird z. B. ein helles Object auf dunklerem Grunde bei einem weit kleineren Sehewinkel noch kenntlich sein, als wenn sein Hintergrund ebenfalls hell ist. Lange Striche sind auf größere Entfernungen sichtbar, als Puncte von gleicher Breite, weil erstere einen größeren Theil des Auges reizen, als die letzteren.

Der kleinste Sehewinkel wird bei der Beurtheilung der Fehler wichtig, denen die Resultate der geodätischen Operationen, wegen der Beschränktheit des Gesichtssinnes, unterworfen sind.

§. 33.

Aber das Licht bewegt sich nur so lange nach geraden Linien fort, als es sich entweder im leeren Raume, oder in einem durchsichtigen Körper (Mittel) von einerlei Beschaffenheit befindet. Sobald es aber aus einem Mittel in ein anderes, verschiedenes übergeht, ändert es auch seine Richtung, und diese Thatsache wird **Brechung** oder **Refraction** genannt.

Es sei MN (Taf. III. Fig. 3) die ebene Oberfläche eines Stückes Glas, und AI ein Lichtstrahl, welcher bei I aus der Luft in das Glas übergeht. In I angelangt, wird er nicht die vorige Richtung IB' beibehalten, sondern eine andere, IB, nehmen, worin eben die Brechung besteht. Errichtet man nun im Einfallspuncte I auf der

brechenden Fläche MN ein Perpendikel EIF, so heißt dieses das Einfallsloth, der Winkel AIE der Einfallswinkel und FIB der Brechungs- oder Refractionswinkel. Die Gesetze der Brechung, insofern hierdurch die Richtung des gebrochenen Strahles IB bestimmt wird, sind nun folgende:

1) Das Einfallsloth EI, der einfallende Strahl AI und der gebrochene IB liegen immer in einer Ebene.

2) Bei derselben brechenden Materie hat der Sinus des Einfallswinkels AIE zum Sinus des Brechungswinkels FIB immer dasselbe Verhältniß, welches constante Verhältniß man das Brechungsverhältniß nennt.

Der Brechungswinkel BIF ist entweder kleiner oder größer, als der Einfallswinkel AIE; im ersteren Falle sagt man, der Strahl werde dem Lothe zugebrochen; im andern, er werde vom Lothe weggebrochen. Bei'm Uebergange aus Luft in Glas, sowie in alle anderen festen oder flüssigen Körper, wird ein Lichtstrahl seinem Lothe zu-, und folglich bei'm Uebergange aus Glas in Luft vom Lothe weggebrochen. Für Glas ist z. B. das Brechungsverhältniß in runder Zahl 1,5 : 1, d. h., es ist $\sin EIA : \sin BIF = 1{,}5 : 1$, und diese Proportion findet statt, es mag der Strahl AI aus der Luft in Glas, oder der Strahl BI aus Glas in Luft treten. Bezeichnet man allgemein das Brechungsverhältniß mit $n : 1$, den Einfallswinkel mit i, den Refractionswinkel mit r, so ist aus Luft in Glas $\sin i : \sin r = n : 1$, und aus Glas in Luft $\sin i : \sin r = 1 : n$. Für Wasser ist das Brechungsverhältniß nahe $= \frac{4}{3} : 1$.

Wenn ein Lichtstrahl aus einem durchsichtigen Körper in Luft übergeht, so wird die Brechung leicht unmöglich und geht dann in eine Spiegelung über. Da nämlich nach dem Vorigen $\sin BIF : \sin EIA = 1 : 1{,}5$, so folgt $\sin EIA = 1{,}5 \times \sin BIF$, und man begreift, daß der Winkel BIF so groß werden kann, daß $1{,}5 \times \sin BIF$ größer als 1 und daher der Brechungswinkel EIA unmöglich wird. In solchen Fällen kehrt der Strahl, nachdem er bei I angelangt ist, nach der Richtung IB″, welche mit dem Winkel BIF in der-

selben Ebene liegt, wieder in das Glas zurück, so zwar, daß der Winkel FIB″ dem FIB gleich ist.

§. 34.

Diese Brechung ist es nun, auf welcher die Construction unserer optischen Instrumente, der Fernröhre und Microscope, durch Anwendung des Glases beruht. Man muß in dieser Absicht das Glas in einer gewissen Weise formen, und die dem Zwecke entsprechenden Glasgestalten werden nach Kugeloberflächen gebildet und Linsen genannt. Die Linsen haben entweder erhabene (convexe), oder hohle (concave), oder ebene (plane) Flächen und sind theils biconvex, wie a (Taf. III. Fig. 4), oder biconcav, wie b, oder convexconcav (Menisken), wie c, oder planconcav, wie d, oder planconvex, wie e. Ein Glas, das, wie f, zwei parallele ebene Oberflächen hat, heißt ein Planglas.

Der Rand der Linsen wird kreisrund gearbeitet, und zwar so, daß er allenthalben gleich dick ist, in welchem Falle die Linie KC (Taf. III. Fig. 5), welche die Mittelpuncte beider Kugeloberflächen verbindet, und Axe genannt wird, auch durch die Mitte der Linse geht. Ein so geformtes Glas heißt centrirt, und nur genau centrirte Gläser sind zu optischen Werkzeugen brauchbar. Die Mitte einer Linse heißt ihr optischer Mittelpunct.

§. 35.

Die Wirkung einer Linse kann man sich an Fig. 5 (Taf. III.) deutlich machen, wo man sich in der Axe einen leuchtenden Punct A denken mag, welcher Strahlen, wie AI, auf die Linse MN sendet. Der Strahl AP, welcher mit der Axe zusammenfällt, geht ungebrochen durch die Linse hindurch, weil er mit dem Einfallslothe keinen Winkel macht; der Strahl AI aber, welcher mit dem Lothe, d. h. hier mit dem Halbmesser CI, den Einfallswinkel AIH = BIC bildet, erleidet bei I eine Brechung, und zwar so, daß der Brechungswinkel CIG kleiner, als der Einfallswinkel BIC ist. Vermöge der Richtung IE würde er in G mit der Axe zusammentreffen, allein, wenn er bei E aus dem Glase tritt, erleidet er eine zweite Brechung, wobei der Brechungswinkel DEF größer, als der Einfallswinkel DEG ist, unter

dem Einfallslothe K D immer den Krümmungshalbmesser der brechenden Fläche verstanden. Demnach trifft nun der Strahl in F mit der Axe zusammen, wo sich auch alle andern von A aus durch das Glas gehenden Strahlen vereinigen. Der Punct F vertritt also die Stelle eines Gegenstandes, von welchem Strahlen ausgehen, und ist in der That ein Bild von A.

Es entsteht nun die Frage, wo der Strahl zuletzt die Axe treffen werde. Um hierfür die erforderlichen Rechnungen zu führen, setzen wir die Krümmungshalbmesser C I und K E = f und g, die Entfernung A P des Objectes vom Glase = a, die Weite P G, wo der Strahl nach seiner ersten Brechung die Achse treffen würde = k, den Abstand des Bildes F vom Glase, d. i. Q F, = b, die Dicke des Glases P Q = d und das Brechungsverhältniß aus Luft in Glas = n : 1. Hier ist nun zuerst sin HIA : sin GIC = n : 1, also sin GIC = $\frac{1}{n}$ · sin HIA. Im Dreiecke ICG ist aber sin GIC : sin ICQ, d. h., $\frac{1}{n}$ sin HIA : sin ICQ = GC : IG, daher auch sin HIA : sin ICQ = n · GC : IG. Ferner im Dreiecke IAC ist sin HIA : sin ICQ = AC : AI, und daher n · CG : IG = AC : AI, durch welche Proportion k gefunden werden muß. Hier ist nun CG = PG — PC = k — f, und AC = AP + PC = a + f. Statt der Linien AI und IG müssen wir aber näherungsweise AP = a und PG = k setzen, wenn die Auflösung der Gleichung nicht zu schwer werden soll. Wir haben daher n (k — f) : k = a + f : a, oder an (k — f) = k (a + f), und hieraus folgt

$$\text{I. } k = \frac{naf}{(n-1)\,a - f} \text{ oder } \frac{n}{k} = \frac{n-1}{f} - \frac{1}{a}.$$

Hat man k berechnet, so ergiebt sich QG = k — d, was wir mit k′ bezeichnen wollen. Um dann QF zu finden, hat man wieder sin DEG : sin DEF = 1 : n, also sin DEG = $\frac{1}{n}$ sin DEF. Alsdann im Dreiecke EKG die Proportion EG : KG = sin K : sin DEG = sin K : $\frac{1}{n}$ sin DEF, oder EG : n · KG =

sin K : sin DEF; und im Dreiecke EKF die Proportion EF : KF = sin K : sin DEF, daher auch EG : nKG = EF : KF. Es ist aber KG = KQ + QG = g + k', KF = KQ + QF = g + b, und für EG und EF setzen wir näherungsweise QG = k' und QF = b. Daher k' : n (g + k') = b : g + b, oder k' (g + b) = n b (g + k'), woraus folgt:

$$\text{II.}\quad b = \frac{g k'}{(n-1)\, k' + n g} \text{ oder } \frac{1}{b} = \frac{n}{k'} + \frac{n-1}{g},$$

mittelst welcher Formel nun auch b berechnet werden kann. Sie giebt eigentlich nur dann den Werth von QF, wenn der Strahl AI im Einfallspuncte I der Axe unendlich nahe ist, weil nur für diesen Fall AI mit AP, IG mit PG u. s. w. vertauscht werden kann; indessen darf die Oeffnung des Glases noch ziemlich groß genommen werden, ohne daß diese Rechnung merklich unrichtig würde; daher sie in der That die Grundlage für die Dioptrik abgiebt.

Man kann die Formeln noch auf eine weit bequemere Weise darstellen, wenn man die Dicke des Glases d = o setzt, weil sie in der That bei den meisten Gläsern nur gering ist und überdies auch keinen beträchtlichen Einfluß auf die Rechnung hat. Dann wird aber $k' = k$, also $\frac{1}{b} = \frac{n}{k} + \frac{n-1}{g}$, oder wenn man den obigen Werth von $\frac{n}{k}$ substituirt: $\frac{1}{b} = \frac{n-1}{f} + \frac{n-1}{g} - \frac{1}{a}$.

Denken wir uns hier die Entfernung des Objectes a = AP unendlich groß, so verschwindet der Bruch $\frac{1}{a}$ und man erhält $\frac{1}{b} = \frac{n-1}{f} + \frac{n-1}{g}$. Diesen Werth von b nennen wir die **Brennweite** des Glases, und wenn wir dieselbe mit p bezeichnen, so haben wir

$$\text{III.}\quad \frac{1}{p} = \frac{n-1}{f} + \frac{n-1}{g} \text{ oder } p = \frac{f g}{(n-1)(f+g)}.$$

$$\text{IV.}\quad \frac{1}{b} = \frac{1}{p} - \frac{1}{a} \text{ oder } b = \frac{a p}{a - p}.$$

Der Vereinigungspunct paralleler Strahlen oder solcher, die von einem unendlich weit entfernten Puncte kommen, heißt Brennpunct oder Focus.

§. 36.

Die beiden im vorigen §. entwickelten Gleichungen $p = \frac{fg}{(n-1)\,f+g}$ und $b = \frac{ap}{a-p}$ reichen hin, die Lage der Bilder in allen Fällen zu finden, und sind bei der Beurtheilung optischer Instrumente von der höchsten Wichtigkeit. Die Brennweite p ist die Entfernung des Bildes F von einem sehr weit entlegenen Gegenstande A (Taf. III. Fig. 5), wo dann die von A ausgehenden Strahlen als parallel angesehen werden dürfen. Der Abstand des Sonnenbildes dient gewöhnlich zur Abmessung der Brennweite.

Um den Gebrauch der Gleichung $p = \frac{fg}{(n-1)(f+g)}$ etwas zu erläutern, wollen wir das Brechungsverhältniß, wie es für gemeines Glas in runder Zahl statt hat, $n = \frac{3}{2}$ setzen, da dann $p = \frac{2\,fg}{g+f}$ wird. Ist hier $g = f$, oder ist das Glas auf beiden Seiten gleich stark gekrümmt, so wird auch $p = f = g$, d. h., die Brennweite ist dem Krümmungshalbmesser gleich. Hierin ist das Planglas mit inbegriffen, denn man kann seinen Krümmungshalbmesser als unendlich groß ansehen, und daher ist auch p unendlich groß, weßhalb gar keine Vereinigung Statt findet. Die parallel in das Planglas eintretenden Strahlen treten also auch wieder parallel heraus, und es findet folglich gar keine optische Wirkung statt.

Wenn eine Seite des Glases eben ist, so muß ihr Krümmungshalbmesser g allemal unendlich groß gesetzt werden. In der Formel $p = \frac{gf}{(n-1)(g+f)}$ ist dann g statt $g + f$ zu nehmen, da das endliche f gegen das unendliche große g wegfällt, und es wird also $p = \frac{f}{n-1}$,

oder für $n = \frac{3}{2}$, $p = 2f$. Die Brennweite ist also dem doppelten Krümmungshalbmesser gleich.

Wenn Flächen hohl sind, so muß man ihre Krümmungshalbmesser negativ nehmen, weil sie im Bezug auf die Halbmesser erhabener Flächen entgegengesetzte Lage haben. Sind beide Flächen hohl, oder ist die eine hohl und die andere eben, so kommen die Werthe von p ebenso groß heraus, als wenn bei gleichen Krümmungshalbmessern die Flächen convex wären, werden aber negativ. So ist, z. B., wenn $n = \frac{3}{2}$, und $f = g$, aber beide Krümmungshalbmesser negativ sind, $p = -f$. Sobald nun die Brennweite, oder überhaupt der Abstand eines Vereinigungspunctes negativ herauskömmt, findet keine Vereinigung der Strahlen mehr Statt, sondern das, was der Vereinigung entgegengesetzt ist, also Zerstreuung. Um sich dieses deutlich vorzustellen, dient Fig. 6 (Taf. III.), wo die von dem Objecte **A** ausgehenden Strahlen von der hohlen Linse so zerstreut werden, als kämen sie sämmtlich aus **F**, welcher Punct daher der Zerstreuungspunct heißt. In dem Puncte **F** ist also kein eigentliches Bild von **A**, aber das durch das Glas hindurchsehende Auge empfängt die Strahlen doch so, als ob sie von einem bei **F** befindlichen Bilde herkämen, und gewahrt deßhalb ebenfalls bei **F** ein Bild, das man, weil es nicht wirklich vorhanden ist, ein Scheinbild nennt. Luftbilder sind die durch wirkliche Vereinigung der Strahlen entstehenden. — Oft nennt man den Abstand des Zerstreuungspunctes vom Glase für parallel auffallende Strahlen ebenfalls Brennweite.

Hiernach theilen sich die Linsen in Sammelgläser und in Zerstreuungsgläser. Ob ein Glas mit einer hohlen und einer convexen Fläche ein Sammelglas, oder ein Zerstreuungsglas ist, hängt davon ab, ob der Halbmesser der hohlen Fläche größer oder kleiner, als der der convexen ist.

Wenn die Entfernung **a** des Objectes nicht unendlich groß ist, so giebt die Gleichung $b = \frac{a\,p}{a - p}$ in jedem Falle die richtige Lage des Bildes. Sie zeigt, daß, wenn **a** gegen **p** erheblich groß, also $a - p$ von **a** nicht viel un-

terschieden ist, auch b nahe = p sein muß, vorausgesetzt, daß p positiv und also das Glas ein Sammelglas ist. Wenn der Unterschied zwischen a und p nur gering ist, so erhält b einen sehr großen Werth. Ist, z. B., p = 1 Zoll, a = $1\frac{1}{4}$ Zoll, so ist b = 5 Zoll. Wenn a = p wird, d. h., wenn der Gegenstand im Brennpuncte steht, so wird, wegen a — p = 0, b unendlich groß und es treten die Strahlen parallel aus dem Glase. Wird endlich a < p, so wird, wegen des negativen Nenners a — p, auch b negativ, weßhalb nicht mehr Vereinigung, sondern Zerstreuung der Strahlen Statt findet. Man erblickt in diesem Falle, durch Glas hindurchsehend, ein Scheinbild des Gegenstandes, welches immer weiter vom Glase absteht, als der Gegenstand selbst, weil immer b > a herauskommt.

§. 37.

Bisher haben wir immer den Gegenstand als einen in der Axe der Linse befindlichen Punct betrachtet, von welchem das Luft- oder Scheinbild immer wieder nur ein Punct sein kann. Jetzt denke man sich einen auf der Axe senkrecht stehenden Gegenstand AB (Taf. III. Fig. 8) von nicht gar großer Höhe, so wird zunächst in F ein Bild von A entstehen, weil alle von A ausfahrenden Strahlen in F sich wieder vereinigen. Gleichfalls werden sich auch alle von B ausgehenden Strahlen zu einem Bilde sammeln, und es fragt sich nun, wo dieses Bild sein werde? Unter allen von B ausfahrenden Strahlen giebt es einen, welcher äußerst nahe durch die Mitte V des Glases geht und so gut, wie gar nicht gebrochen wird, und auf diesem muß das Bild von B liegen. Man sieht also, daß das Bild von AB die umgekehrte Lage haben muß, und wenn man auf der Axe in F ein Perpendikel Fb bis zum Durchschnitte mit dem Strahle Bb errichtet, so ist b das Bild von B. **Bild und Gegenstand haben also, von der Mitte des Glases aus gesehen, denselben Sehewinkel**, ein Satz, welcher in allen nur erdenklichen Fällen gilt.

Die Größe des Bildes läßt sich hiernach leicht bestimmen, denn es ist VA : VF = a : b = AB : Fb, also $Fb = \frac{b}{a}$ (AB). Man sieht, daß das Bild theils

größer, theils kleiner, als sein Gegenstand sein wird, je nachdem b größer oder kleiner, als a ist. — Bei sehr weit entlegenen Gegenständen bestimmt man die Größe des Bildes lieber aus dem Sehewinkel $BVA = FVb$, wo dann $Fb = VF \cdot tg\,V = b \cdot tg\,V$ ist. Der Sehewinkel der Sonne, z. B., ist = 32 Minuten, und weil dann VF der Brennweite p gleich ist, so ist $Fb = p\,tg\,32' = \frac{p}{108}$.

Bei Zerstreuungsgläsern (Taf. III. Fig. 6) steht das Scheinbild F b des Gegenstandes AB aufrecht, wie unmittelbar erhellt, wenn man durch die Mitte des Glases den Strahl BV zieht. Da nun F b kleiner, als AB ist, so scheinen solche Gläser dem hindurchsehenden Auge die Gegenstände zu verkleinern.

§. 38.

Ehe wir von der Einrichtung der Fernröhre sprechen, wollen wir noch Einiges über die Bedingungen vorausschicken, unter welchen ein Auge einen Gegenstand deutlich wahrnehmen kann. Nun ist es aber eine gemeine Erfahrung, daß die Gegenstände unkenntlich werden, oder nur mit großer Anstrengung wahrnehmbar sind, wenn sie dem Auge zu nahe rücken, und es giebt daher eine Grenze, bis über welche die Gegenstände dem Auge nicht genähert werden dürfen. Diese Grenze nennt man die Weite des deutlichen Sehens, und es wird dieselbe insgemein für gesunde Augen zu 8 Zollen angenommen; wo sie beträchtlich kürzer ist, findet Kurzsichtigkeit Statt; Weitsichtigkeit dagegen, wo sie beträchtlich länger ist, als 8 Zoll.

Von jedem leuchtenden oder beleuchteten Puncte gehen nach allen Richtungen unzählige Lichtstrahlen aus, von denen ein Theil durch die kreisrunde Oeffnung der Augenpupille eindringt, und welche einen sogenannten Strahlenkegel bilden. Jeden Punct des Objectes gewahren wir also mittelst eines solchen Strahlenkegels, aber wenn die Objecte sehr weit entfernt sind, so können wir, ohne merklichen Irrthum, die von jedem Puncte in's Auge dringenden Strahlen als parallel ansehen, und da auch entfernte Objecte, sofern die Sehewinkel nicht zu klein sind, noch deutlich und ohne Anstrengung scharf begrenzt erscheinen,

so nimmt man insgemein an, daß Parallelstrahlen zum deutlichen Sehen erforderlich sind.

Ueber die optische Construction des Auges, wie von den im Innern des Augapfels befindlichen linsenartigen Körpern auf der durch Verästelungen des Sehenerven gebildeten Netzhaut Bilder entworfen werden, giebt jedes bessere Lehrbuch der Physik genügenden Aufschluß.

§. 39.

Der hauptsächlichste Gebrauch einfacher Sammelgläser besteht in der Vergrößerung naher Gegenstände, wo man sie dann gewöhnlich Loupen nennt. Es ist nämlich klar, daß ein Gegenstand um so größer erscheinen muß, je näher er an das Auge gebracht wird; aber da die Annäherung die Weite des deutlichen Sehens nicht überschreiten darf, so hat die Vergrößerung hierin ihre Grenze. Dem wird nun durch convexe Gläser von kurzen Brennweiten abgeholfen, indem man die Objecte nahe in ihren Brennpunct bringt. Hierdurch geschieht es, daß die von jedem Puncte des Objectes kommenden Strahlen aus dem Glase parallel austreten und folglich dem Auge deutliches Sehen gewähren. Der Gebrauch solcher Gläser ist bei Messungen, z. B., bei'm Ablesen der Winkel auf fein getheilten Kreisen, von der höchsten Wichtigkeit.

Um die Vergrößerung, die man mit einem einfachen Glase erhält, zu schätzen, denke man sich im Brennpuncte der Linse ein Object A B (Taf. III, Fig. 7), so sieht man dieses unter dem Winkel A O B, wo O beinahe die Mitte des Glases ist. Ohne Loupe müßte man den Gegenstand nach A' B' in die Weite des deutlichen Sehens bringen, wo es jedoch unter dem kleineren Winkel A'OB' erscheinen würde. Denkt man sich hier ein Object A' B'' mit AB unter einerlei Sehewinkel, so erfährt man durch Vergleichung von A'B' oder A B mit A' B'', wie vielmal die Loupe vergrößert; es ist aber A' B'' so vielmal größer, als AB, als OA in O A' enthalten ist. Wenn man daher mit der Brennweite in die Weite des deutlichen Sehens dividirt, so erfährt man die Vergrößerungszahl. Eine Loupe von $\frac{1}{2}$ Zoll Brennweite vergrößert also sechszehnmal, weil $8 : \frac{1}{2} = 16$.

§. 40.

1) Fernröhre sind Werkzeuge, mit denen man weit entlegene Gegenstände vergrößert und deutlich sehen kann. Das einfachste und für Meßwerkzeuge geeignetste aller Fernröhre ist das astronomische, welches aus einem Sammelglase V (Taf. III. Fig. 8) von langer, und einem dergleichen v von kürzerer Brennweite besteht, die beide um die Summe ihrer Brennweiten voneinander abstehen und in einer Röhre so befestigt sind, daß ihre Axen in dieselbe gerade Linie Vv fallen, die auch zugleich die Axe der Röhre ist.

Das Glas V, welches dem Objecte zugekehrt ist und Objectivglas genannt wird, entwirft in seinem Brennpuncte ein umgekehrtes Bild Fb von dem entfernten Gegenstande AB, und da dieses Bild zugleich im Brennpuncte des Augenglases liegt, so treten seine Strahlen aus dem letzteren parallel heraus, so daß ein bei O in das Rohr sehendes Auge das Bild Fb deutlich wahrnehmen kann. Da die Bilder näher gelegener Objecte weiter vom Objectivglase abstehen, als dessen Brennpunct, so kann man das Ocular verschieben und es in jedem Falle in die rechte Entfernung vom Bilde bringen. Man sieht also, daß das astronomische Fernrohr die Gegenstände verkehrt vorstellt, was indessen ganz und gar kein Nachtheil ist. — Bei jedem Fernrohre ist nun auf folgende Momente zu achten.

2) Die Vergrößerung der Objecte ist bei'm astronomischen Fernrohre so vielfach, als die Brennweite vF des Oculars in der des Objectivs VF enthalten ist. Aus der Mitte V des Objectivs würden nämlich der Gegenstand AB und sein Bild Fb unter gleichem Sehewinkel erscheinen; indem man aber das Bild durch das Ocular betrachtet, erscheint es unter dem Winkel bvF, wo v die Mitte des Oculars ist, und die Vergrößerung ist also so vielfach, als der Winkel V in v enthalten ist. Diese Winkel verhalten sich aber, weil sie nur klein sind, wie vF und VF, so daß $\frac{VF}{vV}$ das wahre Maß der Vergrößerung ist.

Man besitzt ein sehr leichtes Mittel, die Vergrößerung eines Fernrohres zu erfahren, welches zugleich bei allen Arten von Fernröhren anwendbar ist, nur nicht bei

solchen, welche ein hohles Ocular haben (S. Nr. 11). Es besteht in Folgendem: Man ziehe das Fernrohr so weit aus bis man einen entfernten Gegenstand deutlich sieht. Tritt man dann in einige Entfernung vom Oculare, so gewahrt man ein kleines lichtes Kreischen auf demselben, welches nichts anderes als ein Bild des Objectives ist oder vielmehr seiner Oeffnung. Man kann dieses Bildchen auf ein durchsichtiges Blättchen fallen lassen und wenn es durch Annäherung oder Entfernung des Blättchens seine größte Deutlichkeit erhalten hat, seinen Durchmesser messen. So vielmal nun dieser im Durchmesser der Objectivöffnung enthalten ist, eben so vielmal vergrößert das Fernrohr.

Denn ist m die Vergrößerungszahl, p die Brennweite des Oculares, so ist m p die Brennweite des Objectives, und der Abstand beider Linsen bei richtig ausgezogener Röhre ist $l = m\,p + p = (m + 1)\,p$. Steht dann weiter das Bild des Objectives in der Entfernung b vom Oculare, so ist $b = \frac{(m + 1)\,p \cdot p}{(m + 1)\,p - p} = \frac{m + 1}{m}\,p$. Der Durchmesser der Objectivöffnung sei x, so ist der ihres Bildes $= \frac{b}{l}\,x = \frac{1}{m}\,x$, also der Durchmesser des Bildes ein so vielster Theil vom Objectivdurchmesser, als das Fernrohr vergrößert.

Um die Messung des Bildchens mit Schärfe ausführen zu können, hat Ramsden sein Dynamometer gefertigt, bei welchem eine kleine Röhre, in welcher ein Hornblättchen mit feiner Theilung befestigt ist, auf das Ocular gesetzt wird. Das Bild und die Theilung werden mit einer scharfen Loupe betrachtet. Außerdem kann aber obiger Satz schon dienen, eine ohngefähre Vorstellung von der Vergrößerung eines Fernrohres durch bloße Schätzung nach dem Augenmaß zu erhalten.

3) Das Gesichtsfeld ist der Sehewinkel des größten Gegenstandes, den man durch das Fernrohr noch übersehen kann. Zieht man vom Rande des Augenglases nach der Mitte des Objectivs den Strahl D V, so bildet dieser mit der Axe den Winkel v V D = A V B, welcher das halbe Gesichtsfeld ist; denn wenn bei A ein Gegenstand A B′ sich befände, der noch höher wäre, als A B,

so würde der von B' durch die Mitte des Objectivs gezogene Strahl B'V das Ocular gar nicht treffen und folglich auch nicht in das Auge gelangen, so daß also B' nicht gesehen werden könnte.

Es ist also sehr leicht, aus dem Abstande beider Gläser und der Breite des Augenglases das Gesichtsfeld zu berechnen. Gewöhnlich wird dasselbe etwas beschränkt durch eine im Brennpuncte F des Oculars angebrachte kreisrunde Oeffnung (Blendung), die den Zweck hat, theils ein scharf begrenztes Gesichtsfeld zu geben, theils unregelmäßig zerstreute Strahlen abzuhalten, damit sie der Deutlichkeit des Bildes keinen Eintrag thun. Man muß also das Gesichtsfeld aus der Oeffnung der Blendung und ihrem Abstande vom Objectivglase berechnen; die Oeffnung des Objectivs hat hierauf keinen Einfluß.

4) Der Ort des Auges, oder der Punct O der Axe, wo man das Auge hinzuhalten hat, ist da, wo die durch die Mitte des Objectivs nach dem Rande des Oculars gehenden Strahlen, wie VD, nach ihrem Austritte aus dem Oculare die Axe schneiden. Um diesen Punct zu finden, braucht man sich bloß in V ein Object vorzustellen und aus der Brennweite des Oculars, nebst dem Abstande des Objectes vV, die Vereinigungsweite vO des Strahles VD zu berechnen. Ein Auge nun, das sich in dem Puncte O befindet, empfängt offenbar alle durch das Ocular gelangenden Strahlen mit einem Male und übersieht das Gesichtsfeld mit einem Blicke.

5) Die Helligkeit des Fernrohrs nimmt zu in dem Verhältnisse, als die Oeffnungsfläche des Objectivs größer wird, also wie das Quadrat des Oeffnungsdurchmessers; denn durch eine doppelt so große Fläche können offenbar doppelt soviel Strahlen eindringen, als durch die einfache, u. s. w. Ist der Oeffnungsdurchmesser der Pupille (etwa $\frac{1}{10}$ Par. Zoll) = e, und der des Objectivs = d, so giebt der Quotient $\frac{d^2}{e^2}$ an, wieviel mehr Licht in das Fernrohr kommt, als in das bloße Auge. So vielmal würde man auch die Gegenstände durch das Fernrohr heller sehen, als mit bloßem Auge, wenn das Fernrohr gar nicht vergrößerte. Aber durch die Vergrößerung wird die Lichtstärke bedeutend wieder herabgebracht, und zwar im Verhältnisse des Quadrats der Vergrößerungs-

zahl, weil, z. B., bei zweifacher Vergrößerung die Lichtstrahlen offenbar in einen viermal größeren Raum zerstreut werden und daher die Helligkeit auch viermal kleiner werden muß. Ist die Vergrößerungszahl m, so hat man für die Helligkeit des Fernrohres den Ausdruck $\frac{d^2}{e^2\ m^2}$.

Wäre, z. B., d = 2 Zoll, e = $\frac{1}{10}$ Zoll und m = 30, so würde man die Lichtstärke des Fernrohres = $\frac{4}{9}$ von der mit bloßem Auge finden. Weil die Gläser immer etwas Licht verschlucken, so ist die Helligkeit noch etwas geringer zu schätzen.

Wird der Ausdruck $\frac{d^2}{e^2\ m^2} = 1$, so wird die Helligkeit der natürlichen, d. h. der mit bloßem Auge gleich. Aber größer als die natürliche kann die Helligkeit des Fernrohres nicht werden. Denn die Strahlen, welche von demselben Puncte durch das Objectiv gelangen, vereinigen sich wieder im Brennpuncte, divergiren von da bis zum Ocular und treten aus diesem parallel heraus. Sie bilden also bei'm Austritt einen Cylinder, dessen Durchmesser nicht größer sein darf, als die Oeffnung der Pupille e. Hat er gerade diesen größten Durchmesser e, so ergiebt sich mit Leichtigkeit, daß die Oeffnung des Objectives $\frac{p}{p'}$ e = me sein muß, wo p die Brennweite des Objectives p' die des Oculares bedeutet. Dann ist die Helligkeit der natürlichen gleich, aber eine größere Oeffnung des Objectives als me nützt nun durchaus nichts mehr, weil dann das allerdings in größerer Menge durch das Objectiv dringende Licht nicht mehr in's Auge eingehen kann, indem dann der Strahlencylinder am Austritt größer als die Oeffnung der Pupille werden muß.

6) Die Deutlichkeit des Fernrohres hängt nun von seiner Helligkeit und seiner Vergrößerung ab. Die letztere könnte man ungeheuer hoch bringen, wenn man zu einem Objectivglase von etwas langer Brennweite ein Ocular von sehr kurzer Brennweite setzte, aber hiermit würde auch die Helligkeit bis zum Unkenntlichwerden der Objecte verschwinden, wenn man dieselbe nicht zugleich durch eine größere Oeffnung des Objectivs wieder zu ersetzen bedacht wäre. Aber die Oeffnung des Objectivs

wird durch zwei Umstände beschränkt, welche um so nachtheiliger auf die Deutlichkeit des Fernrohres wirken, je größer die Oeffnung selbst wird.

7) Die eine Ursache, wodurch die von Linsengläsern erzeugten Bilder undeutlich werden, ist die Abweichung wegen der Kugelgestalt der Linsen, mit welcher es folgende Bewandtniß hat. Die Strahlen, welche von einem Puncte **A** (Taf. III. Fig. 8) aus auf das Glas fallen, vereinigen sich nicht alle in dem Puncte **F**, in welchem die sehr nahe an der Axe einfallenden zusammentreffen, sondern die am Rande der Linse hindurchgehenden, wie **A E**, kommen in einem dem Glase näher gelegenen Puncte f zusammen. Hierdurch geschieht es, daß das Bild von **A** nicht ebenfalls wieder ein Punct **F** ist, sondern in einen Kreis vom Halbmesser **Fg** übergeht. Dieser Kreis ist nun an sich sehr klein, kann aber doch, durch das vergrößernde Ocular betrachtet, eine merkliche Ausdehnung gewinnen und muß dann sehr störend auf die Deutlichkeit wirken. Man darf daher die Oeffnung des Objectives nur so groß, und die Vergrößerung durch das Ocular nur so stark nehmen, daß der Abweichungskreis **Fg** für das Auge von einem Puncte nicht zu unterscheiden ist *).

---

*) Um die Sache durch ein Beispiel etwas näher zu erläutern, bemerken wir, daß, wenn p die Brennweite, n das Brechungsverhältniß und x den Oeffnungshalbmesser einer Linse bedeutet, bei solchen Linsen, die auf beiden Seiten gleich stark gekrümmt sind, die Kugelabweichung fF (Taf. III. Fig. 8) $= \frac{4n^3 - 4n^2 - n + 2}{8n(n-1)^2} \cdot \frac{x^2}{p}$ ist, was für $n = \frac{3}{2}$, $fF = \frac{5}{3} \cdot \frac{x^2}{p}$ giebt. Hieraus findet man dann den Halbmesser F g des Abweichungskreises durch die Proportion $fV : VE = p : x = Ff : Fg$, also $Fg = \frac{(Ff) \cdot x}{p} = \frac{5}{3} \cdot \frac{x^3}{p^2}$. Wäre, z. B., p = 3 Fuß = 36 Zoll und x = 1 Zoll, so wäre $Ff = \frac{5}{3} \cdot \frac{1^2}{36} = \frac{5}{108}$ Zoll $= \frac{5}{9}$ Linien, und dann $Fg = \frac{\frac{5}{9} \times 1}{36} = \frac{5}{324}$ Linien. Dieses ist dem unbewaffneten Auge nicht sichtbar, würde aber, durch eine Linse von 1 Zoll Brennweite betrachtet, schon merklich genug werden. Nimmt man die Oeffnung des Glases nur halb so groß, so würde f F auf den vierten, F g aber auf den achten Theil herabgebracht. Diese Andeutung muß hier genügen, und für die gründliche Erörterung auf die Lehrbücher der Dioptrik verwiesen werden.

8) Weit nachtheiliger, als die Kugelabweichung, wirkt die Farbenzerstreuung. Der weiße Lichtstrahl besitzt nämlich die Eigenschaft, durch die Brechung in die sieben Regenbogenfarben zerlegt zu werden, und zwar nach dem Gesetze, daß jedem Farbenstrahle sein eigenes Brechungsverhältniß zukommt, dem violetten das größte, dem rothen das kleinste. Hierdurch geschieht es, daß das durch das Objectivglas verursachte Bild eines Punctes nicht ebenfalls wieder ein Punct ist, sondern daß eine Reihe farbiger Bilder sich hintereinander lagern, das violette dem Glase zunächst in f, das rothe am weitesten davon in F. Zwischen ihnen liegen die anderen lebhafteren, namentlich das gelbe, welches man daher eigentlich durch das Ocular betrachtet. Aber um dasselbe herum zerstreuen sich die Strahlen der übrigen Bilder in einen Kreis, dessen Größe der Oeffnung des Objectivglases proportional ist, und hierdurch entsteht beträchtliche Undeutlichkeit *).

---

*) Bedeutet n das Brechungsverhältniß für die gelben Strahlen, so hat man für die Brennweite nach §. 35 die Gleichung: $\frac{1}{p} = \frac{n-1}{f} + \frac{n-1}{g}$. Ist dann p′ die Brennweite für die violetten Strahlen, und wird das Brechungsverhältniß dieser Strahlen mit $n + dn$ bezeichnet, so hat man $\frac{1}{p'} = \frac{n-1+dn}{f} + \frac{n-1+dn}{g}$, da die Halbmesser f und g immer dieselben bleiben. Folglich ist $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{p-p'}{p'p} = dn\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g}\right) = \frac{dn}{(n-1)p'}$, oder $\frac{p-p'}{p'} = \frac{dn}{n-1}$. Bezeichnen wir $p - p'$ mit dp und setzen im Nenner p statt p′, so wird $dp = \frac{dn}{n-1} \cdot p$. Bei einer gewissen Glasart fand man, z. B., für die gelben Strahlen $n = 1{,}53$ und für die violetten $n + dn = 1{,}55$, also $dn = 0{,}02$ und $dp = \frac{0{,}02 \times p}{1{,}53 - 1} = \frac{2}{53}\,p$. Um so viel ist nämlich die Brennweite der violetten Strahlen kürzer, als die der gelben p, und wenn daher $p = 53$ Fuß ist, so beträgt der Unterschied schon 2 Fuß. Ist dann f (Taf. III., Fig. 8) der Brennpunct für die violetten und F der für die gelben Strahlen, so ist $Ff = \frac{2}{53}\,p$; und wenn der Strahl AE nach dem Rande des Glases geht, dessen halbe Oeffnung $= x$ sein mag, so hat man für den Halbmesser des Abweichungskreises Fg die Proportion $fV : VE = p : x = fF : Fg = \frac{2}{53}\,p : Fg$, woraus $Fg = \frac{2}{53}\,x$ folgt. Der Durchmesser des Abweichungskreises, der

Man muß deßhalb, um der Deutlichkeit nicht zu sehr zu schaden, die Oeffnung des Objectives im Vergleich zu seiner Brennweite bedeutend klein nehmen, und da hierdurch die Lichtstärke und folglich auch die Vergrößerung beschränkt wird, so kann man etwas starke Vergrößerung nur durch Fernröhre von enormer Länge erzwingen. Die Erfahrung hat gezeigt, daß ein Objectivglas von 1 Fuß Brennweite nur ½ Zoll Oeffnung und etwa 12fache Vergrößerung aushält. Die doppelte Vergrößerung erfordert ein 4mal, die dreifache ein 9mal längeres Rohr u. s. w.

9) Frei von den Fehlern der Farbenzerstreuung und der Kugelabweichung sind die achromatischen Fernröhre, welche jetzt an allen besseren Meßinstrumenten angebracht sind. Sie unterscheiden sich von dem gewöhnlichen Fernrohre nur durch das eigens construirte Objectivglas (Tafel III., Fig. 10), welches aus zwei aufeinander liegenden Linsen besteht. Die vordere Linse A besteht aus dem sogenannten Kronglase und ist ein Sammelglas, welches für sich seine Bilder im Brennpuncte F entwerfen würde. Sobald aber die Strahlen aus der ersten Linse herausgetreten sind, werden sie von der zweiten, welche ein Zerstreuungsglas ist und aus Flintglas besteht, aufgenommen und weniger convergirend gemacht, so daß sie nicht in F, sondern erst in F′ zusammenlaufen und die Verbindung wie ein einziges Sammelglas von der Brennweite VF′ wirkt. Deßhalb muß die Zerstreuungsweite der Flintglaslinse größer sein, als die Brennweite der Kronglaslinse.

Flintglas und Kronglas unterscheiden sich hinsichtlich ihrer optischen Natur dadurch, daß ersteres die verschiedenfarbigen Strahlen des weißen Lichtes weit stärker zerstreut, als das letztere, und hierdurch wird die Flintglaslinse geschickt, die Zerstreuung der Kronglaslinse wieder zu vernichten. Nur die Rechnung kann hierüber bestimmte Nachweisung geben *), und es ergiebt sich, daß die Brenn-

---

eigentlich ein Punct sein sollte, sofern er das Bild eines Punctes A vorstellt, beträgt also beinahe den 26sten Theil von der Oeffnung des Objectives, woraus der nachtheilige Einfluß der Farbenzerstreuung zur Genüge hervorgeht.

*) Es kommt hier zunächst darauf an, die Brennweite VF′ = r des zusammengesetzten Objectives zu berechnen. Das Glas B empfängt aber die Strahlen so, als ob sie in dem Brennpuncte F des Glases A, dessen Brennweite VF = p sein mag, zusammen-

weiten beider Linsen nach einem constanten von der optischen Beschaffenheit der Glasarten abhängigen Verhältnisse gewählt werden müssen. Da aber dieselbe Brennweite durch gar verschiedene Krümmungshalbmesser hervorgebracht werden kann, so liegt hierin zugleich die Möglichkeit, die Krümmungen beider Linsen so zu wählen, daß auch die Kugelabweichung wegfällt.

---

laufen wollten. Läge dieser Punct F auf der andern Seite in G in demselben Abstande VG $= p$, und wäre das Glas B ein Sammelglas von der Brennweite q, so würde man die Vereinigungsweite VF′ $= r$ durch die Formel $\frac{pq}{p-q}$ (§. 35) zu berechnen haben, oder man hätte $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. Da nun aber VF die entgegengesetzte Lage von VG hat und das Glas B ein Zerstreuungsglas ist, so muß sowohl p als auch q negativ genommen werden, woraus $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ folgt. Soll also die Verbindung beider Linsen als Sammelglas wirken, so muß $\frac{1}{r}$ positiv und mithin $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$ oder $q > p$ sein, d. h., die Flintglaslinse muß eine größere Brennweite haben, als die Kronglaslinse.

Wie nun aber auch die Brechungsverhältnisse der verschiedenfarbigen Strahlen bei beiden Linsen und hiernach p und q sich ändern, so muß doch immer r oder $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ denselben Werth behalten; der Unterschied der Aenderungen von $\frac{1}{p}$ und $\frac{1}{q}$ muß also $= 0$ sein. Sind aber die Brechungsverhältnisse der Linsen A und B für einen gewissen Farbenstrahl m und n und ändern sich dieselben für einen andern um dm und dn, so ändert sich $\frac{1}{p}$ um $\frac{dm}{(m-1)\,p}$ und $\frac{1}{q}$ um $\frac{dn}{(n-1)\,q}$, wie aus der vorigen Anmerkung hervorgeht, und man hat $\frac{dm}{(m-1)\,p} - \frac{dn}{(n-1)\,q} = 0$, also $p : q = \frac{dm}{m-1} : \frac{dn}{n-1}$. Dieses ist also das Verhältniß der Brennweiten der zusammengesetzten Linse, wenn selbige achromatisch sein soll. Man nennt den Quotienten $\frac{dm}{m-1}$ oder $\frac{dn}{n-1}$ die zerstreuende Kraft. Da nun $q > p$ sein muß, so folgt, daß das Glas, woraus die Zerstreuungslinse besteht, eine größere zerstreuende Kraft haben muß, als die Materie der Sammellinse, wie dieses bei'm Flint- und Kronglase der Fall ist.

Solche achromatische Objectivgläser vertragen nun bei kurzer Brennweite große Oeffnungen und stark vergrößernde Oculare; die Vergrößerung findet aber dennoch in der Helligkeit und den noch übrigen Resten der Farbenzerstreuung und Kugelabweichung ihre Grenzen.

10) Das einfache astronomische Fernrohr erhält oft einige Abänderungen hinsichtlich des Oculars, welches meistentheils aus zwei Linsen besteht und dann ein zusammengesetztes heißt. Ein solches ist, z. B., das nach Ramsden benannte, welches aus zwei Planconvexlinsen in der Stellung (Taf. III., Fig. 9) besteht, und welche zusammen ebenso wirken, wie ein Sammelglas von kürzerer Brennweite. Der Hauptzweck dieser Vorrichtung ist die Erlangung eines größeren Gesichtsfeldes; denn da nun die einzelnen Linsen größere Brennweiten bekommen dürfen, so können auch ihre Oeffnungen größer genommen werden, wodurch nothwendig das Gesichtsfeld größer wird.

Ein anderes solches Doppelocular besteht aus zwei Sammellinsen B und C (Taf. III., Fig. 11), von denen die nach dem Objectiv A gekehrte B dreimal so lange Brennweite hat, als C, und die beide um die doppelte Brennweite von C voneinander abstehen. Sie sind beide so gestellt, daß das vom Objectiv A entworfene verkehrte Bild gerade auf C fallen würde; ehe es aber zur Wirklichkeit kommt, werden seine Strahlen vom Glase B aufgenommen und schneller convergirend gemacht, wodurch das wirkliche Bild genau in die Mitte zwischen B und C, also in den Brennpunct von C zu stehen kommt, durch welches Glas es denn deutlich gesehen wird. Der Zweck dieser Vorrichtung besteht ebenfalls in der Erlangung eines größeren Gesichtsfeldes und besonders einer größeren Deutlichkeit der Gegenstände am Rande des Gesichtsfeldes, welche sonst leicht mit farbigen Säumen umgeben scheinen. Doch hält man dieses Ocular für nicht wohl geeignet, ein Mikrometer oder Fadenkreuz daran anzubringen.

11) Fernröhre, welche die Gegenstände aufrecht vorstellen, werden terrestrische genannt und nur selten bei Meßwerkzeugen verwendet, theils weil sie länger werden müssen, als astronomische, theils auch, weil sie mehr als zwei Ocularlinsen erfordern und deßhalb weniger Helligkeit besitzen. Die Aufrechtstellung des Bildes kann auf unzählig verschiedene Weise bewirkt werden, z. B. dadurch,

daß man zu dem aus den Linsen A und B (Taf. III., Fig. 13) bestehenden astronomischen Fernrohre noch zwei andere Linsen C und D von gleicher und nicht gar langer Brennweite hinzusetzt; diese bilden gleichsam ein zweites astronomisches Fernrohr und stellen das verkehrte Bild des ersten wieder aufrecht dar. Gewöhnlich giebt man den Linsen B, C und D gleiche Brennweite und stellt sie so, daß immer je zwei um die Summe ihrer Brennweiten abstehen. Weit besser sind jedoch die Einrichtungen mit vier Augengläsern, deren Berechnung jedoch schon zu den schwierigen Problemen der Dioptrik gehört.

Diejenigen Fernröhre, welche außer dem Objectivglase nur ein einziges hohles Ocular haben und den Gegenstand aufrecht darstellen, sind für die practische Meßkunst ganz nutzlos, da sich bei ihnen kein Fadenkreuz anbringen läßt. Der Abstand beider Linsen ist bei solchen Fernröhren (Operngucken) der Differenz ihrer Focalweiten gleich.

§. 41.

Glatte Körper, z. B., polirte Metalle, werfen die darauf fallenden Lichtstrahlen wieder zurück und bilden dadurch Spiegel. Man hat hohle, erhabene und ebene Spiegel, von denen die ersteren auf ganz ähnliche Weise geformt sind, als die Oberflächen der Glaslinsen; aber nur die ebenen Spiegel werden bis jetzt in der Meßkunst mit Vortheil angewendet.

Das Gesetz der Spiegelung ist sehr einfach. Es sei MN (Taf. III., Fig. 15) ein ebener Spiegel und AB ein darauf fallender Strahl, welcher in der Richtung BD zurückgeworfen wird. Zieht man im Einfallspuncte B auf die Spiegelfläche ein Loth EB, so liegt dasselbe mit dem einfallenden Strahl AB und dem reflectirten BD in derselben Ebene, und es ist der Reflexions- oder Zurückwerfungswinkel EBD dem Einfallswinkel ABE gleich.

Nach diesem Gesetze ist es leicht, die Wirkung eines ebenen Spiegels, welcher bekanntlich die Objecte hinter sich in ihrer wahren Gestalt, Lage und Größe sehen läßt, zu erklären. Von dem Objecte A falle zuerst ein Strahl AG senkrecht auf die Spiegelfläche, so wird derselbe in sich selbst zurückgeworfen, weil er mit dem Einfallslothe gar keinen Winkel macht. Ein anderer schief auffallen-

der Strahl AB aber wird nach BD reflectirt und schneidet verlängert die Verlängerung von AG in A'. Von diesem Puncte scheinen alle von A ausgegangenen und vom Spiegel reflectirten Strahlen herzukommen, also daß in A' ein Bild von A gesehen wird. — Weil das Loth EB mit AA' parallel ist, so sind die Winkel DBE, BAG und BA'G gleich, die rechtwinklichen Dreiecke ABG und A'BG also congruent und daher A'G = AG. Das Bild A' liegt also eben so weit hinter der Spiegelfläche, als das Object A vor derselben, und die zwischen Bild und Object gezogene Gerade AA' steht senkrecht auf der Spiegelfläche. Hieraus folgt leicht, daß die Abbildung A'X' mit ihrem Gegenstande AX ganz identisch sein muß.

Hohle Spiegel machen eben solche umgekehrte und in der Luft schwebende Bilder wie Sammelgläser, sind aber frei von der Farbenzerstreuung und haben eine weit geringere Kugelabweichung. Werden diese Spiegelbilder durch Loupen betrachtet, so hat man Spiegeltelescope, die auf mancherlei Weise eingerichtet sind. Obgleich sie eine größere Deutlichkeit nur mit etwas weniger Lichtstärke geben, als achromatische Fernröhre, so macht man doch von ihnen, besonders wegen des leichten Anlaufens der Metallspiegel in der Luft, bei Meßinstrumenten keinen Gebrauch. Jedoch dürften die mehrfach in Anregung gebrachten und neuerdings wieder von mir vorgeschlagenen und gründlich untersuchten Telescope mit Glasspiegeln bedeutende Vortheile gewähren, da sie bei sehr geringer Länge enorme Vergrößerungen mit Deutlichkeit aushalten.

§. 42.

Zusammengesetzte Microscope werden in der Geodäsie überall nicht gebraucht; doch finden sie mitunter bei sehr feinen Abmessungen Anwendung. Ihre Construction ist der der Fernröhre ganz ähnlich. Ein Objectivglas A (Taf. III., Fig. 12), von kurzer Brennweite, etwa zu ½ Zoll, entwirft von dem Gegenstande x, der etwas weiter von dem Glase A entfernt ist, als dessen Brennpunct, ein verkehrtes und vergrößertes Bild y (§. 36 und 37), und dieses wird durch ein einfaches oder zusammengesetztes Ocular B betrachtet und dadurch noch mehr vergrößert.

§. 43.

Die Fernröhre unterstützen also das Auge bei'm Sehen nach entfernten Gegenden, aber sie erhalten ihren Werth für die Geodäsie erst durch das **Fadenkreuz**, durch welches die genaue Einstellung (Pointirung) der Scheare auf einen beliebigen Gegenstand möglich gemacht wird. Es besteht aus einem im Rohre befestigten Ringe (Taf. III., Fig. 14), zwischen welchem zwei sehr feine, im Mittelpuncte des Ringes sich senkrecht kreuzende Fäden ausgespannt sind. Statt des einen verticalen Fadens findet man oft auch deren zwei in gleichen, aber geringen Abständen vom Mittelpuncte des Ringes, zwischen welche das einzuvisirende entfernte Object gefaßt wird. Das Fadenkreuz kommt in den Brennpunct des Oculars so zu stehen, daß seine Ebene gegen die Axe des Rohres senkrecht ist und diese Axe zugleich durch den Mittelpunct des Ringes geht. Hierdurch wird also das Fadenkreuz mit den im Fernrohre gesehenen Objecten zugleich deutlich wahrgenommen, und man kann daher die Axe des Fernrohres mit großer Genauigkeit auf einen beliebigen Gegenstand richten, indem man dessen Bild mit einem der Fäden oder mit beider Durchschnittspuncte zusammenfallen läßt. Hierbei findet auch nicht die geringste Unsicherheit in der angenommenen Richtung Statt, weil Bild und Visirfaden genau zusammenfallen und folglich bei einer etwaigen Bewegung des Auges nicht voneinander abweichen können. Wichen sie unter solcher Bedingung dennoch voneinander ab, so fielen Bild und Fadenkreuz nicht genau aufeinander, und dann müßte der Fehler durch Verrückung des letzteren corrigirt werden.

Der Abstand des Fadenkreuzes vom Oculare wird durch Versuche ermittelt, indem man ersteres so lange hin und her rückt, bis es durch das Ocular ganz deutlich gesehen wird. Jedes besondere Auge erfordert, in der Regel, einen besonderen Abstand.

Weil die Fäden durch das Ocular sehr vergrößert werden, so müssen sie auch sehr fein sein. Metallfäden sind meistens zu dick; am gewöhnlichsten bedient man sich feiner Spinnewebefäden. Neuerdings hat man Golddraht so fein ausziehen gelernt, daß er mit bloßem Auge nicht mehr zu erkennen ist, und solche Fäden verdienen also bei stark vergrößernden Ocularen den Vorzug.

Bei Nachtzeit sind die Fadenkreuze nicht mehr sichtbar, weßhalb man genöthigt ist, das Innere des Fernrohres auf eine geschickte Art mit einer Lampe zu erleuchten, so jedoch, daß durch das Lampenlicht die pointirten Sterne oder entfernten Flammen nicht unsichtbar werden. Um das Fadenkreuz gehörig zu befestigen, sind auf dem Ringe da, wohin die Fäden zu liegen kommen, Linien eingegraben, in welche die Fäden eingelegt und mit erhitztem Wachse befestigt werden. Spinnefäden erhält man entweder aus Spinnennestern oder dadurch, daß man eine kleine Spinne mit dem Ende eines Drahtes aufnimmt und sie dann herabfallen läßt. Man muß sie aber vorher untersuchen, ob sie gehörig fein und frei von Knötchen sind. Sind sie eingespannt, so behaucht man sie, um zu erfahren, ob sie den erforderlichen Grad der Spannung haben, was der Fall ist, wenn sie nach dem Behauchen noch straff bleiben.

Werden in dem Ringe mehre parallel nebeneinander liegende Fäden in gleichen Abständen eingezogen, so heißt solche Vorrichtung ein Micrometer, wobei die parallelen Fäden gewöhnlich noch von einem anderen in der Mitte senkrecht durchschnitten werden. Statt der Fäden kann man sich auch eines Planglases bedienen, worauf sehr feine Linien eingerissen sind. Der Zweck des Micrometers besteht in der Messung kleiner Sehewinkel, die man aus der Anzahl der Fäden schließt, über welche das Object im Fernrohre ausgedehnt erscheint. Begreiflicher Weise muß man vorher den Sehewinkel eines Gegenstandes, der gerade von einem Faden bis zum nächsten reicht, durch Versuche bestimmt haben. Die Micrometer, deren es noch viele andere von verschiedener Einrichtung giebt, werden jedoch bloß in der Astronomie, nicht aber in der Geodäsie gebraucht.

§. 44.

Ein wichtiger Gegenstand für die practische Geometrie sind ferner die verschiedenen Längenmaße verschiedener Staaten und ihre Vergleichung unter einander. — Es kann hier jedoch unsere Absicht nicht sein, die zahllosen und meistens unsichern Maßbestimmungen älterer Zeiten anzuführen, sondern wir müssen uns lediglich auf das beschränken, was in der neuesten Zeit darüber festgesetzt worden ist.

Bekanntlich kann man jede beliebige Länge zur Maßeinheit machen, aber es war am Natürlichsten, daß die Menschen, bei denen weder die Wissenschaften noch die bürgerlichen Verhältnisse zur Entwickelung gekommen waren, jene Maßeinheit von gewissen Theilen ihres Körpers abnahmen. Auf solche Weise wurde z. B. der Fuß eines erwachsenen Menschen bei fast allen europäischen Völkern als Längenmaß benutzt. Als aber die Verhältnisse sich zu ordnen begannen und der Verkehr geregelter wurde, konnte ein solches ungefähres Maß nicht mehr genügen, und es wurden daher von den Obrigkeiten bestimmte Normen festgesetzt. Weil aber hierin jeder Staat, ja fast jede einzelne Stadt ihrer Willkür folgte, so entstand eine große Verschiedenheit der in verschiedenen Ländern und Städten gebräuchlichen Maße, was oft zu großen Verwirrungen führte und nachtheilig auf den Verkehr wirkte.

Hierdurch und besonders auch durch die Fortschritte der mathematischen und physikalischen Wissenschaften wurde die Idee eines allgemeinen, bei allen Völkern gebräuchlichen Maßes rege gemacht. Dieses allgemeine Maß darf kein willkürlich gewähltes sein, sondern muß sich auf eine in der Natur vorhandene unwandelbare Größe gründen, damit man es, wenn es etwa verloren gegangen sein sollte, jederzeit mit Sicherheit wiederfinden kann, so wie etwa das Zeitmaß durch die Dauer der Axenumdrehung der Erde von der Natur selbst gegeben ist. Aber eine solche Größe ist schwer in der Natur aufzufinden, und es sind im Bezug darauf eigentlich nur zwei Vorschläge möglich. Man kann nämlich entweder die Länge des Secundenpendels an einem gewissen Orte der Erde, z. B. unter dem Aequator oder unter 45° Breite, zum Normalmaße machen, oder ein solches von den Dimensionen der Erde ableiten, indem man z. B. einen bestimmten Theil vom Umfange des Aequators oder eines Meridians nimmt. Daß nach beiden Vorschlägen ein unveränderliches Maß erhalten werde, ist ohne Weiteres klar; aber dieses Maß läßt sich nicht überall und nicht ohne große Mühe finden.

In Frankreich hat man seit dem Beginne der Revolution ein Normalmaß auf den zweiten der obgedachten Vorschläge gegründet. Die Maßeinheit heißt Meter (mètre) und ist dem 10000000sten Theile eines

Erdmeridianquadranten gleich. Hieraus werden andere Einheiten nach dem Decimalsysteme abgeleitet, und zwar ist 1 Decimeter = $\frac{1}{10}$ Meter, 1 Centimeter = $\frac{1}{100}$ Meter = $\frac{1}{10}$ Decimeter, 1 Millimeter = $\frac{1}{1000}$ Meter = $\frac{1}{10}$ Centimeter; ferner 1 Decameter = 10 Meter; 1 Hectometer = 100 Meter = 10 Decameter, 1 Kilometer = 1000 Meter = 10 Hectometer, und 1 Myriameter = 10000 Meter = 10 Kilometer.

Begreiflich mußte hier die Länge eines Erdmeridianquadranten zuerst nach einem bekannten Maße gefunden werden, und hierzu diente die vormals nnd auch jetzt noch bei wissenschaftlichen Angaben sehr gebräuchliche Toise, auch Toise von Peru genannt, deren sechster Theil den Pariser Fuß ausmachte, den man wieder in 12 Zoll, jeden zu 12 Linien theilte. Da es unmöglich ist, die Länge des ganzen Quadranten unmittelbar oder durch Dreiecksverbindungen zu messen, so mußte dieselbe aus den Gradmessungen mit Hülfe der Abplattung berechnet werden, wofür der von Dünkirchen bis Barcelona mit großer Sorgfalt gemessene Meridianbogen von beiläufig 12° die Hauptgrundlage abgab. Wegen der Unsicherheit der Abplattung und der bei practischen Operationen unvermeidlichen Fehler bleibt zwar die Länge des Meters bis auf einige Hundertstel der Pariser Linie unsicher; da man aber eine definitive Bestimmung haben mußte, so wurde durch ein Decret vom 19. Frimaire im Jahre 8 der Republik festgesetzt, daß das legale Meter 443,296 Pariser Linien betragen sollte, wornach also der Meridianquadrant zu 5130740 Toisen angenommen wurde. Hierzu kommt aber noch eine Rücksicht wegen der Ausdehnung metallener Maßstäbe durch die Temperatur. Bei der französischen Gradmessung und der daraus berechneten Länge des Meridianquadranten war nämlich die eiserne Toise von Peru auf diejenige Länge reducirt, welche sie bei + $16\frac{1}{4}$° des Celsius'schen Thermometers hat; dagegen soll die Metallstange, worauf das Meter als 10000000ster Theil des Meridianquadranten aufgetragen wird, die Temperatur 0° haben. Soll also die Größe des Meters unmittelbar mit der Toise verglichen werden, so muß man diese auf die Länge reduciren, die sie bei 0° hat. Den Versuchen zufolge dehnte sich aber die eiserne Toise von Peru von 0° bis

8*

+ $16\frac{1}{4}^{\circ}$ Celsius um 0,00018785 ihrer Länge aus; man würde also in demselben Verhältnisse mehr Toisen im Meridianquadranten gefunden haben, wenn man bei den Gradmessungen die Toise auf ihre kleinere Länge bei 0° der Temperatur reducirt hätte. Dadurch würde man aber auch eine nach demselben Verhältniß vergrößerte Anzahl von Linien, nämlich 443.296 + 443,296 × 0,00018785 = 443,37927 Linien für das Meter gefunden haben. Bei genauen Vergleichungen muß man auf diesen Unterschied Rücksicht nehmen; wo indessen ein so hoher Grad der Genauigkeit nicht erforderlich ist, da nimmt man das Meter zu 443,296 Pariser Linien an.

Hiernach wurden zwei Maßstäbe (étalons) aus Platina gearbeitet, von denen jeder genau einem Meter glich; der eine wurde im Archive der Republik, der andere auf der Pariser Sternwarte unter der Aufsicht des Bureau des longitudes niedergelegt.

Es ist nicht zu läugnen, daß man dieses Normalmaß, wenn die vorhandenen genauen Etalons des Meters verloren gegangen sein sollten, mit hinlänglicher Bestimmtheit wiederfinden kann, wenn man nur die mühselige und kostspielige Operation der Gradmessungen nicht scheut. Warum man aber gerade den 10000000sten Theil des Meridianquadranten zur Maßeinheit wählte und nicht dafür lieber den alten Pariser Fuß oder die Toise von Peru beibehielt, davon läßt sich kein eigentlicher Grund absehen; denn eben so gut, wie man jederzeit den 10000000sten Theil einer in der Natur sich immer gleichbleibenden Größe, wie ein Meridianquadrant ist, wiederfinden kann, läßt sich ja auch der 5130740ste Theil derselben, d. h. die Toise, ermitteln. Man konnte daher die Toise, nachdem man einmal genau ihr Verhältniß zum Meridianquadranten ermittelt hatte, nicht wieder verlieren. Es war aber diese Toise in der Wissenschaft ein so allgemeines Maß geworden, daß ihre Beibehaltung nur wünschenswerth erscheinen konnte. Auch möchte dem Meter in practischer Hinsicht schwerlich ein Vorzug vor der Toise zukommen.

Auf das so bestimmte Meter sind dann alle übrigen Maßeinheiten gegründet worden. Die Einheit des Flächenmaßes heißt Are und ist einem Quadrat von 10 Metern Seitenlänge gleich; die Hectare ist das 100fache davon. Die Einheit für Brennholz ist die Stère

= 1 Cubikmeter. Zum Hohlmaße ist sowohl für trokkene als flüssige Substanzen das Litre bestimmt, welches einem Cubik-Decimeter an Rauminhalt gleicht. Die Gewichtseinheit ist das Gramme, welches das Gewicht eines Cubikcentimeters reinen, destillirten Wassers bei + 4° Temperatur nach Celsius ist, bei welcher nämlich das Wasser die größte Dichtigkeit hat.

Die vorgesetzten Sylben Deci-, Centi-, Milli- bedeuten immer $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ der Einheit; hingegen wird durch Deca-, Hecto-, Kilo-, Myria- das 10-, 100-, 1000-, 10000fache der Einheit ausgedrückt. Erstere sind aus dem Lateinischen, letztere aus dem Griechischen entlehnt.

§. 45.

Von den in anderen Staaten gebräuchlichen Maßen wollen wir nur folgende anführen:

1) England. Die Länge des Normalmaßes ist hier durch Vergleichung mit der Londoner Pendellänge bestimmt, welche, auf den luftleeren Raum und den Meereshorizont reducirt, 39,1393 englische Zoll beträgt, von denen 12 einen Fuß ausmachen. Durch sehr sorgfältige Versuche ist der englische Fuß = 0,938306 Pariser Fuß gefunden worden. Bei'm Längenmaße finden folgende Benennungen und Eintheilungen statt:

1 yard = 2 cubits;
1 cubit = 1½ feet;
1 foot = 12 inches = 1⅓ spans;
1 span = 9 inches = 1,136 gunsterling;
1 gunsterling = 2,64 palms;
1 palm = 3 inches;
1⅔ yard = 5 feet = 1 pace;
1,2 pace = 6 feet = 1 fathom;
5½ yard = 1 pole oder **rod;**
4 poles = 1 gunter'schain;
40 poles = 1 furlong;
8 furlongs = 1760 yards = 1 mile.

Die englische mile (Meile) enthält demnach 4956,6 Pariser Fuß.

Als Feldmaß dient der Morgen (acre) = 4840 □yards, welcher in 4 farding deals eingetheilt wird und 40,467 französischen Aren gleichkommt.

Diese Maße gelten auch in Schottland, Irland und in den nordamerikanischen Freistaaten. In dem Staate Newyork ist jedoch dieses Maß neu geregelt worden, und es verhält sich nach dem Gesetze das Yard zum Secundenpendel im Columbia-College (Newyork) unter 40° 42′ 43″ nördlicher Breite, auf den Meeresspiegel und den Schmelzpunct des Eisens reducirt und mit einer messingenen Stange gemessen, wie 1000000 : 1086141.

2) Rußland. Die Einheit des Längenmaßes ist der englische Fuß, welcher in 12 Zoll zu 10 Linien zu 10 Scrupel getheilt wird. Eine ältere Einheit ist die Elle, Arschine, von 28 russischen Zollen = 2,18938066 Pariser Fuß. 7 Fuß betragen 1 Faden (Saschén) und 500 Faden 1 Werst, von denen 7 beinahe 1 deutsche Meile ausmachen.

Als Feldmaß dient die Deßätina = 2400 Quadratfaden = 10925,48 Quadratmeter.

3) Schweden. Der Fuß hält 131,587 Pariser Linien und wird in 12 Zolle zu 12 Linien, oder in 10 Zolle zu 10 Linien getheilt. 1 Elle = 2 Fuß, 1 Faden = 3 Ellen, 1 Ruthe = $2\frac{1}{3}$ Faden. Als Feldmaß dient die Tonne von $218\frac{3}{4}$ □Ruthen.

4) Dänemark. Das Grundmaß ist die Elle zu 2 Fuß, den Fuß zu 12 Zoll, den Zoll zu 12 Linien gerechnet. Der Fuß soll der rheinländische sein, beträgt aber nur 139,09 Pariser Linien. 3 Ellen machen 1 Faden und 5 Ellen 1 Ruthe. Bei'm Feldmaße ist 1 Pflug = 8 Tonnen hart Korn = 32 Tonnen Saatland = 1804,8 □Ruthen.

5) Holland. In Rücksicht auf Belgien wurde hier das französische Maßsystem eingeführt, aber die holländischen Namen beibehalten; nämlich: Kilometer = Myl, Decameter = Röde, Meter = Elle, Decimeter = Palm, Centimeter = Duim, Millimeter = Streep. — □Röde = Are, Bunder = Hectare.

6) Oesterreich. Der Fuß ist der Wiener = 140,127 Pariser Linien. 1 Fuß = 12 Zoll = 144 Linien; 1 Klafter = 6 Fuß, 1 Meile = 4000 Klafter. — Bei'm Feldmaße hält 1 Joch = 16000 □Klaftern oder 57,55432 Aren.

7) Preußen. Der Fuß ist der rheinländische = 139,13 Pariser Linien; er wird in 12 Zoll zu 12 Linien getheilt. 12 Fuß machen 1 Ruthe, die von den

Feldmessern in 10 Fuß getheilt wird. 6 Fuß machen 1 Faden und 25¼ Zoll 1 Elle. Das Feldmaß ist der Morgen von 180 □Ruthen = 25,53226 Aren.

8) Baiern. Der jetzt allgemein eingeführte Fuß hält 129,38 Pariser Linien oder 0,29186 Meter und wird in 12 Zoll zu 12 Linien eingetheilt. 10 Fuß machen 1 Ruthe. Der Morgen Landes hält 400 □Ruthen oder 34,073 Aren.

9) Baden. Der Fuß ist genau = 0,3 Meter festgesetzt worden und es wird derselbe nur nach dem Decimalsysteme getheilt. 2 Fuß betragen 1 Elle, 6 Fuß 1 Klafter und 10 Fuß 1 Ruthe. Der Morgen Landes hält 400 □Ruthen oder 0,36 Hectaren.

10) Hessen-Darmstadt. Hier ist der Zoll das Grundmaß, und es beträgt derselbe 25 Millimeter. 24 Zoll machen 1 Elle = 0,6 Meter, 10 Zoll machen 1 Fuß, 10 Fuß 1 Klafter. — 1 Morgen hält 400 □Klaftern oder 25 Aren. Dieses System ist also, wie das badensche, genau an das französische angeschlossen.

11) Würtemberg. Der im ganzen Königreiche gesetzlich eingeführte Fuß beträgt 127 Pariser Linien und wird nur nach dem Decimalsysteme in Zolle und Linien getheilt. 10 Fuß machen 1 Ruthe, und 2,144 Fuß 1 Elle. — Der Morgen des Landes hält 384 □Ruthen oder 31,51745 Aren.

In den übrigen deutschen Saaten existiren noch nicht allgemein festgesetzte Maße, und selbst in Baiern soll die nöthige Vorsicht zur Sicherung des Grundmaßes noch nicht getroffen worden sein. Wir begnügen uns daher, noch folgende Maße aufzuführen:

12) Braunschweig. Der Fuß hält 126,5 Pariser Linien und wird nach dem Duodecimalsysteme getheilt. 2 Fuß machen 1 Elle, 8 Ellen oder 16 Fuß 1 Ruthe. — Der Morgen Feld hat 120 □Ruthen.

13) Bremen. Der Fuß hält 0,28935 Meter oder 128,2677 Pariser Linien und er wird theils nach dem Duodecimal-, theils nach dem Decimalsysteme getheilt. 2 Fuß machen 1 Elle, 16 Fuß 1 Ruthe, 6 Fuß 1 Klafter.

14) Calenberg (im Königreiche Hannover). Der Fuß hält 129,9 Pariser Linien und wird nach dem Duodecimalsysteme getheilt. 2⅔ Fuß machen 1 Schritt, 16 Fuß 1 Ruthe. Der Morgen Feld hat 120 □Ruthen.

15) Cassel. Der Fuß beträgt 126,3 Pariser Linien, 14 Fuß = 1 Ruthe, 1 Acker Feld = 150 Quadratruthen.

16) Dresden. Der Fuß hält 125,568 Pariser Linien, der Leipziger Fuß nur 125,3 Pariser Linien. 1 Elle = 2 Fuß, 3 Ellen = 1 Klafter. Bei'm Feldmessen gehen 7 Ellen 14 Zoll oder 15 Fuß 2 Zoll auf die Ruthe, bei'm Straßen- und Wasserbau aber 8 Ellen. Das Lachter hat 7 Fuß. Die sächsische Polizeimeile hält 16000 Ellen. Der Acker Land = 300 □Ruthen.

17) Gotha. 1 Fuß = 127,5 Pariser Linien; er wird in 12 Zoll zu 10 Linien getheilt. Die Klafter hat 6 Fuß, die Ruthe 16 Fuß. Der Acker Land hat 130 □Ruthen.

18) Hamburg. 1 Fuß = 127 Pariser Linien. Dieser wird in 12 Zoll, der Zoll in 8 Linien getheilt. 3 Palmen = 1 Fuß, 6 Fuß = 1 Klafter, 14 Fuß = 1 Marschruthe, 16 Fuß = 1 Geestruthe, 2 Fuß = 1 Elle. — 1 Morgen Land = 600 □Marschruthen, 1 Scheffel Saatland = 200 Geestruthen.

19) Hannover. 1 Fuß = 129,44 Pariser Linien, 2 Fuß = 1 Elle, 6 Fuß = 1 Klafter, 16 Fuß = 1 Ruthe. Der Morgen hält 120 □Ruthen. 1 Vierling = $\frac{1}{2}$ Morgen, 1 Drohn = $\frac{3}{4}$ Morgen.

20) Lübeck. 1 Fuß = 129 französischen Linien. Derselbe wird nach dem Decimalsysteme getheilt. 2 Fuß = 1 Elle, 16 Fuß = 1 Ruthe. Das Feldmaß wird nach Lasten gerechnet, deren Größe nicht genau bestimmt ist.

21) Nürnberg. Der Artilleriefuß hält 129,8 Pariser Linien, der bisher gebräuchliche Reichsstädter Fuß 134,67 Pariser Linien; 16 Fuß machen 1 Ruthe. Der Morgen oder das Tagewerk hält 200 □Ruthen, der Acker 160 □Ruthen.

22) Oldenburg. 1 Fuß = 131,4 Pariser Linien, 20 Fuß machen 1 Ruthe; neuerdings werden aber nur 18 Fuß darauf gerechnet. Von den Feldmaßen hält 1 Juck altes Maß 400 □Fuß; ein dergleichen neues Maß 324 □Fuß. Der Morgen hält 6 Hunde oder 356 □Ruthen.

23) Rostock (Mekleuburg-Schwerin). 1 Fuß = 129 Pariser Linien, 2 Fuß = 1 Elle, 16 Fuß = 1

Ruthe. 1 Hufe Feld = 40000 □Ruthen, 1 Morgen = 300 □Ruthen.

24) *Weimar.* 1 Fuß = 125 Pariser Linien, 1 Ruthe = 16 Fuß, 2 Fuß = 1 Elle. 1 Acker Feld = 140 □Ruthen.

25) *Wiesbaden.* 1 Fuß = 127,6 Pariser Linien.

§. 46.

Wie nach solchen Angaben ein gewisses Maß in ein anderes, z. B. eine Anzahl würtembergische Fuße in Wiener, zu verwandeln sind, lehrt schon die gemeine Arithmetik und darf hier nicht erläutert werden. Wir bemerken nur, daß es in solchen Fällen, wo es weniger auf genaue, als auf schnelle Auffassung von Zahlenverhältnissen ankommt, zweckmäßig ist, diese Verhältnisse durch möglichst kleine Zahlen, wenn auch nur näherungsweise, auszudrücken, und in dieser Hinsicht werden die *Partialbrüche* am Brauchbarsten sein, weil sie bei den möglichst kleinsten Zahlen die möglichst größte Genauigkeit liefern. Es kann hier nicht unsere Absicht sein, die Theorie dieser Brüche, die in keinem guten Lehrbuche der Mathematik fehlen sollte, abzuhandeln; wir wollen nur ihren Gebrauch an ein Paar Beispielen erläutern.

Wie läßt sich, z. B., das Verhältniß des Casseler Fußes zum Hannöverschen in kleinen Zahlen sehr genau ausdrücken?

Da 1 Casseler Fuß = 126,30 Pariser Linien, und 1 Hannöverscher Fuß = 129,44 Pariser Linien, so hat man das Verhältniß:

$$\frac{\text{1 Casseler Fuß}}{\text{1 Hannöverscher Fuß}} = \frac{12630}{12944}.$$

Der Bruch $\frac{12630}{12943}$ läßt sich noch mit 2 aufheben, und man erhält dann $\frac{6315}{6472}$, aber immer sind die Zahlen dieses Verhältnisses zu einer schellen Uebersicht noch viel zu unbequem. Sucht man aber dafür die Partialbrüche, so erhält man der Reihe nach $\frac{1}{1}$, $\frac{40}{41}$, $\frac{161}{165}$, $\frac{362}{371}$ und $\frac{6315}{6472}$. Von ihnen entspricht der Bruch $\frac{40}{41}$ dem

Zwecke am Besten; er sagt uns, daß (näherungsweise) 40 Casseler Fuß 41 Hannöversche betragen, und dieses Verhältniß ist offenbar zu einem schnellen Ueberblicke sehr geeignet. Die Genauigkeit der Annäherung ist bekanntlich hier immer noch sehr groß, wie man sich auch leicht überzeugen kann, wenn man den Unterschied der Brüche $\frac{6315}{6472}$ und $\frac{40}{41}$ sucht, welchen man $= \frac{35}{265352}$ oder nahe $= \frac{1}{7567}$ findet. Indem man also des Näherungsverhältnisses $\frac{40}{41}$ sich bedient, begeht man erst bei 7567 Fuß einen Fehler von 1 Fuß. Man kann daher in den meisten Fällen, durch Anwendung solcher Näherungsverhältnisse, auch sehr genaue Rechnungen führen.

Wie lassen sich ferner der Weimarische Acker und der preußische Morgen in kleinen Zahlen am Genauesten vergleichen?

Hier muß man zuerst beide Größen auf einerlei Flächeneinheit reduciren. Nun ist 1 Weimarischer Fuß = 125 Pariser Linien, und 1 Weimar. Ruthe = 16 Fuß, daher auch 1 Weimar. Ruthe = $16 \cdot 125$ Pariser Linien, und 1 Weimar. □Ruthe $16^2 \cdot 125^2$ Pariser □Linien. Weil aber 140 □Ruthen einen Acker ausmachen, so hält dieser $140 \cdot 16^2 \cdot 125^2$ Pariser □Linien. Eben so findet man den preuß. Morgen $= 180 \cdot 12^2 \cdot 139{,}13^2$ Pariser □Linien, daher

$$\frac{1 \text{ Preuß. Morgen}}{1 \text{ Weimar. Acker}} = \frac{180 \cdot 12^2 \cdot 139{,}13^2}{140 \cdot 16^2 \cdot 125^2}.$$

Am bequemsten berechnen wir diesen Bruch erst mit Hülfe der Logarithmen und finden ihn so $= 0{,}8959598 = \frac{8959598}{10000000}$. Suchen wir aber seine Partialbrüche, so finden wir dieselben der Reihe nach $\frac{1}{1}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{43}{48}$ u. s. w., nämlich 8 Weimar. Acker = 9 Preuß. Morgen, oder genauer 9 Weimar. Acker = 10 Preuß. Morgen, oder schon sehr genau 43 Weimar. Acker = 48 Preuß. Morgen, und von diesen Verhältnissen sind besonders die beiden ersten zu obgedachtem Zwecke sehr geeignet. Das

zweite giebt etwa bei 247, das dritte aber erst bei 7905 Ackern 1 Acker Fehler.

§. 47.

Wir kommen nun zunächst an die Beschreibung der Hülfsmittel, welche uns zu Gebote stehen, um sehr kleine Längentheile noch mit Bestimmtheit abzumessen. Zu diesen gehört der Transversalmaßstab, gewöhnlich nur verjüngter Maßstab genannt, dessen man sich durchgängig zum Auftragen der auf dem Felde gemessenen Linien auf das Papier, aber auch noch bei anderen Verrichtungen bedient. Seine Einrichtung ist zwar allgemein bekannt, muß aber dennoch in einem Lehrbuche der practischen Geometrie beschrieben werden.

Man trage auf eine Linie A B (Taf. III. Fig. 16) im Ganzen, d. h. nicht durch wiederholtes Aneinandersetzen, eine solche Anzahl verjüngter Maßeinheiten, z. B. Ruthen, die sich mit 10 dividiren läßt, etwa 50, 60, 70 Ruthen u. s. w., und theile dann diese Länge mit der größten Genauigkeit in so viel gleiche Theile, daß jeder Theil wie A C = 10 Ruthen wird. Den äußersten Theil zur Linken, A C, theile man wieder in 10 Theile, so ist ein solcher Theil der verjüngten Ruthe gleich. Die Theilung in noch kleinere Theile ist nun unmittelbar nicht mehr gut auszuführen, wird aber leicht auf folgende Weise bewerkstelligt. Man construire über A B das Rechteck A B F E von beliebiger Höhe, richte es aber dabei so ein, daß die Höhen A E und F B aus so viel gleichen Theilen bestehen, als die Ruthe Fuß hat, also z. B. aus 10 Theilen. Die E F theile man gerade so, wie A B, ziehe dann die Linien C D, 10 bis 10, 20 bis 20 u. s. w.; ferner die Linien a b, c d u. s. w., und endlich die Transversalen C G, 1 bis 2 u. s. w. bis 9 E, so ist der Maßstab fertig.

Der Gebrauch dieses Maßstabes erhellt aus der Zeichnung unmittelbar. Die in dem Dreiecke G C D enthaltenen Parallelen stellen die Fuße vor, nämlich bei l ist 1′, bei m 2′, bei n 3′ u. s. w., indem z. B. bei m ein eben so vielster Theil von G D vorgestellt wird, als C m von C D ist. Daher der Theil bei l = $\frac{1}{10}$ G D, der bei m = $\frac{2}{10}$ G D, der bei n = $\frac{3}{10}$ G D u. s. w. Folglich ist, z. B., die Länge x y = 24° 7′′

denn $xy = xv + vw + yw$ und $xv = 20^{o}$, $vw = 7'$, $yw = 4^{o}$.

Auch kleinere Theile, als Fuße, lassen sich, wenn der Maßstab nicht gar zu klein ist, noch mit ziemlicher Sicherheit abschätzen. So ist, z. B., pq etwas größer, als $xy = 24^{o}\ 7'$, und kleiner, als $24^{o}\ 8'$. Weil aber vs etwa $\frac{4}{5}$ von vt beträgt, so ist rs um $\frac{4}{5}$ Fuß größer, als vw, d. h., es beträgt pq $24^{o}\ 7\frac{4}{5}'$.

Solche Maßstäbe werden am häufigsten auf messingene Lineale gezeichnet.

§. 48.

Ein noch vorzüglicheres Mittel zu feinen Abmessungen kleiner Längentheile ist der **Nonius** oder **Vernier**, welcher aus einem Maßstabe A B (Tafel III. Figur 17 und 18), dem **Limbus** und einem daran verschiebbaren kleinern Maßstabe, dem Nonius C D, besteht. Der Limbus ist in gewisse Theile getheilt, und der Nonius faßt eine bestimmte Anzahl n solcher Theile, die entweder in $n + 1$, oder in $n - 1$ Theile getheilt sind. Hiernach giebt es zweierlei Vorrichtungen der Art, nämlich:

1) **Wo n Limbustheile auf dem Nonius in n + 1 Theile getheilt sind** (Taf. III. Fig. 17). Nennen wir die Größe eines Limbustheiles a, so ist die Länge des ganzen Nonius $= na$, und die eines darauf befindlichen Theiles $= \frac{na}{n+1}$. Ein Noniustheil ist daher um $a - \frac{na}{n+1} = \frac{a}{n+1}$ kleiner, als ein Limbustheil, und durch diesen Unterschied wird die fernere Theilung eines Limbustheiles in $n + 1$ Theile möglich. Der Unterschied zwischen zwei Theilen des Limbus und Nonius wird $\frac{2a}{n+1}$, zwischen drei solchen Theilen $\frac{3a}{n+1}$ u. s. w. betragen. In Fig. 17 ist z. B. die Länge des Nonius C D 9 Theilen des Limbus gleich und in 10 Theile getheilt; der Unterschied zwischen beiderlei Theilen beträgt also $\frac{1}{10}$ eines Limbustheiles.

Ist nun eine Länge b d zu messen, so wird der Nonius am Maßstabe hingeschoben, bis der Inderstrich o des Nonius gerade mit dem Ende der bezeichneten Länge

zusammenfällt. Diese besteht zuerst aus dem Stücke b c, welches 18 Limbustheilen gleich ist, und dann aus dem Stücke cd, welches kleiner ist, als ein Limbustheil. Um die Größe desselben zu bestimmen, untersucht man, der wievielste Theilstrich des Nonius mit einem Theilstriche des Limbus genau zusammenfällt; die bei diesem Striche des Nonius stehende Zahl giebt unmittelbar die (n + 1)ten Theile an, welche auf das Stück cd gehen. Da in unserer Figur der vierte Theilstrich des Nonius mit einem Limbusstriche zusammenfällt, so ist c d = $\frac{4}{10}$ eines Limbustheiles und daher b d $18\frac{4}{10}$ solchen Theilen gleich. Denn der Abstand der Theilstriche bei 3 beträgt $\frac{1}{10}$; bei 2 beträgt er $\frac{2}{10}$; bei 1 ist er $\frac{3}{10}$, und folglich bei 0, c d = $\frac{4}{10}$. — Man sieht, daß bei dieser Einrichtung die Theile des Nonius mit den Limbustheilen nach einerlei Richtung gezählt werden müssen.

2) **Wenn n Limbustheile auf dem Nonius in n — 1 Theile getheilt sind** (Taf. III. Fig. 18). Ist die Länge des Limbustheiles = a, so ist die eines Noniustheiles = $\frac{na}{n-1}$ und dieser also um $\frac{na}{n-1} - a = \frac{a}{n-1}$ größer, als jener, so daß der Limbustheil durch den Nonius noch in n — 1 Theile zerlegt wird. Der Unterschied zwischen zwei, drei, vier Theilen des Limbus und Nonius wird $\frac{2a}{n-1}, \frac{3a}{n-1}, \frac{4a}{n-1}$ u. s. w. betragen. In Fig. 18 (Taf. III.) umfaßt der Nonius 11 Limbustheile und ist in 10 Theile getheilt; der Unterschied zwischen beiderlei Theilen beträgt daher $\frac{1}{10}$ eines Limbustheiles. Man hat nun ebenfalls wieder zuzusehen, welcher Strich des Nonius mit einem Limbusstriche coincidirt; aber die Noniustheile werden nicht mit den Theilen des Maßstabes nach derselben, sondern nach der entgegengesetzten Richtung gezählt. Da hier der vierte Theilstrich des Nonius genau in einen Limbusstrich einschneidet, so ist die Länge A b = $18\frac{4}{10}$ Limbustheilen, denn man hat zuerst A a = 18 solchen Theilen, und dann ist der Abstand der Theilstriche bei m = $\frac{1}{10}$, bei n = $\frac{2}{10}$, bei p = $\frac{3}{10}$, bei q = $\frac{4}{10}$, bei r = $\frac{5}{10}$, der Abstand b s = $\frac{6}{10}$, und folglich a b = $\frac{4}{10}$ eines Limbustheiles.

Wollte man nun, z. B., mittelst einer Noniusvorrichtung die Pariser Linie in 50 Theile theilen, so theile

man den Maßstab unmittelbar in halbe Linien ein, da dann von diesen der Nonius noch 25 Theile anzugeben hat. Man kann daher auf den Nonius entweder 24 halbe Linien in 25 Theile theilen, oder auch 26 halbe Linien in 25 Theile.

Auch zur Theilung der Kreise wendet man heut zu Tage einzig den Nonius an, wo man ihn dann so einrichtet, daß er sich genau an den getheilten Umfang des Kreises anschließt. Ist, z. B., der Kreisumfang unmittelbar in Viertelgrade, und sind auf dem Nonius 59 solcher Viertel in 60 Theile, oder auch 61 Viertelgrade in 60 Theile getheilt, so kann man die Winkel bis auf 60stel Theile des Viertelgrades, also bis 15 Secunden, genau ablesen.

Die fein getheilten Nonien werden mit Hülfe kräftiger Loupen beobachtet; man findet aber dann selten, daß zwei Theilstriche genau zusammenfallen. In solchen Fällen schätzen geschickte Beobachter noch kleinere Theile, als der Nonius unmittelbar angiebt, mit Hülfe des Augenmaßes. Rückte, z. B., in Taf. III., Fig. 17, der Noniusstrich 4 etwas weiter nach B hin, ohne daß jedoch der fünfte Strich auf einen Strich des Limbus träfe, so würde dann eine etwas größere Länge, als $18\frac{4}{10}$, doch kleiner, als $18\frac{5}{10}$ angezeigt werden. Dieses ist in Fig. 19 (Taf. III.) nach größerem Maßstabe vorgestellt. Man schätze nun das Verhältniß der Abstände der Theilstriche 4 und des folgenden 5 von den beinahe darauf treffenden Limbusstrichen, nämlich $ab : cd = 2 : 3$, und theile nach diesem Verhältnisse den durch den Nonius noch angegebenen kleinsten Theil, hier $\frac{1}{10}$; nämlich auf ab kommen $\frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$ eines Zehntels, d. h., $\frac{4}{100}$, und um soviel muß die Länge noch vergrößert werden, die Statt finden würde, wenn der Theilstrich 4 genau einschnitte. Der Grund hiervon ist leicht einzusehen, denn es ist $ab + cd = ad - bc$, also gleich dem bekannten Unterschiede zwischen einem Nonius- und einem Limbustheile, und dieser muß im Verhältnisse $ab : cd$ getheilt werden. Um solche Schätzungen auch an den Enden des Nonius vornehmen zu können, sind auf demselben rechts und links ein Paar Theile mehr verzeichnet, als sonst erforderlich ist.

Von Wichtigkeit für den Gebrauch des Nonius ist es auch, die Dicke der Theilstriche zu wissen, die man am besten auf folgende Weise erfährt. Man bringt zwei Theilstriche des Nonius und des Limbus zum genauen Einstehen und schätzt sodann, um den wievielsten Theil einer Strichdicke die nächsten Theilstriche von einander abstehen, welcher Abstand dem Unterschiede zwischen einem Nonius- und einem Limbustheile, d. h., dem kleinsten vom Nonius unmittelbar angegebenen Theile, gleich ist. Fände sich, z. B., wenn die Striche bei 3 genau einstehen, a b = $\frac{1}{4}$ einer Strichdicke, und gäbe der Nonius unmittelbar $\frac{1}{50}$ Linie an, so wäre jene $\frac{1}{4}$ Strichdicke = $\frac{1}{50}$ Linie, und also die Dicke eines Striches = $\frac{4}{50}$ = 0,08 Linie. Gäbe unter denselben Bedingungen ein Kreisnonius unmittelbar noch 10″ an, so wäre $\frac{1}{4}$ Strichdicke = 10″, und daher die Dicke eines Striches = 40″.

Man begreift nun, daß die Ablesbarkeit kleinerer Theile, als der Nonius unmittelbar angiebt, besonders durch die Genauigkeit bedingt ist, mit welcher ein Beobachter das Verhältniß sehr kleiner Größen schätzen kann.

Der Nonius wird am Limbus durch eine sehr feine Schraube fortbewegt und in die erforderliche Stellung gebracht. Ist diese Schraube genau genug, so kann sie zugleich als Micrometerschraube dienen, um noch feinere Theile zu messen, als der Nonius unmittelbar angiebt. Denn rückt man den Nonius so weit zurück, daß der Theilstrich 4 (Taf. III. Fig. 19) genau einschneidet, so kann man aus der Größe der Umdrehung der Schraube den Werth der Fortrückung finden, wie wir sogleich erläutern wollen.

§. 49.

1) Sehr feine Längentheile lassen sich endlich mit Hülfe der Micrometerschrauben abmessen, welche nichts anderes sind, als Schrauben mit sehr feinen und genauen Gewinden. Mitunter bringt es der Zweck der Vorrichtung mit sich, daß die Schraubenmutter unbeweglich festsitzt und daher die umgedrehte Spindel weiter vor- oder zurücktritt; meistens aber kann die umgedrehte Spindel ihren Ort nicht verlassen, und dann bewegt sich auf ihr die Mutter mitsammt dem damit verbundenen Mechanismus, z. B., einem Nonius oder der Spitze eines Stan-

genzirkels, auf und ab. Die Unverrückbarkeit der Schraubenspindel wird gewöhnlich durch einen nahe am Kopfe befindlichen kugelförmigen Ansatz erhalten, welcher in zwei Plättchen mit kugelförmigen Vertiefungen eingeklemmt ist. — Der Zweck der Micrometerschraube erfordert, daß man die Anzahl ihrer Umdrehungen und auch noch kleine Theile einer Umdrehung zählen kann, und deßhalb ist an dem einen Ende der Spindel eine getheilte Kreisscheibe mit einem Index, auch wohl mit einem Nonius angebracht. Die Stelle dieser Scheibe kann begreiflich durch den kreisförmigen Kopf vertreten werden, woran die Schraube umgedreht wird.

Sind die Gänge der Schraube allenthalben gleich weit, und greift die Spindel in ihre Mutter gut ein, so rückt diese (oder auch jene) bei jeder Umdrehung um einen gleichgroßen Theil fort. Man zählt daher die Anzahl der Umdrehungen, welche erforderlich sind, um die Schraube durch eine bestimmte Weite, z. B. durch einen Zoll, fortzuführen, und ermittelt hieraus die Fortrückung bei einer Umdrehung. Gesetzt, man habe 80,4 Umdrehungen machen müssen, um die Schraube durch 1 Zoll zu führen, so kommen auf eine Umdrehung, oder auf die Weite eines Schraubenganges $\frac{1}{80,4}$ Zoll, oder 0,14925 Linien. Kann man nun noch $\frac{1}{100}$ einer Umdrehung mit Sicherheit ablesen, so kommt auf dasselbe eine Fortrückung von 0,0014925 Linien, oder $\frac{1}{670}$ Linie, und dieses wäre dann die Genauigkeit, die mit dieser Micrometerschraube zu erhalten steht. Man treibt jedoch mittelst solcher Apparate die Genauigkeit noch weit höher, als $\frac{1}{1000}$ einer Linie.

Hieraus ist nun klar, wie man mittelst einer Micrometerschraube kleinere Längen messen kann. Gesetzt, man habe die Schraube des obigen Beispieles 2,63 Mal umdrehen müssen, um sie durch eine gewisse Länge fortzurücken, so würde diese Länge 0,14925 $\times$ 2,63 = 0,3925 Linien betragen. Daß man bei so feinen Abmessungen überall das Auge durch kräftige Microscope unterstützen müsse, versteht sich von selbst.

Die größten Schwierigkeiten bestehen hierbei in der Herstellung gleichweiter Gänge der Schrauben, und besonders in der Vermeidung des todten Ganges, d. h., theilweiser Umdrehung ohne Fortrückung. Zur Beseitigung des letzteren Fehlers sind eigene Vorrichtungen von den Künstlern erdacht worden, die hier nicht beschrieben werden können. Was den ersteren Mangel anlangt, so werden die Gewinde am Ende der Schraube gewöhnlich weiter, und man pflegt daher den Werth der Fortrückung bei einer Umdrehung an verschiedenen Stellen zu untersuchen.

2) Aber noch weit feinere Abmessungen, als Micrometerschrauben, gestatten die s. g. Fühlhebel. Diese bestehen aus einer hebelartigen Vorrichtung AB (Taf. III. Fig. 28), die um die feste Axe C beweglich ist, und bei welcher die beiden Arme CA und CB eine sehr ungleiche Länge haben. Denken wir uns, es sei CB 30 Mal größer, als CA, so wird auch das Ende B einen 30 Mal größeren Bogen durchlaufen, als das Ende A, wenn der Hebel um C gedreht wird. Durch einen eingetheilten Gradbogen, dessen Mittelpunct ebenfalls in C ist, und an welchem der Arm CB hinstreicht, mißt man die Fortrückung des Endes B. Es ist klar, daß sich auf diese Weise sehr kleine Fortrückungen von A messen lassen; denn wenn man, z. B., die Fortrückung von $B = \frac{1}{10}$ Linie gefunden hätte, so kann nach der obigen Einrichtung die Fortrückung von A nur den 30. Theil von jener, also nur $\frac{1}{300}$ Linie betragen. Um die Feinheit der Abmessungen noch weiter zu treiben, verbindet man zwei Fühlhebel so miteinander, daß der lange Arm des ersten den zweiten am kurzen Arme faßt und in Bewegung setzt. Auf solche Weise lassen sich leicht 1000., ja 10000. Theile einer Linie abmessen; doch wenn die Abmessung sicher sein soll, so dürfen die Fühlhebel eben so wenig am todten Gange leiden, als die Micrometerschrauben.

§. 50.

Die Abmessung sehr feiner Längentheile wird ganz besonders dann erforderlich, wenn die Maße verschiedener Länder, oder auch mehrere Maßstäbe mit ihrem Ur- oder

Normalmaße verglichen werden sollen. Nicht der gemeine Verkehr erfordert einen so hohen Grad der Genauigkeit, sondern die heutiges Tages so hoch gediehene Wissenschaft, und besonders die Vergleichung der Resultate der, in verschiedenen Ländern mit so großer Genauigkeit angestellten geodätischen Operationen. — Wir bemerken zuerst, daß Maßstäbe von zweierlei Einrichtung im Gebrauche sind, welche die Franzosen étalons à bouts und étalons à traits nennen. Erstere sind vierkantige metallene Stangen, bei welchen die Entfernung der End- oder Stoßflächen das eigentliche Maß ist. Die Stoßflächen müssen also genau eben und unter sich parallel sein, was für einen Künstler eine Aufgabe der schwersten Art ist. Außerdem wird auch der Parallelismus der Stoßflächen, wenn der Maßstab auf nicht genau ebenen Unterlagen durch sein eigenes Gewicht eine Biegung annimmt, nothwendig gestört. In vieler Hinsicht vorzüglicher scheinen daher die Maßstäbe der anderen Art zu sein, wo die Länge des Maßes auf der Metallstange durch zwei Striche oder Puncte bezeichnet ist. Weil aber alle Körper durch die Wärme ausgedehnt werden, so ist die Länge eines Maßes nur dann bestimmt, wenn zugleich die Temperatur der Metallstange angegeben ist, bei welcher es aufgetragen wurde, wie hiervon Beispiele in §. 44 und 45 vorkommen. Wird dann das Maß bei einer anderen Temperatur der Stange wieder abgenommen, so muß seine Länge erst auf die normale Temperatur reducirt werden, zu welchem Behufe aber die Ausdehnung des Metalles durch die Wärme bekannt sein muß.

Die Versuche über die Ausdehnung der Metalle durch die Wärme haben ziemlich abweichende Resultate geliefert. Wenn man die Länge, die ein Stab bei der Temperatur des schmelzenden Eises hat, = 1 setzt, so ändert sich seine Länge, wenn er die Siedehitze des Wassers annimmt,

bei'm	Eisen	in	1,00110000	bis	1,00144600
„	Stahl	„	1,00107400	„	1,00138600
„	Kupfer	„	1,00170000	„	1,00191880
„	Messing	„	1,00182300	„	1,00193400
„	Zink	„	1,00294167	„	1,00310833
„	Silber	„	1,00190974	„	1,00208260
„	Gold	„	1,00131100	„	1,00155155
„	Platina	„	1,00085655	„	1,00099180
„	Glas	„	1,00080787	„	1,00099100.

Wir haben hier die äußersten Grenzwerthe zusammengestellt, die sich aus den Versuchen ergeben haben; alle zwischenliegenden Zahlen sind gleich möglich und auch wirklich gefunden worden. Wegen dieser Unbestimmtheit in der Ausdehnung verschiedener Exemplare muß man, um genau zu rechnen, jede Maßstange, bevor das Maß auf dieselbe aufgetragen wird, besonders untersuchen. Hierfür giebt es mancherlei Mittel; am einfachsten und zweckmäßigsten scheint es indessen, die Stange mit dem einen Ende gegen eine feste Widerlage zu stemmen und die Verlängerung am anderen Ende durch obgedachte Mittel, z. B. Fühlhebel, zu messen. Ihrer Länge nach kann man die Stange in einer metallenen, gehörig unterstützten Rinne ruhen lassen, die man, um verschiedene, mit dem Thermometer meßbare Temperaturen der Stange zu erhalten, mit gestoßenem Eise füllt, das man durch Lampen nach und nach zum Schmelzen bringt und bis zum Sieden erhitzt.

Gewöhnlich nimmt man an, und es kommt der Wahrheit hinreichend nahe, daß die Ausdehnungen sich wie die Temperaturunterschiede verhalten. Aus obiger Tabelle ersieht man, daß, z. B., ein eiserner Stab von der Temperatur des schmelzenden Eises bis zur Siedehitze des Wassers sich um 0,0011 seiner Länge ausdehnt. Dieses giebt für 1 Grad der 100theiligen Thermometerscale 0,000011, und allgemein für t solche Grade, $0{,}000011 \times t$ der ganzen Länge. Hat daher eine eiserne Stange bei 0° Temperatur die Länge l, so ändert sich dieselbe bei t Grad in $(1 + 0{,}000011 \times t) \times l$, wo t für Grade unter 0 negativ zu nehmen ist. Hieraus sieht man, wie Rechnungen der Art zu führen sind.

Die Instrumente, welche zur Vergleichung verschiedener Maße dienen, heißen Maßvergleicher, gewöhnlicher Comparatoren. Ihr Bau beruht auf der Anwendung der obgedachten Mittel zur Abmessung sehr kleiner Längentheile, vornehmlich der Fühlhebel, der Micrometerschrauben und der Microscope. Das erste Werkzeug der Art wurde von Lenoir im Jahre 1792 verfertigt; dabei wurden aber die feinen Abmessungen nur mit Hülfe von Nonien bewirkt. Es bestand aus einem starken messingenen Lineale von 13 Fuß Länge, mit einem Schieber, auf welchem Zehntausendtheile der Toise (etwa $\frac{1}{12}$

Linie) gezogen waren. Mit Hülfe von Nonien aber, die in verschiedenen Zwischenräumen am großen Lineale angebracht waren, konnte man noch Zehntel jener Eintheilung, oder $\frac{1}{100000}$ der Toise ablesen, und die Schärfe der Striche erlaubte noch Millionentheile (etwa $\frac{1}{1157}$ Linie) durch Schätzung zu bestimmen. — Es ist nun leicht abzusehen, wie man mit Hülfe einer solchen Vorrichtung zwei Maßstäbe vergleichen könne; man legt den einen auf das Lineal, bringt ihn am einen Ende mit einer gegen die Ebene des Lineals senkrecht befestigten Widerlage in genaue Berührung und schiebt den gedachten Schieber bis an das andere Ende heran, worauf man den Stand des Nonius abliest. Wird ebenso mit einem zweiten Stabe verfahren, so giebt der Unterschied beider Angaben der Nonien den gesuchten Unterschied der beiden Maßstäbe.

Nachher wandte man, um genaue Abmessungen zu erhalten, Fühlhebel und Micrometerschrauben an. Die Fühlhebel geben zwar eine große Genauigkeit, gestatten aber nur die Abmessung sehr kleiner Längenunterschiede und sind nur für **étalons à bouts** anwendbar. Man kann sich von der Einrichtung eines solchen Comparators eine Vorstellung machen, wenn man sich den Stab auf ebener Unterlage, mit dem einen Ende gegen eine feste Widerlage gestemmt, denkt, während der Fühlhebel mit seinem kurzen Arme das andere Ende berührt und mit seinem langen Arme auf dem Gradbogen einen gewissen Theilstrich bezeichnet. Wird dann, ohne daß die Stellung des Fühlhebels geändert wird, ein zweiter Stab eingelegt, und hat dieser eine von dem vorigen etwas verschiedene Länge, so wird der lange Arm auf dem Gradbogen einen anderen Theilstrich nachweisen, als vorhin, und der Unterschied beider Lesungen läßt auf den Längenunterschied der Maßstäbe schließen. Gewöhnlich trägt der lange Arm des Fühlhebels einen Nonius, um die Eintheilung des Gradbogens noch weiter zu treiben.

Für **étalons à traits** sind Microscope, die durch Micrometerschrauben bewegt werden, das beste Vergleichungsmittel. Diese Microscope sind zusammengesetzte, mit einem Kreuzfaden im Brennpuncte des Oculars, wodurch man in den Stand gesetzt wird, einen bestimmten Punct ebenso genau festzuhalten, wie dieses bei'm Visiren

durch Fernröhre der Fall ist. Zwei solche Microscope sind an einem Lineal, oder sonst an einem geraden und soliden Träger, angebracht und können nach Belieben verschoben und hernach durch eine Micrometerschraube fein eingestellt werden. Legt man nun den Maßstab so unter, daß seine Endstriche oder Puncte von den Visirfäden scharf gedeckt werden, verwechselt man dann den Maßstab mit einem zweiten, den man so legt, daß sein einer Endstrich vom Faden des einen Microscops gedeckt wird, so kann man aus der Umdrehung der Micrometerschraube, die erfordert wird, um auch den Faden des anderen Microscops auf den Endstrich des Stabes zu führen, die gesuchte Längendifferenz finden, wenn man den Werth eines Schraubenumganges vorher durch genaue Versuche ermittelt hat. Anstatt indessen das ganze Microscop durch die Micrometerschraube zu verschieben, ist die Einrichtung so getroffen, daß eine Micrometerschraube den Rahmen, worin die Visirfäden ausgespannt sind, faßt und ihn sammt den Fäden fortrückt, so daß man also den Visirfaden auf einen Punct fein einstellen kann, ohne das Microscop zu verrücken. — Den Werth einer Schraubenumdrehung erfährt man dadurch, daß man eine genau getheilte Scala unter das Microscop legt und den Faden durch die Schraube von einem Theilstriche zum andern führt. — Ein solcher Comparator kann auch zur Vergleichung der **étalons à bouts** dienen und ist zur Ausmittelung sehr großer Längendifferenzen geschickt, wenn man ein langes und genau getheiltes Lineal unter die Microscope zu legen hat. Man stellt zuerst die Microscope auf zwei Theilstriche des Lineals, deren Entfernung dem zu untersuchenden Maßstabe nahe gleich ist, und bringt dann diesen unter die Microscope.

§. 51.

Nunmehr läßt sich auch ein Begriff von dem Verfahren geben, welches man angewendet hat, um auf der Erdoberfläche sehr lange Linien, wie sie für große geodätische Operationen gefordert werden, mit großer Genauigkeit zu messen. Wir haben dieser Linien (Grund- oder Standlinien) schon in §. 23 (Cap. I.) gedacht und dabei bemerkt, daß sie im Durchschnitte etwa 4000 Toisen lang sein sollten. Sie müssen begreiflich auf horizontalem und festem Boden genommen werden, wo der Messung nach

gerader Richtung kein Hinderniß im Wege steht, das nicht weggeräumt werden könnte. Ihre Endpuncte werden durch dauernde Signale bezeichnet, damit sie wenigstens während der Dauer der Messung nicht verloren gehen. Dieses kann, z. B., dadurch geschehen, daß in den Boden, welcher durch Ausmauern vorher gehörig fest gemacht wurde, ein großer viereckiger Stein eingesenkt wird, auf welchem die Spitze eines senkrecht aufgerichteten Kegels von Metall den eigentlichen Endpunct bezeichnet. Weil hier zugleich Behufs der Winkelmessung ein in großen Entfernungen sichtbares Signal stehen muß, so muß man den gedachten Kegel so einsetzen, daß seine Spitze mit der Axe des Signals in dieselbe Verticallinie fällt, welche Bedingung mit Hülfe eines Lothes, jedoch nicht ohne Schwierigkeiten, erreicht wird.

Weil die Maßstäbe in die Richtung der zu messenden Grundlinie einvisirt werden müssen, die Signale der Endpuncte jedoch zu diesem Behufe viel zu weit abstehen, so muß man mehrere Zwischenpuncte durch Signale bezeichnen, was mit Hülfe eines, sowohl in verticaler, als horizontaler Ebene beweglichen Fernrohres geschieht, das man über dem einen Endpuncte aufgestellt hat und nach dem andern richtet. Das Fernrohr des Theodoliten kann zu diesem Zwecke sehr gut dienen, mit dessen Hülfe die Standlinie zugleich orientirt wird, was eigentlich das wichtigere Geschäft ist. Dasselbe besteht in der Ermittelung des Azimuthes der Standlinie, d. h., ihres Winkels mit dem durch den einen Endpunct gezogenen Meridiane, und in der Bestimmung der Polhöhe dieses Endpunctes.

Das Messen selbst geschieht mit Maßstäben, die etwa 12 Fuß lang sind und aus Metall, am besten aus Eisen, bestehen. Hölzerne Maßstäbe tränkt man mit siedendem Leinöl, um sie gegen den Einfluß der Feuchtigkeit zu schirmen, und versieht sie an den Enden mit metallenen Einfassungen oder Kappen. Sie haben die vortheilhafte Eigenschaft, daß sie durch die Wärme nur sehr geringe Veränderungen erleiden; weil aber dieselben und die etwaigen Veränderungen durch die Feuchtigkeit gar nicht zu ermitteln sind, so werden metallene Maßstäbe vorgezogen. Diese müssen eine hinreichende Stärke haben, damit sie sich nicht mehr durch ihr eigenes Gewicht biegen, wenn sie an einigen Stellen unterstützt sind. Sie müssen vor dem Gebrauche hinsichtlich ihrer Ausdehnung durch

die Wärme genau untersucht werden, und die Ermittelung ihrer wahren Länge, d. h., der Entfernung ihrer Stoßflächen bei einer bestimmten Temperatur, ist ein Gegenstand der höchsten Sorgfalt. Weil aber die Stoßflächen nicht leicht parallel sind, so muß die Prüfung an allen vier Längenkanten vorgenommen werden. Die hierzu dienenden Mittel sind im vorigen §. angegeben worden.

Man muß wenigstens vier Meßstangen haben, damit deren wenigstens immer drei aufliegen und man, wenn ein Stoß vorgefallen sein sollte, erkennen könne, welche Stange sich verrückt hat. Eine jede wird mit einem Thermometer versehen, dessen Kugel am besten in die Masse versenkt ist, um jedesmal die Temperatur des Metalls richtig beobachten zu können. Desgleichen wird auf jeder Stange eine Wasserwaage befestigt, um sie jedesmal horizontal legen zu können, oder damit man ihre Neigung, die immer nur gering sein darf, am Stande der Blase beobachten und daraus die wahre horizontale Länge herleiten kann. Wie diese Wasserwaage zu justiren ist, damit bei richtigem Einspielen der Blase der Maßstab horizontal liege, wird man leicht aus dem im Capitel vom Nivelliren Vorgetragenen ersehen. Endlich muß auch jeder Maßstab ein Paar Diopter bekommen, damit er richtig in die Linie einvisirt werden könne. Drei Rahmen, in deren jedem ein Faden vertical ausgespannt ist, und von denen zwei nahe an den Enden, der dritte in der Mitte der Stange sich befinden, sind wohl die geeignetste Vorrichtung zu diesem Behufe. Auf das richtige Einvisiren der Maßstäbe muß die größte Sorgfalt verwendet werden, weil es sich meistens nicht vermeiden läßt, daß man nicht um ein Ansehnliches aus der geraden Richtung weiche.

Die Maßstäbe werden am besten auf hölzerne schwere Schemel gelegt, deren Füße sich fest in die Erde eindrükken lassen. Da diese Schemel nicht sehr hoch sein können, so müssen die Messenden in der Regel auf den Knieen liegen, zu welchem Behufe Tücher untergebreitet werden, um bei dem Geschäfte die größte Reinlichkeit zu beobachten. Die Schemel können durch Schrauben nach Bedürfniß erhöht oder erniedrigt werden. Weil so lange Meßstangen sich leicht durch ihr eigenes Gewicht senken, so hat man sie auch wohl auf eine etwas hohe hölzerne Unterlage befestigt, mit welcher sie auf den Schemeln ruhen.

Endlich müssen die Maßstäbe durch Schirme vor der Sonne geschützt werden, damit man immer im Schatten arbeite und die Temperatur möglichst gleichmäßig erhalten werde, weil sonst die Thermometer leicht eine andere Temperatur anzeigen könnten, als die der Stangen.

Die Maßstäbe werden zuerst alle nach einander angelegt, wobei denn die Schwierigkeit nicht gering ist, daß das Ende des ersten genau senkrecht über den Anfangspunct der Linie gelothet werde. Jeder Maßstab bekommt hier seinen Namen oder seine Nummer, damit in der Folge keine Irrung oder Verwechselung eintrete. Ist Alles in Ordnung, so wird der hinterste Maßstab weggenommen und an den vordersten gelegt, und so fort. Ueber die Messung wird ein genaues Brouillon geführt, worin die Ordnung bemerkt ist, in welcher die Maßstäbe nach einander folgten, und bei jedem wird die Temperatur angemerkt, die er hatte, so daß man am Ende seine Länge auf dieselbe Normaltemperatur zu reduciren im Stande ist. — Jede Stange wird durch einen eigenen Gehülfen bedient.

Da man bei einer so schwierigen und mühsamen Operation in einem Tage nur etwa 1000 Fuß vorwärts kommen kann, so wird es nöthig, daß man den Endpunct bezeichne, wo man an jedem Tage aufgehört hatte, was ebenfalls kein leichtes Geschäft ist. Man kann zu diesem Behufe einen starken Pfahl, der mit einer metallenen Platte versehen ist, bis an den Kopf in die Erde senken, und den Ort, wo das vom Ende des Maßstabes herabhängende Loth eintrifft, durch ein Paar sich kreuzende Risse bezeichnen. Der Körper dieses Lothes muß begreiflich in eine Spitze sich endigen, die mit dem Faden genau in derselben Verticallinie liegt.

Ganz besonders muß man darauf achten, daß die Maßstäbe sich genau berühren; allein hierin können gerade große Irrungen vorkommen. Um diese zu vermeiden, hat man die Enden der Maßstäbe keilförmig zugeschärft und die Sache so eingerichtet, daß die Schärfen der anliegenden Maßstäbe sich kreuzen, wobei dann die Berührung sich genauer beobachten läßt. Man hat aber auch die Berührung ganz vermieden und die kleinen Zwischenräume zwischen den Maßstäben durch verschiedene Mittel besonders gemessen, z. B. dadurch, daß am Ende einer jeden Stange ein Schieber angebracht war, der bis

an die vorherige Stange angeschoben wurde und mittelst eines Nonius und einer auf dem Maßstabe befindlichen Theilung den Zwischenraum angab.

Es leuchtet ein, daß es bei einer solchen Einrichtung nicht einmal nöthig ist, die Stoßflächen selbst als die Grenzen des Maßstabes anzunehmen, sondern daß es hinreicht, dieselben durch Striche zu bezeichnen, die nahe an den Enden des Stabes senkrecht gegen seine Länge geführt sind.

Am besten lassen sich solche Zwischenräume mit Hilfe eines genau gearbeiteten gläsernen Keiles messen, der unter einem ziemlich spitzen Winkel zuläuft. Kennt man die Breite des Keiles am Rücken und seine Höhe, so läßt sich aus der Tiefe seines Einsinkens leicht die Breite des Zwischenraumes ermitteln, in welchen er versenkt wurde.

Wir müssen uns mit diesen Andeutungen begnügen, weil es uns nicht zukommt, in dieser Sache ein entscheidendes Urtheil zu fällen. Wer genaue Auskunft darüber wünscht, muß nothwendig die Geschichte der verschiedenen gemessenen Grundlinien selbst lesen.

Drittes Capitel.

Beschreibung der Meßkette, des Meßtisches, Winkelspiegels und sonstigen Zubehörs.

§. 52.

Die Größen, welche man bei geodätischen Operationen zu messen hat, sind gerade Linien und Winkel, wonach also die Meßinstrumente theils solche sind, womit man Linien mißt, theils solche, womit Winkel bestimmt werden.

Bei Vermessungen, welche sich nicht über sehr bedeutende Erdstrecken ausdehnen, wie, z. B., diejenigen, welche unmittelbar die Regulirung des Catasters und Sicherung

Endlich müssen die Maßstäbe durch Schirme vor der Sonne geschützt werden, damit man immer im Schatten arbeite und die Temperatur möglichst gleichmäßig erhalten werde, weil sonst die Thermometer leicht eine andere Temperatur anzeigen könnten, als die der Stangen.

Die Maßstäbe werden zuerst alle nach einander angelegt, wobei denn die Schwierigkeit nicht gering ist, daß das Ende des ersten genau senkrecht über den Anfangspunct der Linie gelothet werde. Jeder Maßstab bekommt hier seinen Namen oder seine Nummer, damit in der Folge keine Irrung oder Verwechselung eintrete. Ist Alles in Ordnung, so wird der hinterste Maßstab weggenommen und an den vordersten gelegt, und so fort. Ueber die Messung wird ein genaues Brouillon geführt, worin die Ordnung bemerkt ist, in welcher die Maßstäbe nach einander folgten, und bei jedem wird die Temperatur angemerkt, die er hatte, so daß man am Ende seine Länge auf dieselbe Normaltemperatur zu reduciren im Stande ist. — Jede Stange wird durch einen eigenen Gehülfen bedient.

Da man bei einer so schwierigen und mühsamen Operation in einem Tage nur etwa 1000 Fuß vorwärts kommen kann, so wird es nöthig, daß man den Endpunct bezeichne, wo man an jedem Tage aufgehört hatte, was ebenfalls kein leichtes Geschäft ist. Man kann zu diesem Behufe einen starken Pfahl, der mit einer metallenen Platte versehen ist, bis an den Kopf in die Erde senken, und den Ort, wo das vom Ende des Maßstabes herabhängende Loth eintrifft, durch ein Paar sich kreuzende Risse bezeichnen. Der Körper dieses Lothes muß begreiflich in eine Spitze sich endigen, die mit dem Faden genau in derselben Verticallinie liegt.

Ganz besonders muß man darauf achten, daß die Maßstäbe sich genau berühren; allein hierin können gerade große Irrungen vorkommen. Um diese zu vermeiden, hat man die Enden der Maßstäbe keilförmig zugeschärft und die Sache so eingerichtet, daß die Schärfen der anliegenden Maßstäbe sich kreuzen, wobei dann die Berührung sich genauer beobachten läßt. Man hat aber auch die Berührung ganz vermieden und die kleinen Zwischenräume zwischen den Maßstäben durch verschiedene Mittel besonders gemessen, z. B. dadurch, daß am Ende einer jeden Stange ein Schieber angebracht war, der bis

an die vorherige Stange angeschoben wurde und mittelst eines Nonius und einer auf dem Maßstabe befindlichen Theilung den Zwischenraum angab.

Es leuchtet ein, daß es bei einer solchen Einrichtung nicht einmal nöthig ist, die Stoßflächen selbst als die Grenzen des Maßstabes anzunehmen, sondern daß es hinreicht, dieselben durch Striche zu bezeichnen, die nahe an den Enden des Stabes senkrecht gegen seine Länge geführt sind.

Am besten lassen sich solche Zwischenräume mit Hilfe eines genau gearbeiteten gläsernen Keiles messen, der unter einem ziemlich spitzen Winkel zuläuft. Kennt man die Breite des Keiles am Rücken und seine Höhe, so läßt sich aus der Tiefe seines Einsinkens leicht die Breite des Zwischenraumes ermitteln, in welchen er versenkt wurde.

Wir müssen uns mit diesen Andeutungen begnügen, weil es uns nicht zukommt, in dieser Sache ein entscheidendes Urtheil zu fällen. Wer genaue Auskunft darüber wünscht, muß nothwendig die Geschichte der verschiedenen gemessenen Grundlinien selbst lesen.

Drittes Capitel.

Beschreibung der Meßkette, des Meßtisches, Winkelspiegels und sonstigen Zubehörs.

§. 52.

Die Größen, welche man bei geodätischen Operationen zu messen hat, sind gerade Linien und Winkel, wonach also die Meßinstrumente theils solche sind, womit man Linien mißt, theils solche, womit Winkel bestimmt werden.

Bei Vermessungen, welche sich nicht über sehr bedeutende Erdstrecken ausdehnen, wie, z. B., diejenigen, welche unmittelbar die Regulirung des Catasters und Sicherung

des Grundbesitzes bezwecken, gebraucht man zum Messen der Linien die Meßkette. Sie ist 4 oder 5, mitunter auch 6 Ruthen lang und besteht aus Gliedern von Eisendraht, von der Dicke eines Gänsekiels, die an ihren Enden ringförmig umgebogen und durch messingene oder eiserne Ringe verbunden sind. Der Abstand der Mittelpuncte zweier solcher Ringe beträgt genau 1 Decimalfuß, d. h. den zehnten Theil der Ruthe. Unterabtheilungen eines Fußes sind auf der Kette nicht bezeichnet, denn es reicht hin, dieselben bloß nach dem Augenmaße zu schätzen. Die Länge von 5 Fuß, oder einer halben Ruthe, ist jedesmal durch einen Ring von Auszeichnung markirt, z. B. durch einen messingenen, wenn die übrigen von Eisen sind, und die einzelnen Ruthenlängen haben wieder Ringe von besonderer Auszeichnung, z. B. rhomboïdenförmige mit diagonalem Querriegel, wie in Fig. 23 (Taf. III.) vorgestellt ist. An den Enden der Kette sind größere und stärkere Ringe (Taf. III. Fig. 22) befestigt, in welche die Kettenstäbe passen, womit die Kette geführt wird. Die Entfernung von den Mittelpuncten dieser beiden Endringe ist die eigentliche Kettenlänge.

Manche Ketten haben die lobenswerthe Einrichtung, daß man ein 3 Ruthen langes Stück davon abnehmen und damit messen kann, was in bergigtem Terrain sehr vortheilhaft ist.

Die Meßketten werden durch die Ausdehnung, die sie bei längerem Gebrauche erleiden, nach und nach unrichtig, und es ist daher von Wichtigkeit, dieselben öfters zu prüfen und, wenn sie zu lang sind, zu berichtigen, was durch Zusammenpochen der Ringe geschieht. Daß es zu dem Ende gut sei, wenn die richtige Länge der Kette an einem schicklichen ebenen Orte auf die Dauer markirt wird, bedarf kaum der Erwähnung. Auch begreift man leicht, wie man eine mit einer unrichtigen Kette gemessene Länge zu verbessern habe, wenn der Fehler der Kette selbst bekannt ist.

Anmerkung. Statt der Meßkette bedient man sich auch wohl bei minder genauen Messungen der Meßleinen oder Meßbänder, die man 15 Ruthen lang macht. Ihrer großen Dehnbarkeit halber taugen sie zu genauen Messungen nicht. Gegen den Einfluß der Feuchtigkeit werden sie durch Tränken mit Leinöl geschützt.

Auch der Schritte bedient man sich zu oberflächlicher Schätzung der Längen. Man muß sich zu diesem Behufe einen gleichförmigen Schritt angewöhnen, und die Länge eines Schrittes aus der Anzahl derselben, die auf eine ziemlich lange mit der Kette gemessene Linie gehen, vorher ermittelt haben.

§. 53.

Der Gebrauch der Meßkette erfordert noch zweierlei Geräthschaften, nämlich:

1) Die Kettenstäbe. Sie dienen, die Kette daran zu stecken und dieselbe fortzuziehen, sowie auch zum Einrichten (Einvisiren) der Kette in die zu messende Linie. Sie sind ungefähr manneshoch und so stark, daß die Endringe der Kette eben daran geschoben werden können. Sie haben unten einen starken eisernen Stachel, der in das Holz eingelassen ist; auch sind sie, der Haltbarkeit wegen, unten mit Eisen beschlagen, und durch den Beschlag und den Stachel geht ein zu beiden Seiten des Stabes etwas hervorstehender Riegel, welcher verhindert, daß die Kette herabfalle. Diese Einrichtung scheint mir die vorzüglichste zu sein und sich besonders durch große Haltbarkeit zu empfehlen.

2) Die Zähler oder Zählpflöcke, Zählnägel. Sie sind ihrer zehn und dienen, die Anzahl der Kettenzüge zu merken. Sie können aus Holz bestehen und einen Fuß lang sein, wo dann jeder Kettenzieher einen um den Hals gehängten ledernen Sack bei sich führt, in welchem er die erhaltenen Zähler aufbewahrt. Sie sind auch oft von Eisendraht gemacht und werden dann gewöhnlich an einem eisernen Ringe aufgehängt, den der Kettenzieher am Arme führt.

§. 54.

Neben der Meßkette ist noch zum Messen kleinerer Längen ein Maßstab erforderlich, der gewöhnlich nur eine halbe Ruthe lang ist und daher auch schlechtweg die halbe Ruthe genannt wird. Dieser Maßstab, welcher die Form eines vierkantigen Prisma's hat, besteht meist aus Tannenholz und ist in seine 5 Decimalfuße, zum Ueberflusse mitunter auch noch in Decimalzolle, getheilt.

— Damit dem Gehülfen, welcher den Maßstab zu führen hat, die Arbeit, des vielen Bückens halber, nicht zu sauer werde, so beschlägt man mitunter den Stab an beiden Enden mit eisernen Dillen, an welchen ein Stachel senkrecht gegen die Länge des Stabes angeschmiedet ist. Die Entfernung der beiden Stacheln beträgt dann genau 5 Fuß. In der Mitte des Stabes ist ein Griff befestigt, woran das Werkzeug leicht geführt werden kann. Siehe Fig. 24, Taf. III.

Daneben ist es jedoch auch gut, wenn man einen einfachen halben Ruthenstab besitzt, welcher sich leichter durch Gebüsch und Hecken hindurchschieben läßt.

§. 55.

Absteckstäbe und Signalstangen sind Stäbe, die etwa sechs Fuß hoch sind und zum Kenntlichmachen der End- und Zwischenpuncte der Linien auf dem Felde dienen. Sie sind unten mit spitzigen Eisenbeschlägen versehen, um sie leicht in die Erde zu bringen. Gewöhnlich theilt man sie in Fuße ab, die man wechselweise mit grell abstechenden Farben, z. B. Roth und Weiß, anstreicht, damit sie in der Ferne kenntlich bleiben. Um sie den bloßen Augen in der Ferne noch sichtbarer zu machen, nagelt man oben Fähnchen an, die aus Lappen von grell abstechenden Farben zusammengenäht sind. Man wähle weiß und rothe Fahnen, wenn sie gegen dunkeln, hingegen roth und grüne, wenn sie gegen hellen Hintergrund gesteckt werden. — Es ist gut, wenn man unter diesen Stäben einen oder zwei sehr hohe hat, um sie auch dann zu sehen, wenn sie in hohem Gebüsche oder hinter hohen Hecken aufgesteckt werden.

Auf Puncte, welche die Hauptanhaltepuncte einer längere Zeit daurenden Messung bilden und fortwährend gebraucht werden, oder von vielen Standpuncten aus sichtbar sein müssen, steckt man hohe, abgeschälte Stämme junger Fichten, auf die man oben, der bessern Kenntlichkeit halber, noch einen Strohwisch steckt. Diese müssen etwas tief in die Erde eingesenkt und gut befestigt werden, damit sie die senkrechte Stellung gegen ihre eigene Wucht und gegen den Wind behaupten können.

Absteckestäbe werden immer senkrecht in die Erde gesteckt, was jedoch bloß nach dem Augenmaße geschieht.

Sollte dieses nicht hinreichen, so bedient man sich eines Lothes.

Auch Naturgegenstände können als solche Signale benutzt werden, z. B. Bäume, Kirchthürme u. s. w.

Da man bei einer Vermessung nicht so viele Signale haben kann, als Puncte markirt werden müssen, viele Puncte aber auf längere Zeit festgehalten werden müssen, so schlägt man in dieselben Pfähle ein, die gewöhnlich mit einer Nummer oder einem Buchstaben bezeichnet werden.

§. 56.

Der Meßtisch.

Der Meßtisch dient dazu, den Winkel, den zwei Linien auf dem Felde mit einander bilden, unmittelbar auf dem Papiere (dem Risse) verzeichnen zu können. Es gehören dazu folgende Stücke:

1) das Stativ;
2) die Tischplatte;
3) die Wasserwaage oder Libelle;
4) die Lothgabel;
5) die Kippregel mit Fernrohr, oder auch das bloße Diopternlineal,

welche wir in dieser Ordnung nach einander beschreiben wollen.

Die wesentlichen Erfordernisse eines Statives sind: 1) daß es gehörig feststehe; 2) daß die ebene Tischplatte genau mit dem Horizonte parallel gestellt und 3) auch in jede verlangte Richtung gedreht werden könne. Man hat, um diesen Erfordernissen zu genügen, die Einrichtung dieses nützlichen, seit 200 Jahren durch den Professor Prätorius in Altdorf erfundenen Instrumentes nach und nach auf mancherlei Weise getroffen; doch scheint folgende Construction ganz besonders empfehlungswerth zu sein:

A A (Taf. IV. Fig. 1) ist eine starke Scheibe von hartem Holze, unten mit drei Gelenkkapseln versehen, in welche die cylindrisch gerundeten Obertheile der drei Füße **B, B, B**, wie die Gelenkkugel in ihre Kapsel, eingelassen sind. Die Obertheile der Füße **B** haben einen Einschnitt, in welchen eine starke messingene Scheibe **b** geschoben und durch einen Bolzen **c** mit den Füßen so ver-

bunden ist, daß diese, wie um ein Gewerbe, bewegt werden können. Mit den Scheiben b hängen die Schraubenspindeln a zusammen, die durch den Kopf A hindurchgehen und durch die Muttern d angezogen werden können, wodurch dem Wackeln der Füße vorgebeugt wird. Die Muttern d sind in die Scheibe A versenkt und können nur mit Hülfe eines Schlüssels angezogen werden; weit vortheilhafter ist es jedoch, die Schraube a bis über die Scheibe A zu verlängern und Flügelmuttern e anzubringen, damit man das Anziehen der Füße mit den bloßen Händen verrichten könne. Die Untertheile der Füße sind wie Fig. 6 gestaltet und unten mit Eisen beschlagen, damit man sie, auf den Absatz C tretend, leicht in die Erde bringen könne. Die Länge der Füße beträgt etwa 44 Pariser Zoll, der Durchmesser der Scheibe A 8 bis 9 Zoll und ihre Dicke $1\frac{1}{2}$ bis 2 Zoll.

Die drei Schrauben D, auf welchen unmittelbar die hölzerne Scheibe E und mit ihr die ganze obere Vorrichtung nebst der Tischplatte ruht, dienen zum Horizontalstellen. Sie haben ihre Muttern in der Scheibe A und werden von unten her mittelst des Flügels g gehoben oder gesenkt. Der obere Theil f ist auf die Schraubenspindel aufgeschraubt und bildet eine Nuß, um welche der Kopf h beweglich ist, damit dessen ebene Oberfläche sich jedesmal an die Scheibe E E anlege. Diese Vorrichtung ist etwas complicirt; man erreicht denselben Zweck weit leichter, wenn nach der bisher gebräuchlichen Einrichtung in die Scheibe A A drei Schrauben mit flach gerundetem, hölzernem Kopfe m (Taf. VI. Fig. 5) und rânderirtem Rädchen n stehen; an dem Rädchen n anfassend, kann man sie ohne Unbequemlichkeit drehen und nach Bedürfniß heben oder senken. Dieses geht um so eher an, da die Scheibe E nicht, wie bei der bisherigen Einrichtung, auf den Köpfen m gedreht zu werden braucht, sondern unbeweglich darauf fest liegt.

In der Mitte der Scheibe E E ist die Klammer i befestigt, in welche der starke Haken K eingeschoben werden kann. Der untere Theil dieses Hakens bildet eine Schraubenspindel n, die mitten durch die Scheibe A hindurchgeht. Vermittelst der Flügelmutter l kann der auf die Schraubenspindel n lose aufgesetzte hölzerne Kegelstumpf m gegen die Scheibe A getrieben und dadurch die Scheibe E E fest gegen die Horizontalschrauben D

gezogen werden, wodurch wieder Festigkeit in der Stellung der Tischplatte erreicht wird.

Die übrigen Theile dienen zum sicheren Auflegen der Tischplatte und zur genauen Richtung (Orientirung) derselben durch Drehen in der Horizontalebene. Gerade in Bezug auf dieses Erforderniß hat diese Einrichtung wesentliche Vorzüge vor anderen Stativen. — Mit der hölzernen Scheibe E ist der messingene 16 Pariser Linien breite und 2 Linien dicke Ring F fest verbunden, auf welchem sich die hölzerne Scheibe H, sammt dem mit ihr verbundenen Meßtischkreuze G (Taf. IV. Fig. 2) um einen conischen Zapfen L, der eine Fortsetzung der Klammer i ist, sanft dreht. Diese Drehung geht zuerst durch Anfassen der Tischplatte schnell und dann mittelst der Micrometerschraube p q langsam und sicher vor sich.

Das Stück J (Fig. 1, 2, 4, Taf. IV.) ist in das Kreuz eingelassen und steht mit den übrigen Theilen nur durch die Micrometerschraube p q in Verbindung, welche darin in halbkugelförmigen Lagern durch die Nuß r festgehalten wird. Diese Vorrichtung ist in Fig. 4 nach doppelt so großem Maßstabe abgebildet, wie sie von vorn, nach der Richtung der Schraube p q gesehen, erscheint, woraus der ganze Bau, sowie die Art der Befestigung im Kreuze G unmittelbar in die Augen springt.

Das Stück K ist zusammengesetzter. Es besteht aus zwei Platten s und u (Fig. 3, wo es so abgebildet ist, wie es in der Richtung von q nach p gesehen wird), die den hervorstehenden Theil des Ringes F zwischen sich nehmen. Deßhalb ist dieser Ring, so weit die Platte s darauf liegt, vom Rande aus nach Innen etwas schief abgedreht; auch hat er nahe am Rande ringsum einen Canal, in welchen zwei Stifte w der Platte s eingreifen, so daß das Stück K sicher um den ganzen Ring herumgeführt werden kann. Die beiden Platten s und u werden durch die starke Schraube t zusammengehalten und können nach Bedürfniß gelüftet oder festgeklemmt werden, weßhalb an gedachter Schraube der Hebel x befestigt ist.

Die untere Platte u bildet zugleich die Vorrichtung, um die Micrometerschraube p q am Ende aufzunehmen. In den beiden Backen 1 und 2 sind halbkugelförmige Lager für die Nuß v, die eine Schraubenmutter bildet, durch welche die Micrometerschraube p q hindurchgeht.

Die ganze Vorrichtung ist in Fig. 2 nochmals, von unten gesehen, abgebildet.

Gesetzt nun, es seien mittelst des Schlüssels x die beiden Platten des Stückes K gelüftet, so kann man das Kreuz G nach Willkühr um den auf der Scheibe E befestigten conischen Zapfen L drehen, wobei das Stück K am Rande des Ringes F fortgeschoben wird. Klemmt man aber die gedachten Platten mittelst des Hebels x zusammen, so wird die Umdrehung, da das Stück K nicht mehr bewegt werden kann, gehindert; allein wenn die Micrometerschraube p q umgedreht wird, so führt sie, weil sie aus dem Stücke J nicht heraus kann, dieses Stück sammt dem damit verbundenen Kreuze G mit sich fort in drehender Bewegung um den Zapfen L. Diese Bewegung ist langsam, weil die Micrometerschraube mit einer Umdrehung nur um die Weite eines Schraubenganges fortrückt.

§. 57.

Wir haben nun noch den Mechanismus zu beschreiben, wodurch die Tischplatte auf dem Kreuze G befestigt wird. Die Tischplatte selbst bildet ein Quadrat von 21 bis 22 Pariser Zoll Seitenlänge und wird aus lindenem Holze gearbeitet, welches, wegen der Gefahr des Werfens, möglichst ausgetrocknet sein muß. Deßhalb wird sie auch nicht aus einem einzigen Brete gefertigt, sondern es werden, wie in Fig. 7 (Taf. IV.), vier breite Leisten zu einem Rahmen zusammengesetzt und diese wieder durch zwei sich kreuzende Riegel verbunden. Die vier leer bleibenden Felder werden noch durch Bretstücke ausgesetzt, wobei hauptsächlich darauf zu sehen ist, daß die Längenfasern der einzelnen Holzstücke sich kreuzen, was zur Vermeidung des Krummziehens viel beiträgt. Aus dieser Ursache wird man auch ueue Tischplatten nicht sogleich gebrauchen dürfen.

Zur Befestigung der Tischplatte werden auf dieselbe in geeigneter Entfernung zwei hölzerne Klammern mit eisernen Schrauben aufgeschraubt; zwischen diese und die Tischplatte kommen die langen Arme G G (Taf. IV. Fig. 2) des Meßtischkreuzes zu liegen, welche gewöhnlich durch hölzerne Schrauben, die in den Klammern ihre Muttern haben, gegen die Tischplatte gedrückt und auf

diese Weise befestigt werden (Taf. IV. Fig. 9). Bei dieser Einrichtung wird, wenn man die hölzernen Schrauben zu stark anzieht, leicht die Tischplatte verbogen; bei zu schwachem Anziehen aber erhält man nicht die gewünschte Festigkeit. Deßhalb ist folgende neuere Einrichtung weit vorzüglicher.

Jeder lange Arm des Meßtischkreuzes hat der Länge nach einen Einschnitt (Taf. IV. Fig. 2 und Fig. 10), welcher nach oben einen Falz bildet, in dem eine viereckige messingen Platte A hin und her geschoben werden kann. Der Steg oder die Klammer hat ebenfalls einen Einschnitt CD und kann durch eine Schraube Q, die in der Platte A ihre Mutter hat, mit dem Kreuzarme sehr fest verbunden werden. Die Einrichtung ist so getroffen, daß die Sohlen des Steges mit der Oberfläche des Meßtischkreuzes in eine Ebene fallen. Sind nun nach der vorhin bezeichneten Weise beide Stege an die Meßtischplatte angeschraubt, so liegt diese begreiflich auf dem Meßtischkreuze fest und kann, weil sie auf keine Weise einen Druck erleidet, auch nicht verbogen werden.

Man hat auch, namentlich bei der Aufnahme des sogenannten graphischen Netzes, gläserne Tischplatten, die auf der einen Seite matt und eben geschliffen sind, verwendet. Es unterliegt keinem Zweifel, daß solche Platten, theils weil sie sehr vollkommen geebnet werden können, theils weil sie sich nicht werfen, große Vorzüge vor den hölzernen besitzen.

§. 58.

Die Meßtischplatten werden mit dem besten Velinpapiere bezogen, das zu diesem Behufe am Rande umgebogen, angefeuchtet und mit Leim oder haltbarem Kleister an die schmalen Seiten der Platte angeklebt wird. Es erfordert diese Operation einige practische Fertigkeit und auch Vorsicht, insofern man das Papier nicht zu stark ausdehnen und auch nicht zu schnell trocknen lassen darf. — Weil das auf diese Weise aufgezogene Papier bei feuchter Luft wieder Blasen bekommt, so wollen Einige lieber die ganze Fläche des Papiers mit zerquirltem Eiweiß aufgeklebt wissen, wobei man des Leimes nur so weit bedarf, als etwa der Rand des Papieres, der nicht, wie bei der vorigen Aufziehungsart, um den Rand der

Platte umgebogen wird, hier und da nicht halten wollte. Man muß aber hierzu sehr festes Papier haben, damit es nicht bei'm Ablösen von der Platte zerreiße.

§. 59.

Die Lothgabel oder Lothzange hat die in Fig. 14 (Taf. IV.) angezeigte Form. Sie ist aus zwei Holzstücken von geeigneter Größe zusammengesetzt. Das Stück CA, welches auf die Meßtischplatte gelegt wird, hat vorn ein Metallblech mit einer Oese, und an dem andern Stücke CB hängt ein Loth herab, dessen Richtung durch die gedachte Oese geht, wenn die Leiste CA horizontal liegt. Man kann also mit diesem Instrumente einen Punct des Meßtisches genau senkrecht über einen Punct des Feldes bringen, wenn, nachdem die Oese des Stükkes CA auf den Punct der Tischplatte gelegt worden, das Stativ so gesetzt wird, daß das Loth über dem Puncte des Bodens einspielt.

§. 60.

Die Wasserwaage.

Man hat zweierlei Wasserwaagen oder Libellen, welche man nach ihrer Gestalt Röhren- und Dosenlibellen nennt. Die Röhrenlibelle gewährt die größte Genauigkeit und wird daher jetzt allgemein zum Horizontalstellen des Meßtisches benutzt.

Die Röhrenlibelle (Taf. IV. Fig. 13) besteht aus einer ohngefähr 6 Pariser Zoll langen und 6 Linien weiten, cylindrischen Glasröhre, welche inwendig genau ausgeschliffen und mit Wasser oder Weingeist so weit gefüllt wird, daß noch eine Luftblase von geeigneter Größe zurückbleibt. Nachdem der Weingeist in die Röhre eingegossen, wird dieselbe zugeschmolzen. Damit bei horizontaler Lage der Röhre die Luftblase sich in die Mitte begebe, ist die Röhre nach einem Kreisbogen gekrümmt, dessen Halbmesser sehr groß ist und mindestens 300 Zoll beträgt. Die Libelle ist um so vollkommener, je genauer die Röhre calibrirt ist, d. h., allenthalben gleiche Weite hat, je weniger Ungleichheiten auf der inneren Fläche sich finden, und je empfindlicher die Luftblase ist. Wir werden bei Gelegenheit des Nivellirens (Capitel 11) die

Theorie der Libellen hinsichtlich ihrer Empfindlichkeit und ihres Spiegelpunctes ganz vollständig erörtern.

Die Glasröhre ist in einen messingenen Mantel eingeschlossen, welcher nur eine Oeffnung A B hat, um die Luftblase ihrer ganzen Länge nach beobachten zu können. An dem einen Ende ruht sie auf dem Stege C, am andern auf einer Schraube D, welche eben dazu dient, die Libelle so vorzurichten, daß, wenn sie auf horizontaler Ebene steht, die Luftblase die höchste Stelle oder die Mitte einnimmt.

Die Oeffnung AB befindet sich genau in der Mitte der Röhre; ihre Mitte ist durch einen Strich bezeichnet, zu dessen beiden Seiten sich in gleichen Zwischenräumen noch mehre Striche befinden, um das richtige Einspielen der Luftblase genauer beobachten und die Adjustirung genauer verrichten zu können.

Die Dosenlibellen (Taf. IV. Fig. 18) bestehen aus einem cylindrischen Gehäuse von Messing, welches oben mit einem Glase verschlossen wird, dessen untere, von Weingeist benetzte Fläche nach einer Kugel von sehr großem Durchmesser hohl geschliffen ist. Der Weingeist wird durch ein im Boden befindliches Loch, das mit einer Schraube geschlossen wird, eingebracht. Die Luftblase befindet sich, wenn die Libelle auf horizontaler Ebene steht, in der Mitte des Glases, welche durch einige concentrische Kreise bezeichnet ist. Durch eine solche Dosenlibelle kann man zwar eine Meßtischplatte weit schneller in die horizontale Lage bringen, als mit der Röhrenlibelle, sie gewährt aber nicht so große Genauigkeit.

§. 61.

Die Kippregel.

Die Kippregel besteht, ihren wesentlichen Theilen nach, aus einem ohngefähr 22 bis 24 Pariser Zoll langen, 25 Pariser Linien breiten und 2 Linien dicken, messingenen Lineale (Regel) A B (Taf. IV. Fig. 8) und einem mit einem Fadenkreuze versehenen Fernrohre C D, das sich in einer gegen die Ebene des Lineals senkrechten Ebene auf und nieder bewegen (kippen) läßt, wobei noch die Bedingung Statt findet, daß die Axe des Fernrohres mit der Kante des Lineales in eine Verticalebene falle, wenigstens daß beide Linien parallel seien.

Die Einrichtung kann im Besonderen auf mancherlei Weise getroffen werden; die in Fig. 8 (Taf. IV.) abgebildete ist absichtlich von einem minder vollkommenen Exemplare entlehnt, um besser auf das, was zu einem guten Instrumente der Art gehört, hinweisen zu können. E E sind zwei viereckige Platten, die in der Mitte viereckig durchlocht sind und mittelst der Schrauben F, F, die im Lineale ihre Muttern haben, auf diesem festgehalten werden. Nahe am Rande, nach der Seite des Lineals zu, an welcher die Linien nicht gezogen werden, sind in jeder Platte Muttern für die Schrauben a, a eingeschnitten, die dazu dienen, die Platten E, E auf dieser Seite ein Wenig zu heben oder zu senken, damit die Umdrehungsebene des Fernrohrs genau in die Verticalebene gebracht werden könne. Die Schrauben b, b haben ihre Muttern ebenfalls in den Platten E, E; in jeder Platte drücken von beiden Seiten her zwei solche Schrauben gegen die Schraube F, wodurch man das ganze, auf dem Lineale ruhende Gerüste ein Wenig nach der einen oder anderen Seite zu rücken und dadurch die Axe des Fernrohres mit der Kante des Lineals in einerlei Verticalebene zu bringen vermag.

Mit den Platten E, E sind die Schenkel G, G fest verbunden, und mit diesen wiederum das nach Fig. 11 und Fig. 12 (Taf. IV.) gestaltete Stück H, welches die Lager für den Zapfen oder Bolzen L bildet, dessen Umdrehungsaxe durch den Punct K vorgestellt ist. Die zwei Stellen des Zapfens L, welche in den Lagern unmittelbar aufliegen, sind conisch abgedreht. An dem Zapfen L befindet sich die Scheibe S, an welche mittelst der drei Schrauben d, d, d der Bogen M, der seinen Mittelpunct in K hat und auf welchem das Fernrohr C D ruht, befestigt ist, so daß alle diese Stücke gleichzeitig um K, als Mittelpunct, bewegt werden können. — Hier ruht also die Umdrehungsaxe auf zwei Lagern; statt dessen findet man auch eben so häufig einen conischen Bolzen, der sich in einem conischen Loche dreht, und diese Einrichtung hat vor der vorigen den Vorzug, daß man den Zapfen leicht ausnehmen und so wieder einsetzen kann, daß das Fernrohr die entgegengesetzte Lage bekommt, so, als ob man es um 180° gedreht hätte.

Das bogenförmige Stück e f, welches sich concentrisch an den Bogen M M anschließt, ist durch die Schrau-

ben i, i auf zwei Füße befestigt, die in die Schenkel G, G eingelassen sind. In ihm ist ein Loch für eine Welle l von zweckmäßiger Länge, welche mittelst des ränderirten Rädchens n umgedreht werden kann. Auf dieser Welle sitzt hart an dem Stücke e f ein Zahnrädchen r, welches in einen auf dem Halbkreise M M befestigten gezahnten Bogen eingreift und somit die ganze Vorrichtung um die Axe K herumzuführen vermag. — Statt des Halbkreises M M findet man auch oft einen ganzen Kreis, damit man das Fernrohr C D ganz umschlagen und in die entgegengesetzte Richtung bringen könne, was zum Behufe einer genauen Rectification des Instrumentes zwar unerläßliche Bedingung ist, aber auch seine Nachtheile insofern hat, als das Instrument eine größere Höhe bekommen muß, die bei häufigem Gebrauche desselben unbequem wird. Deßhalb aber ist es zweckmäßig, wenn man die Axe des Instrumentes leicht ausnehmen und wieder einsetzen kann, wodurch eben die Drehung des Fernrohres um 180° bewirkt wird.

Auf dem Stücke e f bemerkt man noch ein aufgeschraubtes Plättchen mit einem Index, um die Höhen- oder Tiefenwinkel, um welche das Fernrohr C D gegen den Horizont geneigt wird, mittelst der auf dem Bogen M M verzeichneten Grade angeben zu können. Diese Vorrichtung hat indeß keinen erheblichen Nutzen; auch sollte statt des Plättchens n ein Nonius angebracht sein. Uebrigens kann der Kreisbogen M auch ganz wegbleiben, weil man das Fernrohr auch schon durch Anfassen mit der bloßen Hand um seine Axe drehen kann. In diesem Falle ist die Axe ein conischer Zapfen, in welchen von der andern Seite her eine Schraube geht, die ihn in seinem conischen Loche zurückhält, und durch welche die Bewegung mehr oder minder gehemmt werden kann, damit das Fernrohr nicht durch sein eigenes Gewicht niedersinke.

Das Fernrohr C D ist astronomisch und hat bloß ein einfaches Objectiv, was für solche Distanzen, in welchen man bei'm Gebrauche des Meßtisches zu visiren hat, meistens hinreicht. Im Brennpuncte des Oculares befinden sich zwei rechtwinklig sich kreuzende Fäden von dem feinsten Gold- oder Silberdraht, oder besser aus Spinneweben, von denen der eine vertical gestellt wird, so daß der andere horizontal zu liegen kommt.

Beide Fäden müssen sich genau in der Axe des Fernrohres kreuzen, so daß man dieselbe, und somit auch die Kante des Lineals, genau nach einem entfernten Objecte richten kann. Bei gegenwärtigem Exemplare waren beide Fäden über einen Ring gezogen, der in die Ocularröhre C eingeschoben wurde. Die Einrichtung ist zwar sehr einfach, aber auch höchst mangelhaft; die vollkommene Rectification des Instrumentes erfordert vielmehr, daß man das Fadenkreuz durch Stellschräubchen m, die von Außen in die Ocularröhre gehen und auf den Ring, worin die Fäden aufgespannt sind, wirken, ein Wenig rücken und dadurch dem verticalen Visirfaden die richtige Lage geben kann.

§. 62.

Statt des Fernrohres mit einem Fadenkreuze gebraucht man auch wohl bei Messungen, die keine großen Strecken umfassen, bloße Diopter n, welche aus zwei, wenigstens 8 Zoll entfernten, metallenen Plättchen bestehen, von denen das vordere, das Objectivdiopter, ein weites, viereckiges Loch hat und eigentlich einen Rahmen bildet, durch dessen Mitte ein Pferdehaar vertical ausgespannt ist. Das hintere oder Oculardiopter hat eine enge Spalte zum Durchsehen, oder statt deren mehre vertical untereinander stehende kleine Löcher. Mittelst solcher Diopter kann man ebenfalls eine Richtung nach einem Objecte nehmen, obschon nicht so genau, wie bei'm Gebrauche eines Fernrohres mit einem Fadenkreuze, weil ein Abweichungswinkel des Diopterhaares von dem Gegenstande, auf welchen es gerichtet ist, dem bloßen Auge schon nicht mehr sichtbar bleibt, wenn derselbe weniger als eine Minute beträgt. Auch haben die Diopter das Unbequeme, daß man den nahen Faden und das ferne Object zugleich scharf in's Auge fassen muß, wodurch dieses oft sehr großen Zwang und bedeutende Anstrengung erleidet. Es ist daher ein Fernrohr, welches eben keine kostspielige Sache ist, wenn es nur ein einfaches Objectiv hat, den bloßen Dioptern weit vorzuziehen.

Die Spalte oder die Löcher im Oculardiopter dürfen weder zu eng, noch zu weit sein; im ersten Falle sehen die Objecte zu undeutlich; im zweiten Falle aber

kann die Richtung nicht genau genommen werden, weil der eine Punct derselben, das Loch im Oculardiopter nämlich, wegen seiner Größe dem Auge keinen sichern Anhalt gewährt.

Wenn Dioptern an die Enden eines Lineals gesetzt sind, so hat man das Diopterlineal (ohne Kippung), das man sonst gewöhnlich bei Vermessungen mit dem Meßtische gebrauchte, dessen man sich aber jetzt, seines beschränkten Gebrauches wegen, nur noch selten bedient. Die Brauchbarkeit dieses Apparates wird erhöht, wenn neben dem gewöhnlichen Objectivdiopter noch ein anderes gleiches, aber höher stehendes, das sogenannte Bergdiopter, angebracht ist, um nach hochliegenden Gegenständen visiren zu können. Dieses Bergdiopter ist so eingerichtet, daß es auf die Fläche des Lineals niedergelegt werden kann, wenn es nicht gebraucht wird.

§. 63.

Aufgabe. Die Wasserwaage zu prüfen und zu berichtigen und den Meßtisch horizontal zu stellen.

1) Prüfung und Berichtigung der Wasserwaage. Nachdem man den Tisch in bequemer Höhe aufgestellt und alle seine Theile gehörig befestigt hat, setzt man die röhrenförmige Libelle auf die Meßtischplatte (der man schon durch Rücken an den Füßen des Statives eine beiläufig horizontale Lage gegeben hat), und zwar so, daß ihre Correctionsschraube D (Taf. IV. Fig. 13) gerade über eine der drei Horizontalschrauben, die wir mit A, B und C bezeichnen wollen, etwa über A zu stehen kommt, und daß ihre Richtung auf der Linie senkrecht steht, die man durch die Schrauben B und C ziehen kann (Taf. III. Fig. 27). Man hebt oder senkt nun die Schraube A so lange, bis die Blase der Libelle richtig einspielt. Wenn hierbei der Haken K aufhört, die Scheibe EE (Taf. IV. Fig. 1) fest genug gegen die Horizontalschrauben anzuziehen, also die Standfestigkeit der Tischplatte nachläßt, so muß man dieselbe sogleich durch die Schraube l wieder herstellen, und durch eben diese Schraube muß nachgeholfen werden, wenn die Klemmung zu stark werden sollte.

Man markirt nun die Puncte A und S (Taf. III. Fig. 27), wo die Wasserwaage gestanden hat, und dreht dann dieselbe um, so daß S auf A und A auf S zu stehen kommt. Spielt auch in dieser Stellung die Blase richtig ein, oder behält sie in der Röhre dieselbe Stellung, wie vorhin, so ist die Libelle ohne Fehler; wo nicht, so ist sie falsch.

Man hebe oder senke nun die Horizontalschraube des Meßtisches unterhalb A so weit, bis der Fehler der Libelle zur Hälfte corrigirt ist, d. h., bis die Luftblase sich bis zur Hälfte dahin erhoben hat, wo sie stehen muß; die andere Hälfte des Fehlers corrigire man durch die Correctionsschraube der Libelle, so wird diese wenigstens nahe richtig sein.

Man drehe nun die Libelle wieder um und wiederhole das ganze Verfahren von Neuem, so lange, bis die Libelle in beiden Stellungen richtig einspielt. Sie ist dann ohne Fehler, und die Tischplatte steht in der Richtung A S horizontal. — Damit bei diesem Versuche die Ebene, worauf die Libelle steht, möglichst vollkommen sei, legt man ein messingenes Lineal unter, wozu der verjüngte Maßstab dienen kann.

Denn es sei A B (Taf. III. Fig. 26) die Tischplatte und C D die Libelle in der ersten Stellung, nachdem auf die angezeigte Weise das Einspielen der Blase in der Mitte der Röhre bewirkt worden. Dann ist zwar C D horizontal, nicht aber der Tisch A B, sondern dieser macht mit C D einen Winkel M. Wird nun die Libelle aus der Lage C D in die Lage C′D′ gebracht, so macht sie wieder mit der Tischplatte einen Winkel $N = M$, und ihre Abweichung von der Horizontallinie C D wird durch den Winkel C′F D vorgestellt, welcher als Außenwinkel des Dreiecks F M N gleich $M + N$, d. h., doppelt so groß als M, ist. Wird also durch die Horizontalschraube die Hälfte der Abweichung C′F D, d. h., die Hälfte der Abweichung der Luftblase, corrigirt, so steht die Tischplatte nach der Richtung der Libelle horizontal, und wenn man dann die noch übrige Abweichung der Libelle durch die Correctionsschraube wegbringt, so muß sie richtig sein.

Anmerkung. Um eine Dosenlibelle zu prüfen, stellt man sie auf die Meßtischplatte und richtet diese mit-

telst der Horizontalschrauben so lange, bis die Blase in der Mitte steht. Dann zieht man um das Gehäuse auf der Meßtischplatte einen Kreis und dreht die Libelle in demselben um. Spielt die Blase immer richtig ein, so ist die Libelle richtig; wo nicht, so ist sie falsch. Den Fehler kann aber nur der Mechanikus durch Abdrehen oder Abschleifen des untern Randes verbessern.

2) Horizontalstellung der Tischplatte. Um die Meßtischplatte nach allen Richtungen horizontal zu stellen, setzt man, nachdem man die horizontale Lage durch Rücken der Füße des Stativs beiläufig erhalten hat, die corrigirte Libelle gerade über zwei Horizontalschrauben B und C (Taf. III. Fig. 27), und sucht ihr richtiges Einspielen dadurch zu bewirken, daß man an diesen Schrauben, beide Hände gebrauchend, zu gleicher Zeit aber nach entgegengesetzten Richtungen dreht, wie in der Figur angedeutet ist. Wenn während des Drehens der Horizontalschrauben die Klemmung der Scheibe E (Taf. IV. Fig. 1) zu schwach oder zu stark wird, so muß der Haken K durch die Schraube l angezogen, oder nachgelassen werden. Spielt nun die Libelle über den Schrauben B und C richtig ein, so steht der Tisch nach dieser Richtung horizontal. Man bringe dann die Libelle in die Lage A S, senkrecht gegen ihre vorige Lage, und bewirke das richtige Einspielen der Blase bloß durch Drehen an der Horizontalschraube A, so steht der Tisch auch nach der Richtung A S, und folglich nach allen Richtungen horizontal. Man bringt endlich die Libelle nochmals in die Lage B C und wiederholt das ganze Verfahren von Neuem, um die etwa noch übrige Abweichung der Tischplatte von der Horizontalebene vollends zu corrigiren.

§. 64.

Aufgabe. Die Kippregel zu prüfen und zu berichtigen.

Eine Kippregel hat man vor dem Gebrauche folgenden Prüfungen zu unterwerfen:

1) Ob das Lineal gerade sei. Zu diesem Behufe zieht man daran auf der Meßtischplatte mit einer etwas starken, doch nicht zu scharfen Nadel eine Linie so

lang, als möglich, und sticht mit einer feinen Nadel nahe an den Enden ein Paar Puncte hinein. Man legt dann das Lineal von der anderen Seite an diese Linie, wobei die eingestochenen Puncte als sicherer Anhalt dienen. Zieht man nun die Linie noch einmal, so muß sie mit der ersten allenthalben zusammenfallen, wenn das Lineal richtig ist. Geschieht dieses nicht, so ist das Lineal falsch und muß vor dem Gebrauche vom Künstler berichtigt werden.

2) Ob das Fadenkreuz im Fernrohre die richtige Lage habe. Hierzu gehört:

a) Daß es deutlich gesehen werde. Dieses geschieht im Allgemeinen, wenn es im Brennpuncte des letzten Oculares liegt; allein für jedes Auge macht sich doch eine besondere Stellung nöthig, und daher ist die Einrichtung so getroffen, daß man das Fadenkreuz vom Oculare, oder dieses von jenem, so weit entfernen kann, bis die Fäden am deutlichsten gesehen werden (§. 48). Man muß besonders darauf achten, daß der Faden mit dem Bilde des Objectes, wornach er gerichtet ist, genau zusammen, d. h. in einerlei Ebene, falle. Um dieses genau zu erhalten, richtet man den Faden auf ein entferntes Object und zieht dabei die Ocularröhre so weit heraus, bis das Object deutlich gesehen wird. Bewegt man dann das Auge vor dem Oculare hin und her und weicht dabei der Faden vom Objecte ab, so liegt er mit dessen Bilde nicht in einerlei Ebene, und man muß das Fadenkreuz vom Oculare noch ein Wenig entfernen, oder es ihm näher bringen, bis bei der Bewegung des Auges keine Abweichung mehr bemerkt wird.

b) Daß der verticale Faden des Fadenkreuzes auch genau vertical stehe. Man setzt die Kippregel auf den genau horizontal gestellten Meßtisch und bringt den gedachten Faden nach einem fernern, senkrecht stehenden Objecte in die erforderliche Lage. Doch fällt diese Rectification mit der unter Nr. 3 zusammen.

c) Daß der verticale Faden durch die Axe des Fernrohres gehe. Die Axe des Fernrohres ist bekanntlich derjenige Lichtstrahl, der durch die Mittelpuncte aller Gläser geht und daher nicht gebrochen wird. Eine solche Axe hat aber das Fernrohr nur dann, wenn seine Gläser richtig centrirt und centrisch in die Fassung gesetzt sind. Wird es dann um seine Axe gedreht, ohne daß die Richtung derselben verändert wird, so bleiben die Bilder

in vollkommener Ruhe, woraus sich ein leichtes Mittel ergiebt, die richtige Lage des Visirfadens zu prüfen. Man richte nämlich den Visirfaden **ab** so auf ein fernes Object, daß er dasselbe genau deckt, und drehe sodann das Fernrohr (in seinen Lagern) um 180 Grad herum, so daß der Faden aus der Lage **ab** (Taf. III., Fig. 21) in die Lage **a' b'** kommt. Deckt er das Object nicht mehr, so geht er auch nicht durch die Axe, sondern diese liegt mitten zwischen **ab** und **a'b'**, und man muß daher durch die Stellschrauben des Ringes, worin das Fadenkreuz befestigt ist, den Faden **a' b'** dem Objecte **ab** um die Hälfte näher bringen, so daß er in die Lage **cd** kommt. Indessen ist diese Correction überflüssig, weil die nachfolgenden Berichtigungen oft wieder eine Verrückung des Fadens aus der Axe erfordern.

Anmerkung. Außer dem verticalen Faden ist noch ein horizontaler eingespannt, der eigentlich bei'm gewöhnlichen Gebrauche der Kippregel, wo keine Höhen- oder Tiefenwinkel gemessen werden, überflüssig ist. Derselbe muß ebenfalls durch die Axe des Fernrohrs gehen, und beide Fäden müssen nicht nur gegen einander, sondern auch gegen die Axe die senkrechte Lage haben, welche letzteren Bedingungen schon vom Künstler genügend erfüllt werden.

3) Ob die Umdrehungsebene des Fernrohres gegen die Ebene des Lineals senkrecht sei, und ob die Visiraxe des Fernrohrs bei Umdrehung desselben immer in einerlei Ebene bleibe. Man befestigt an einem hohen Orte ein schwaches Seil und bindet ein Gewicht daran, das man, zur Vermeidung des Schwankens, in ein Gefäß mit Wasser herabhängen läßt. Dann setzt man die Kippregel auf den genau horizontalen und in geeigneter Entfernung von dem Seile aufgestellten Tisch, richtet den verticalen Faden auf das Seil und bewegt das Fernrohr so weit auf und ab, als es angeht. Wird das Seil vom Visirfaden in allen Lagen des Fernrohres gedeckt, so ist die Umdrehungsebene des letzteren auch auf der Ebene des Lineals und der Tischplatte senkrecht; wo nicht, so muß durch die Stellschrauben **aa** (Taf. IV., Fig. 8) nachgeholfen werden. Bei dieser Gelegenheit muß man begreiflich die verticale Stellung des Visirfadens zugleich mit bewirken. —

Alles dieses setzt aber voraus, daß die Visiraxe des Fernrohres, nämlich die von dem (genau vertical gerichteten) Visirfaden durch das anvisirte Object gezogene Linie, auf der Umdrehungsaxe senkrecht stehe und folglich bei ihrer Umdrehung immer in derselben, durch den Visirfaden gehenden Verticalebene bleibe, eine Eigenschaft, welche dem Instrumente schon vom Künstler gegeben sein mußte. Es ist auch schwer, diesen Fehler bei einer Kippregel, die sich nicht umschlagen läßt, zu entdecken; wenn er aber in bedeutendem Grade vorhanden ist, so wird man sich vergebens bemühen, das Instrument durch die Stellschrauben a a dahin zu bringen, daß der verticale Visirfaden das Seil bei jedem Elevationswinkel des Fernrohres decke; denn wenn auch die Deckung bei der höchsten Erhebung und der tiefsten Senkung stattfindet, so wird man dennoch eine Abweichung in der Mitte bemerken, weil die Visiraxe des Fernrohres nicht in einerlei Ebene auf und nieder geht, sondern sich in der Oberfläche eines stumpfen Kegels bewegt. Wenn aber auch ein solcher Fehler kund wird, so hat die Kippregel doch keine andere Correctionsvorrichtung, als eine Verschiebbarkeit des verticalen Visirfadens nach der rechten oder der linken Seite, wodurch dieser begreiflich meistens aus der Axe des Fernrohres gerückt werden wird, und deshalb ist auch die Correction in 1, c überflüssig.

Genauer lassen sich diese Rectificationen bewirken, wenn das Fernrohr sich ganz herumdrehen läßt, und man hat dann nicht einmal nöthig, ein Seil aufzuhängen, wenn man in einer bergigten Gegend oder in der Nähe eines Thurmes sich befindet. Man stelle den Meßtisch horizontal, setze die Kippregel darauf, visire nach einem entfernten Gegenstande A (Taf. IV., Fig. 17), der jedoch so gelegen ist, daß man das Fernrohr nicht aus der horizontalen Lage zu bewegen braucht, und ziehe hierauf am Lineale eine möglichst lange Linie MN, deren Endpuncte man durch ein Paar feine Nadelstiche kenntlich macht, um in der Folge das Lineal wieder mit Sicherheit daran legen zu können. Wenn man nun das Fernrohr um 180° herumdreht, so wird die Visiraxe die Lage CB bekommen, welche nicht mit CA′, d. h., mit der verlängerten vorigen Richtung CA, zusammenfällt, wenn nicht die Visiraxe des Fernrohres gegen die Umdrehungsaxe senkrecht steht. Man lege also das Lineal von der andern

Seite an die Linie MN, daß es nämlich nicht mehr von der Seite X, sondern von Y her anliege, und drehe das Fernrohr, welches die Lage CA′ bekommen hat, um 180° herum, bis es wieder horizontal liegt. Dann wird man den Gegenstand A nicht mehr vom Visirfaden gedeckt sehen, sondern die Visirlinie CB′ wird mit der vorigen CA den Winkel ACB′ bilden, welcher dem doppelten Winkel gleich ist, um welchen die Visiraxe und die Umdrehungsaxe vom rechten abweichen*). Die Hälfte der Abweichung ACB′ wird man also durch die Vorrichtung zu corrigiren haben, durch welche man an der Kippregel die Lage des Fernrohres ändern kann, oder wenn eine solche Vorrichtung nicht vorhanden ist, durch Verrückung des Visirfadens, und dann bewegt man mittelst ihrer Micrometerschraube die Meßtischplatte so weit herum, bis man den Gegenstand A vom Visirfaden wieder gedeckt sieht. Man wiederholt nun den Versuch nochmals und corrigirt so

---

*) Wenn nämlich die Visiraxe in die Lagen CA, CB, CA′, CB′ (Taf. IV., Fig. 17) horizontal gerichtet ist, so ist sie mit der Meßtischplatte parallel. Ist CX die Axe des vom Fernrohre beschriebenen Kegels, also die Umdrehungsaxe, so müßte dieselbe, streng genommen, ebenfalls horizontal liegen und daher mit der Meßtischplatte parallel sein. Dieses findet nun zwar im Allgemeinen vor der Rectification nicht Statt; allein das Instrument ist doch vom Künstler schon so vorgerichtet, daß die Umdrehungsaxe bei horizontalem Stande des Meßtisches ebenfalls nahe horizontal liegen wird. Wenn wir daher CD = CE machen, ED ziehen und darauf das Perpendikel CH fällen, so wird zwischen den Winkeln HCD und XCD kein merklicher Unterschied sein; da CX in einer durch CH gegen die Ebene CED senkrechten Ebene liegt. Wir können also den Winkel bei D oder E als den Winkel annehmen, um welchen der von der Umdrehungs- und der Visiraxe gebildete Winkel XCD vom rechten abweicht, und dann ist der Winkel ACB′ offenbar doppelt so groß. — Daß aber die Winkel HCD und XCD nur um eine unmerkliche Größe unterschieden sind, kann man gleich sehen, wenn man um C eine Kugel beschreibt, da dann ein sphärisches Dreieck abc entsteht, welches bei a einen rechten Winkel hat, so daß also nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie $\cos bc = \cos ac \cdot \cos ab$ ist. Setzen wir aber den Winkel $XCD = bc = 90^\circ - z$, $HCD = ac = 90^\circ - z'$ und $XCH = v$, so haben wir $\sin z = \sin z' \cos v$, also $\sin z' - \sin z = \sin z' - \sin z' \cos v = \sin z' (1 - \cos v)$, d. i. $2 \cos \frac{1}{2}(z + z') \sin \frac{1}{2}(z' - z) = 2 \sin \frac{1}{2} v^2 \sin z'$. Hier dürfen wir die Sinus mit den Winkeln durch $\sin 1''$ multiplicirt vertauschen und $\cos \frac{1}{2}(z + z') = 1$, $\sin z = \sin z'$ setzen: wodurch wir $z' - z = \frac{1}{2} v^2 z (\sin 1'')$ erhalten. Wenn wir z und $v = 1^\circ$ nehmen, wird $z' - z$ nicht viel über $\frac{1}{2}$ Secunde.

lange, bis der Gegenstand A in beiden Lagen der Kippregel vom Visirfaden genau gedeckt wird.

Wenn nämlich das Fernrohr in beiden Lagen des Instrumentes horizontal gerichtet ist, so verschwindet der Einfluß der schiefen Lage der Umdrehungsebene (d. h. der gegen die Umdrehungsaxe senkrechten Ebene), gegen die Meßtischebene, nicht so aber, wenn das Fernrohr gehoben oder gesenkt wird. Nachdem man also die vorhin angezeigte Correction ausgeführt hat, hebe man das Fernrohr so hoch als möglich und bemerke, während das Lineal an der Linie MN liegt, einen Gegenstand A, der vom Visirfaden genau gedeckt wird. Man lege dann das Lineal wieder von der anderen Seite her an die Linie MN und drehe das Fernrohr abermals nach dem Gegenstande A, so wird derselbe, wenn die Umdrehungsebene nicht senkrecht auf der Meßtischplatte steht, nicht mehr vom Visirfaden gedeckt werden, sondern während vorhin die Visirlinie die Lage CA hatte, wird sie jetzt von C nach B' gerichtet sein, also der Faden um den Winkel ACB' abweichen. Die Hälfte dieser Abweichung wird durch die Hebeschrauben a a (Taf. IV., Fig. 8) corrigirt*) und dann die Meßtischplatte durch ihre Micrometerschraube so weit gedreht, bis der Gegenstand A vom Visirfaden wieder gedeckt wird. Nun kehrt man die Kippregel abermals um und verfährt ganz, wie vorher, so lange, bis der Gegenstand A in beiden Lagen des Instrumentes vom Visirfaden gedeckt wird. Auch kann man

---

*) Da die schiefe Neigung der Visiraxe gegen die Umdrehungsaxe schon corrigirt ist, so ist nur die Abweichung der Umdrehungsebene von der Verticalebene, die durch die Visiraxe gelegt wird, übrig. Es sei in Fig. 16 (Taf. IV.) A M die Umdrehungsebene in der einen Lage des Instrumentes, und AB ihre Durchschnittslinie mit der Meßtischebene, von welcher wir annehmen wollen, daß sie mit der Kante des Lineals zusammenfalle. Wenn nun in dieser Lage des Instrumentes die Umdrehungsebene MA von der durch AB gelegten Verticalebene h a A links abweicht, so wird sie in der anderen Lage BN um ebensoviel rechts abweichen, und da die Visirlinien a b und a b' beidemal gleich hoch gehoben sind, so begreift man leicht, daß sie zu beiden Seiten gleichviel von der Verticalebene h a A abweichen werden, in welche sie doch eigentlich hineinfallen sollten. Es ist also der Winkel b a b' der doppelten Abweichung der a b' von der Verticalebene h a A gleich, und um sie in dieselbe hineinzubringen, muß man sie ihr um den halben Winkel b a b' nähern.

zu mehrer Versicherung den Versuch mit Objecten in verschiedener Höhe anstellen.

4) Endlich, ob die Visirlinie, oder die Axe des Fernrohres mit der Kante des Lineals in einerlei Ebene falle. Dieser Fehler ist, wie wir in der Folge sehen werden, der unschädlichste von allen und hat, wenn die Abweichung nicht zu bedeutend ist, was niemals der Fall sein kann, auf die Meßtischmessungen so gut, wie gar keinen Einfluß. Es reicht daher hin, wenn man, noch ehe man die angezeigten Correctionen vornimmt, die Kippregel auf die Meßtischplatte setzt und ein auf die eine Kathete gestelltes rechtwinkliches Dreieck an die Kante des Lineals anrückt. Findet man dann, daß die andere senkrecht stehende Kathete die kreisrunden Fassungen, sowohl des Objectiv-, als auch des Augenglases, halbirt, so hat das Fernrohr die richtige Lage gegen die Kante des Lineals und kann durch die nachfolgenden Correctionen nicht beträchtlich aus derselben verrückt werden. Fände man aber eine Verbesserung nöthig, so müßte man dieselbe durch die Schrauben **b b** (Taf. IV., Fig. 8) bewirken.

Man kann bei dieser Gelegenheit zugleich auch vorläufig untersuchen, ob die Umdrehungsebene des Fernrohres auf der Ebene des Lineals senkrecht stehe. Man läßt nämlich das auf und ab bewegte Fernrohr vorn in der Nähe des Objectivglases an der senkrecht stehenden Kathete des Dreiecks hinstreichen und sieht zu, ob es in allen Lagen dieselbe berührt. Eine etwaige Abweichung kann man sogleich durch die Hebeschraube **a a** (Taf. IV., Fig. 8) berichtigen.

Anmerkung. Wir bemerkten vorhin, daß man die unrichtige Lage der Visirlinie gegen die Umdrehungsaxe durch Verschiebung des Visirfadens berichtigen könne. Dies sollte man freilich nicht thun, weil dadurch der Visirfaden leicht aus der Axe des Fernrohrs gerückt wird, und auf alle Fälle darf die Verrückung nur äußerst gering sein. Daß eine solche Verrückung wohl zulässig sei, ergiebt sich aus folgender Betrachtung. Es sei (Taf. III., Fig. 25) **ax** die Axe des Fernrohres, und der verticale Visirfaden befinde sich seitwärts in **a'** und falle mit dem Bilde des Objectes **A** zusammen. Unter allen von **A** auf das Objectiv-

glas fallenden Strahlen giebt es auch einen AB, der so gebrochen wird, daß seine Richtung ba' bei'm Austritte der Richtung AB bei'm Einfall parallel ist, und dieser Strahl geht immer nahe durch die Mitte des Objectivglases MN. Die Richtung ab ist nun die eigentliche Visirlinie und kann als durch A gehend angesehen werden, da sie von der ihr parallelen BA nur wenig absteht. Ein zu weites Abrücken des Visirfadens aus der Axe würde aber den Vortheil des deutlichen Sehens rauben, das in der Richtung der Axe statt hat, daher das Instrument schon nahe richtig aus den Händen des Künstlers kommen muß.

§. 65.

Die Orientirboussole.

Dieses Instrument dient, um die Richtung der magnetischen Mittagslinie auf dem Meßtische anzugeben; auch wird es zur ungefähren Orientirung (Stellung) des Meßtisches benutzt. Es besteht aus einem runden, mit einer Glasplatte verschlossenen Gehäuse, das auf eine viereckige Messingplatte gelöthet ist, und in welchem auf einem Stifte eine etwa 3 Zoll lange Magnetnadel frei schwebt. In der Ebene der Nadel ist an der inneren Wand des Gehäuses ein Ring mit zwei diametral entgegengesetzten Indexstrichen befestigt, auf welche man die Nadel einspielen läßt, indem man das Gehäus so lange dreht, bis die Nadel in die Richtung der so bezeichneten Linie kommt. Diese Linie muß mit einer Kante der viereckigen Platte, auf welche das runde Gehäus gelöthet ist, vollkommen parallel sein. — Durch eine hebelartige Vorrichtung kann man die Nadel vom Stifte abheben und gegen die Glasplatte klemmen (arretiren).

Gesetzt nun, man habe über einem Puncte des Feldes den Meßtisch orientirt, d. h., den einen Endpunct einer Linie des Tisches über den entsprechenden Punct des Feldes so gebracht, daß beide Linien, die auf dem Tische und die entsprechende auf dem Felde, gleiche Richtung haben. Setzt man dann die Boussole so auf den Tisch, daß die Spitzen a und b (Taf. III., Fig. 20) der Nadel genau auf die Indexstriche zeigen, und zieht man an der Platte die Linie cd, so ist diese die Richtung der mag-

netischen Mittagslinie im Vergleich mit den auf dem Meßtische entworfenen Puncten.

Von den Boussolen werden wir ausführlicher reden, wenn wir diejenige Einrichtung beschreiben, welche zum eigentlichen Vermessen gebraucht wird.

§. 66.

Der Winkelspiegel.

Dieses nützliche und äußerst bequeme Werkzeug dient zur Bestimmung rechter Winkel auf dem Felde, meist nur in der Absicht, um auf einer Linie den Punct zu bestimmen, wo das von einem zur Seite liegenden Puncte herübergezogene Perpendikel eintrifft. Es besteht, der Hauptsache nach, aus zwei ebenen Glasspiegeln, von ungefähr 1 Zoll Länge und $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ Zoll Höhe, AB und CD (Taf. V., Fig. 9), welche unter einem Winkel $x = 45^0$ gegeneinander geneigt sind. Gesetzt nun, es falle von dem Puncte E der Linie EF ein Strahl EG auf den Spiegel CD, so wird er von da nach dem zweiten Spiegel AB, von diesem aber wieder zurückgewiesen und gelangt in der Richtung KI in's Auge, so daß man den Stab, der bei E steht, im Spiegel AB bei K erblickt. Die Richtung IK ist aber senkrecht auf FE.

Denn nach der Lehre von der Spiegelung wird der Strahl EG so zurückgeworfen, daß Winkel $cGH = EGd$; setzen wir daher $EGd = z$, so ist $BHG = x + z = 45^0 + z$, und daher auch $cHI = 45^0 + z$; folglich bleibt $IHG = 90^0 - 2z$. Nun ist aber auch $cGI = EGd = z$, folglich $HGI = 2z$, und daher im Dreiecke IHG die Summe der Winkel IHG und $HGI = 90^0 - 2z + 2z = 90^0$, folglich auch $HIG = 90^0$.

Die Zusammenordnung des Instrumentes wird nun so gemacht, wie aus Fig. 15 (Taf. IV.) ersichtlich ist. Die beiden Spiegel werden auf der Innenseite eines winkelförmig gebogenen Metallbleches befestigt, so daß sie ungefähr einen Winkel von 45^0 mit einander machen. Dieses Blech wird dann in ein messingenes Gehäus, das nach hinten keilförmig zugeht, eingezwängt und in demselben durch eine Schraube x festgehalten. Je nachdem man diese Schraube mehr oder weniger anzieht, bilden die Spiegel einen größeren oder kleineren Winkel miteinander, und so kann man sie genau auf 45^0 Neigung

stellen. Das Gehäus hat zu beiden Seiten unterhalb der Spiegel zwei Fenster A und B, um hindurchzusehen, und ist mit einer eingeschraubten Handhabe versehen, an welcher es in der Hand gehalten wird.

Bei'm Gebrauche legt man das Instrument hart an die Nase und stellt sich so, daß der Stiel senkrecht über die Meßkette zu stehen kommt, die in der Linie ausgespannt ist, auf welche ein Perpendikel gezogen werden soll. Kehrt man nun die offene Seite PQRS des Gehäuses nach dem am Ende der Linie stehenden Fähnchen und sieht bei SP vorbei (nicht etwa durch das Fenster A) auf den Spiegel M, so sieht man darin gedachtes Fähnchen; durch das Fenster B kann man aber zugleich auch ein zur Seite der Kette stehendes Fähnchen erblicken, und wenn beide Fähnchen sich decken, so ist der Punct der Kette, über welchen das Instrument senkrecht steht, derjenige, wo das von dem zur Seite stehenden Fähnchen herübergezogene Perpendikel eintrifft. Um daher diesen Punct zu finden, braucht man nur, in das Instrument sehend, so lange an der Kette hin und her zu gehen, bis beide Fähnchen sich decken.

Zur Controle kann man auch das Instrument nach dem andern Endpuncte der Linie, in welcher die Meßkette ausgespannt ist, richten, wo dann gleichfalls beide Fähnchen sich decken müssen. Wäre dieses nicht der Fall, so müßte man die Stellung der Spiegel durch die Schraube x corrigiren.

Will man auf einer Linie in einem gegebenen Puncte ein Perpendikel errichten, so stellt man sich mit dem Instrumente über diesen Punct und läßt zur Seite einen Stab dahin stecken, wo man ihn von dem am Ende der Linie aufgesteckten Stabe gedeckt sieht.

Anmerkung. Früher bediente man sich zum Abstecken rechter Winkel auf dem Felde des s. g. Winkelkreuzes, eines rechtwinklichen Kreuzes aus hartem Holze, welches sich horizontal auf einem Stocke drehen läßt, und auf dessen Enden Dioptern, oder auch bloß senkrechte Stifte, zum Visiren befestigt sind. Bequemer ist die Einrichtung, wo man statt des Kreuzes eines hohlen messingenen Cylinders sich bedient, in dessen Wand vier enge Schlitze zum Visiren eingeschnitten sind, von denen je zwei diametral gegenüber stehen und einen rechten Winkel

bilden. Mitunter war die Einrichtung auch so getroffen, daß man zugleich Winkel von 45° abstecken konnte.

Der Pastor Dr. Rommershausen hat unter dem Namen Spiegeldiopter ein Instrument angegeben, dessen Zweck ebenfalls die Bestimmung ganzer und halber rechter Winkel ist, das aber keinen so bequemen Gebrauch erlaubt, als der vorhin beschriebene Winkelspiegel. Der Gedanke zu diesem Instrumente ist äußerst einfach und keineswegs neu, denn das Fallon'sche Spiegellineal ist im Grunde dasselbe Werkzeug. Bei A und B (Taf. V., Fig. 10) befinden sich Diopter, von denen jedes durch zwei messingene Stifte gebildet ist, die eine schmale Spalte zwischen sich lassen. Die Spalte des Objectivdiopters B ist jedoch etwas breiter, als die des Oculardiopters A, damit man noch mit gehöriger Helligkeit einen Absteckestab durch dieselbe sehen kann. Gegen die Visirlinie AB ist nun der ebene Spiegel CD unter 45° Neigung gestellt, und wenn daher ein Strahl MN so darauf fällt, daß er mit der Visirlinie AB einen rechten Winkel macht, so wird er in der Richtung dieser Linie reflectirt und geht folglich durch das Oculardiopter A.

Hieraus ergiebt sich der Gebrauch des Instrumentes leicht. Will man auf die Linie MQ von dem Puncte K ein Perpendikel NK fällen, so hält man das Instrument, den Spiegel CD nach dem Stabe M gekehrt, über die in der Richtung MQ ausgespannte Meßkette, visirt durch die Diopter A und B nach dem Stabe K und geht an der Kette so lange hin und her, bis man im Spiegel CD den Stab bei M, und über den Spiegel weg im Diopter B den Stab bei K an einerlei Stelle sieht. Der Punct N der Linie MQ, über welchem der Spiegel CD senkrecht steht, ist dann derjenige, wo das fragliche Perpendikel eintrifft.

Die ganze Vorrichtung ist in einem viereckigen, prismatischen Gehäus von 4 Pariser Zoll Länge angeordnet, worin zugleich sich noch eine ähnliche befindet, mit der man Winkel von 45° abstecken kann.

Man sieht leicht ein, daß man den vorhin beschriebenen Winkelspiegel mit zwei ebenen Spiegeln auch zur Absteckung von Winkeln von 45° einrichten kann; die Neigung beider Spiegel wird dann 22½ Grad betragen müssen. Diopter aber sind dann nicht erforderlich, weil

es nur darauf ankommt, den im Spiegel gesehenen Stab auf den durch das Fenster des Gehäuses gesehenen einzuvisiren, um am Standpuncte den Winkel von 90° oder 45° zu erhalten. Bei Rommershausen's Instrument dagegen kommt es darauf an, scharf vom Standpuncte nach dem zur Seite der Linie stehenden Gegenstande zu visiren, daher Diopteren nothwendig werden, und wenn dann zugleich der vom Spiegel reflectirte Strahl in die Visirlinie fällt, so ist am Standpuncte ein rechter oder ein halber rechter Winkel, je nachdem der Spiegel gegen die Visirlinie geneigt ist.

Würde man nun zwei Winkelspiegel in einem Gehäuse so anordnen, daß der eine Winkel von 90°, der andere Winkel von 45° zeigte, was auf mancherlei Weise möglich ist, so würde nicht nur das Instrument bedeutend kleiner ausfallen, als das Rommershausen'sche, sondern auch weit bequemeres Visiren gestatten, das bei Rommershausen's Einrichtung besonders dadurch beschwerlich und augengefährlich wird, daß die Diopteren nur 4 Zoll von einander entfernt sind.

§. 67.

Die bisher beschriebenen Instrumente dienen lediglich zum Operiren auf dem Felde; um aber die hier gesammelten Data zum Plane oder Risse vereinigen zu können, bedarf man noch folgender Werkzeuge:

1) Den schon bekannten Transversalmaßstab, der aber eine hinreichende Länge haben muß, um auch lange Linien abmessen zu können.

2) Handzirkel, und besonders auch zum Abmessen langer Linien einen Stangenzirkel, dessen einer Fuß durch eine Micrometerschraube genau eingestellt werden kann.

3) Ein sehr accurates langes Lineal von Eisen oder Messing, und zum Abschieben paralleler Linien auch ein großes aus drei messingenen Linealen zusammengeschmiedetes rechtwinkliches Dreieck.

4) Kleine hölzerne Lineale mit kleinen hölzernen Dreiecken, zum Aufzeichnen kurzer Perpendikel und zum Abschieben kurzer Parallellinien in kurzen Abständen.

5) Copirnadeln, um feine Puncte in's Papier zu stechen. Sie werden am besten aus feinen englischen Nähnadeln gefertigt, die man in kleine hölzerne Griffe

befestigt. Zum Ziehen accurater Linien bedient man sich statt des Bleistiftes besser einer etwas starken und nicht allzu scharfen, in einen Griff gefaßten Nadel.

6) Alle übrigen zum Zeichnen erforderlichen Materialien und Instrumente, Reißfedern, Bleistifte, stählerne Schreibfedern, Rabenfedern, schwarze und bunte Tusche, Pinsel u. s. w.

Viertes Capitel.

Die Operationen mit Stäben, Meßkette und Winkelspiegel.

A. Das Abstecken gerader Linien auf dem Felde.

§. 68.

1) Eine gerade Linie ist begreiflich schon abgesteckt, wenn ihre Endpuncte auf irgend eine Weise kenntlich gemacht worden sind; aber es wird oft nöthig, daß man außer ihren Endpuncten noch andere Puncte der Linie bezeichne, und dieses ist die Bedeutung der gegenwärtigen Aufgabe. Ihre Auflösung gründet sich auf das Gesetz des geradlinigen Fortganges der Lichtstrahlen, welches übrigens, wie schon bemerkt, auch die Grundlage der ganzen Geodäsie ausmacht.

2) Will man auf der Linie AB (Taf. V., Fig. 1), deren Endpuncte A und B durch Stäbe bezeichnet sind, einen Zwischenpunct C bestimmen, so begiebt sich ein Gehülfe mit einem Fähnchen in die Nähe von C, der Geometer aber stellt sich von dem Stabe A einige Fuße entfernt, so, daß der Stab B von dem Stabe A gedeckt erscheint. Dann giebt er dem Gehülfen durch Zeichen zu verstehen, daß er seinen Stab C rechts oder links rücken solle, bis dieser Stab ebenfalls von dem Stabe A verdeckt wird, so daß man also vor dem Stabe A weder B noch C sieht. Dann ist C mit A und B in gerader

Linie, weil derselbe Stab A, der die von B ausgehenden Lichtstrahlen in's Auge zu treten hindert, auch die von dem Stabe C kommenden aufhält.

3) Soll ein Stab A in der Verlängerung einer Linie CB aufgestellt werden, so ist die Operation noch leichter, indem dann kein Gehülfe nöthig ist. Man geht mit einem Stabe in die Nähe von A und tritt so lange auf die eine oder die andere Seite, bis man den Stab B von dem bei C gedeckt sieht. Stellt man den Stab A so, daß er den bei C deckt und zugleich auch den bei B unsichtbar macht, so ist er gehörig eingerichtet.

4) Kommt der Fall vor, daß in der Linie AB (Taf. V, Fig. 2), deren Endpuncte unzugänglich sind, ein dritter Punct C abzustecken wäre, so stellt der Geometer sich mit einer Meßfahne in den Punct f, von welchem er glaubt, daß er in der Linie AB liegen möge. Einen Gehülfen schickt er etwa 100 Schritte weit von sich nach g und richtet dessen Fähnchen so, daß f, g und B in gerade Linie fallen. Dann läßt er sich von dem Gehülfen dergestalt einrichten, daß sein Fähnchen nach f' in die Linie Ag versetzt wird. Hierauf visirt er wieder den Stab des Gehülfen in die Linie f'B nach g', dieser wiederum den Stab des Geometers nach f'' in die Richtung Ag' u. s. w. Man sieht, daß man auf diese Weise der Linie AB immer näher kommt, und daß man das Verfahren so lange fortsetzen muß, bis nichts mehr zu bessern ist. Man wird indessen diese zeitraubende Operation selten nöthig haben.

§. 69.

Hierzu müssen wir jedoch noch Folgendes bemerken:

1) Bei'm Visiren soll man nur des einen Auges sich bedienen, während man das andere schließt. Hat man beide Augen offen, und ist es auch gelungen, zwei Stäbe so zu sehen, daß der vordere vom hinteren gedeckt wird, so ist sicherlich nur das eine Auge thätig gewesen, denn man begreift, daß, wenn für das eine Auge zwei Stäbe sich decken, dasselbe nicht auch für das andere der Fall sein kann, da die durch beide Stäbe gehende Linie gegen jedes Auge eine andere Lage hat. Es ist daher am besten, und dient selbst sehr viel zur Schonung des Gesichtes, wenn man das unthätige Auge

ganz schließt. Nur wenn beide Stäbe sehr weit entfernt sind, wird es gleichgültig sein, ob man nur das eine, oder beide Augen zugleich gebraucht, weil dann der Abstand beider Augen, im Vergleiche zur Entfernung der Stäbe, nicht in Betracht kommt.

2) Man darf nicht mitten auf den nächststehenden Stab sehen, sondern man muß an demselben, sowie überhaupt an allen Stäben, vorbei visiren. Dies wird deßhalb nöthig, weil jeder Stab eine ziemliche Dicke hat und folglich unter einem ziemlich großen Sehewinkel O (Taf. V., Fig. 3) erscheinen muß, wenn er, wie der Stab A, nicht weit vom Auge O absteht. Solange sich nun ein zweiter Stab B innerhalb der Schenkel dieses Sehewinkels befindet, wird er von dem Stabe A immer verdeckt, ohne daß er gerade mit demselben und einem dritten, ebenfalls innerhalb der Schenkel des Winkels O stehenden Stabe C eine gerade Linie bildet. Die daher entstehenden Irrungen werden um so größer sein, je näher das Auge O am Stabe A steht, und je weiter die Stäbe B und C entfernt sind.

Die eigentliche Visirlinie ist also die Linie A B' C', welche alle Stäbe berührt. Zur Controle wird auch an der entgegengesetzten Seite der Stäbe visirt, wie die Richtung O' C'' angiebt.

3) Alle Stäbe sollen genau senkrecht eingesteckt werden. Man erreicht dieses mit hinlänglicher Genauigkeit, wenn man den Stab zwischen die Fußspitzen steckt und ihn so aufrichtet, daß er bei gerader Haltung des Körpers an die Nase sich anlehnt. Sonst könnte man sich auch eines Bleilothes bedienen. — Auch der Gehülfe soll seinen Stab, während derselbe einvisirt wird, senkrecht halten, was am besten dadurch geschieht, daß er denselben mit ausgerecktem Arme zwischen den Fingern frei herabhängen läßt, daß er eben die Erde nur leise berührt.

4) Wir haben im zweiten Capitel gesehen, daß ein Gegenstand unserem Auge verschwindet, wenn sein Sehewinkel geringer als 1 Minute wird. Diese Unvollkommenheit des Gesichtes hat natürlich auch auf das Abstekken der Linien Einfluß. Weicht nämlich unter mehreren Stäben A B C (Taf. V., Fig. 4) einer, wie der bei D, nur soviel von der geraden Linie ab, daß der Sehewinkel O der Abweichung nicht mehr als 60″ beträgt, so

wird diese Abweichung nicht mehr merklich sein, d. h., wir werden glauben, der Stab **D** befinde sich ebenfalls in der Linie **O A B C.**

Zieht man zwischen den Schenkeln des Sehewinkels **O** die **a b** senkrecht auf **O C**, so ist **a b** die eigentliche Abweichung, und man hat $ab = Ob \times \tan O$. Da $O = 60''$ sein soll, so ist $\tan O = 0{,}0002909 = \frac{1}{3438}$, daher $b = \frac{Ob}{3438}$. Die größte nicht mehr sichtbare Abweichung eines Stabes von der geraden Linie beträgt also den 3438. Theil seiner Entfernung vom Auge, was bei 3438 Fuß erst einen Fuß Abweichung giebt und also nur wenig ausmacht. — Da man heut zu Tage sehr lange Linien mit Hülfe eines Fernrohres absteckt, wobei, wegen des schärferen Sehens, die Abweichungen weit geringer ausfallen, so könnte man diese Art Irrungen als gar nicht vorhanden betrachten, wenn nicht die Erfahrung lehrte, daß in dieser Beziehung, selbst bei nicht gar langen Linien, noch größere Fehler vorkommen, als sie aus obiger Rechnung hervorgehen, was meistens seinen Grund in nachtheiliger Beleuchtung hat. Man muß deßhalb in solchen Fällen etwas vorsichtig zu Werke gehen.

Bei günstiger Beleuchtung können die Visionsfehler noch weit kleiner ausfallen, als wir sie eben berechnet haben.

B. Das Messen der Linien mit der Meßkette.

§. 70.

1) Eine Linie zu messen, welche auf horizontalem Boden fortläuft. Nachdem die Kette sorgsam auseinander gelegt worden, so daß sich nirgends krumm gebogene Glieder, oder verschlungene Gelenkringe vorfinden, wird sie von zwei Kettenziehern an den durch die Erdringe gesteckten Stäben gefaßt und fortgeführt. Der vordere Kettenzieher, den ich kurzweg mit V bezeichnen will, bekommt Anfangs alle Zählpflöcke, die der hintere, welcher H heißen mag, nach und nach, bei jedem Kettenzuge einen, aufnimmt; der H hat das Geschäft des Visirens, V dagegen das des Anspannens der Kette.

Beide Kettenzieher bringen die Kette nahe in die zu messende Linie AB (Taf. V., Fig. 6). H reißt das bei A befindliche Meßfähnchen aus, setzt seinen Kettenstab an dessen Stelle und visirt den Stab des V in die Richtung der zu messenden Linie A B ein, wobei dieser, außer der Linie A B stehend, seinen Stab mit ausgerecktem Arme senkrecht hält. Sobald H durch ein Zeichen bemerklich gemacht hat, daß er richtig einvisirt habe, setzt V in der Richtung der zu messenden Linie AB, so genau, als eben das Augenmaß erlaubt, seinen Fuß an den Stachel des noch unverrückten Stabes, ergreift den Stab mit der einen Hand ungefähr in der Mitte, mit der andern unten am Beschlage, schwingt die Kette, damit sie gerade liege und straff angezogen werden könne, und sticht dann den Stab, ihn senkrecht niederlassend, an seinem währenddem unverrückt gebliebenen Fuße in die Erde ein. H sieht nun nochmals nach, ob beide Kettenstäbe sich genau in der zu messenden Linie befinden, widrigenfalls V den seinigen noch etwas versetzen muß.

Ist Alles in Ordnung, so ziehen beide Kettenzieher ihre Stäbe aus; H setzt das bei A befindliche Fähnchen wieder ein, V aber steckt einen Zählpflock in das Loch C, wo sein Stab gestanden. Beide gehen nun in der Linie AB vorwärts, bis H nach C kommt. Hier nimmt er den Zählpflock an sich, steckt seinen Stab in das Loch und visirt den V von Neuem ein, der sich übrigens nunmehr nach der Fahne bei A und dem Stabe des H auch von selbst einrichten kann. Das ganze Verfahren wiederholt sich, wie man sieht, von Neuem.

Das letzte Stück DB der Linie, welches kleiner als eine Kettenlänge ist, kann dadurch gemessen werden, daß H seinen Stab in D setzt, V aber über B hinausgeht und die straff angezogene Kette an B anlegt. Erlaubt dieses das Terrain nicht, so spannt V nur den Theil der Kette von D bis B, oder er setzt seinen Stab in B und H legt die gespannte Kette an den Zählpflock bei D, den er dann zu den schon aufgenommenen Zählpflöcken mit hinzuzählen muß.

Aus der Anzahl der Zählpflöcke, die H aufgenommen, und der Länge des letzten Stückes DB, ergiebt sich das Maß der ganzen Linie A B. Wenn H die sämmtlichen Zähler des V erhalten, giebt er sie diesem zurück.

Man muß sich hüten, daß bei diesem Wechsel keine Irrungen vorkommen.

Wie man zu verfahren habe, wenn mancherlei Hindernisse entgegenstehen, z. B., wenn auf sehr lockerem Boden, wo bei'm Anziehen der Kette die Stäbe nachfolgen, oder auf festem Gesteine, wo die Stäbe nicht eindringen, oder in hohem Grase gemessen wird, dies ergiebt sich an Ort und Stelle von selbst.

2) Auf geneigtem Boden. Geht die Messung bergauf, so muß der hintere Kettenzieher die Kette am Stabe so weit heraufschieben, bis sie die horizontale Lage hat; hingegen muß der vordere Kettenzieher die Kette heben, wenn bergab gemessen wird. Auf diese Weise findet man den horizontalen Abstand AB' (Taf. V., Fig. 5) der Puncte A und B (§. 22, Cap. 1). Man muß hierbei große Vorsicht anwenden, daß der Stab, an welchem die Kette gehoben wird, genau senkrecht stehe; auch muß man die Kette recht straff anziehen, damit sie sich möglichst wenig senke. Die horizontale Lage der Kette wird bloß nach dem Augenmaße hergestellt.

Muß die Kette sehr hoch gehoben werden, so senkt sie sich, weil sie nirgends eine Unterlage findet, trotz allem Spannen, doch ziemlich tief herab, und verkürzt dadurch den Abstand der Kettenstäbe um eine an sich zwar unbedeutende Größe, die aber doch bei wiederholtem Fortziehen der Kette zu einem nachtheiligen Grade anwachsen kann. Es ist daher gut, wenn man von der Kette ein Stück abnehmen und bloß mit diesem messen kann; denn die Senkung einer kürzeren Kette ist geringer, als die einer längeren. In Ermangelung einer solchen Vorrichtung faßt man die Kette bei einem ihrer Gelenkringe, etwa in der Mitte F, zieht sie straff an und bestimmt mittelst eines Lothes oder herabfallenden Steinchens den Punct G des Bodens, welcher senkrecht unter F liegt. Der Kettenzieher bei B zieht dann seinen Stab aus und hält mittelst desselben den Punct F auf G fest, während der Gehülfe bei C die Kette nochmals straff anzieht.

§. 71.

Wir bemerken über Kettenmessung noch Folgendes:

1) Wird die Kette an den Stäben gehoben, so senkt sie sich durch ihre Schwere herab und bildet eine krumme

Linie, welche in der Mechanik die Kettenlinie genannt wird. Ist EnC (Taf. V., Fig. 5) diese Linie, so begreift man, daß der gerade Abstand der Puncte E und C geringer ist, als eine Kettenlänge. Ohne eben die Natur der Kettenlinie zu untersuchen, läßt sich doch schon so viel einsehen, daß der Unterschied der geraden Linie EC von der Kettenlänge nicht bedeutend sein kann. Denn da die tiefste Senkung mn, welche bei horizontaler Lage von EC in der Mitte Statt findet, bei starker Spannung nicht sehr groß sein kann, so kann man den Bogen En als einen Kreisbogen ansehen, dessen Mittelpunct K ist, so zwar, daß der Winkel EKn, den wir mit φ bezeichnen wollen, nicht groß ist. Es sei die tiefste Senkung mn $= h$, die Länge der Kette Enc $= l$, also En $= \frac{1}{2} l$ und der Halbmesser KE $= r$. Man hat dann:

$$\text{I.}\quad EC = 2 \cdot Em = 2r \sin \varphi.$$

Bezeichnen wir aber den Unterschied der EC von der Kettenlänge EnC mit d, so ist

$$\text{II.}\quad d = l - EC = l - 2r \sin \varphi.$$

Nun ist der Bogen En $= \frac{1}{2} l = r\varphi$, wenn wir nämlich φ in Theilen des Halbmessers $= 1$ ausgedrückt denken; also $r = \frac{l}{2\varphi}$, und wenn wir diesen Werth von r in die Gleichung II. setzen:

$$d = l - \frac{l \sin \varphi}{\varphi} = \frac{l}{\varphi} (\varphi - \sin \varphi).$$

Da aber, weil φ nur klein ist, mit gehöriger Näherung $\sin \varphi = \varphi - \frac{1}{6} \varphi^3$ gesetzt werden kann, so ergiebt sich

$$\text{III.}\quad d = \tfrac{1}{6}\, l\, \varphi^2.$$

Ferner hat man mn $= r \cdot \sin\text{vers}\, \varphi = r(1 - \cos \varphi)$, oder wenn wir näherungsweise $\cos \varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$ setzen: $h = \frac{1}{2} r \varphi^2$, oder weil $r\varphi = \frac{1}{2} l$, $h = \frac{1}{4} l \varphi$, woraus $\varphi = \frac{4h}{l}$ und $\varphi^2 = \frac{16h^2}{l^2}$ folgt. Setzen wir aber dieses in III., so findet sich

$$d = \frac{8}{3} \cdot \frac{h^2}{l}.$$

Der Fehler eines Kettenzuges wächst also, wie das Quadrat der Senkung, wenn die Kettenlänge l dieselbe bleibt.

Wäre, z. B., $l = 40$ Fuß, $h = 1'$, so wäre $d = \frac{8}{3} \cdot \frac{1^2}{40} = \frac{1}{15}$ Fuß und also nur unbedeutend. Wäre aber, unter übrigens gleichen Umständen, $h = 2'$, so fände sich $d = \frac{4}{15}$ Fuß $= 3\frac{1}{5}$ Zoll.

2) Auf einem zwar abschüssigen, aber doch ebenen Boden könnte man auch die Kette, wie bei Messungen auf horizontalem Boden, ganz aufliegen lassen, wodurch man die Länge der geneigten Linie AB erhielte. Um hieraus den horizontalen Abstand AB' der Puncte A und B zu bekommen, müßte man entweder den Neigungswinkel BAB' der AB gegen den Horizont kennen, da dann

$$AB' = AB \times \cos BAB'$$

sein würde, oder man müßte den Höhenunterschied BB' der Puncte A und B suchen, da man dann AB' nach der Formel $\sqrt{(AB)^2 - (BB')^2}$ zu berechnen hätte, wie der pythagoräische Lehrsatz an die Hand giebt.

In der Anwendung läßt sich zwar von diesen beiden Formeln selten Gebrauch machen; doch läßt sich eine practische Folgerung von Wichtigkeit daraus ziehen. Setzen wir nämlich die Länge der geneigten Linie $AB = a$, ihre Horizontalprojection $AB' = a'$ und den Neigungswinkel $BAB' = n$, so ist

$$a' = a \cos n,$$

und hieraus $a - a' = a - a \cos n = a\,(1 - \cos n)$,

$$\text{oder } a - a' = 2a\,(\sin \tfrac{1}{2} n)^2,$$

$$\text{und daher } \sin \tfrac{1}{2} n = \sqrt{\frac{a - a'}{2a}}.$$

Diese Formel zeigt uns, wie der Neigungswinkel aus der geneigten Linie und ihrer Horizontalprojection berechnet werden kann. Setzen wir den Unterschied beider Linien $a - a'$ so klein, daß er auf der Charte nicht mehr darstellbar ist, so erhalten wir denjenigen Neigungswinkel, bei welchem es erlaubt ist, die geneigte Linie a für ihre Projection a' selbst zu nehmen, so daß man nicht nöthig hat, die Kette horizontal zu heben.

Wird, z. B., eine Charte nach einem solchen Maßstabe entworfen, daß $\frac{1}{2}$ Fuß eine unmeßbare Größe ist, so wird man die geneigte Linie a für ihre Projection a' setzen dürfen, wenn der Unterschied $a - a'$ nur $\frac{1}{2}$ Fuß beträgt. Ist nun $a = 1000$ Fuß, so ergiebt sich

$$\sin \tfrac{1}{2} n = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2 \cdot 1000}} = 0{,}015811$$
$$\tfrac{1}{2} n = 0^{0}54'22''$$
$$n = 1^{0}48'44''.$$

Wenn also die Messung sich nicht über 1000 Fuß ausdehnt, so kann man einen um etwa 2^{0} gegen den Horizont geneigten Boden als völlig horizontal ansehen. Ist die Ausdehnung der Messung geringer, so kommen schon größere Neigungswinkel nicht in Betracht.

3) Ueber die Genauigkeit der Kettenmessung läßt sich ungefähr ein Urtheil fällen, wenn man die Quellen aufsucht, wodurch Fehler entstehen können. Nach dem, was bereits gesagt worden, ist es nicht schwierig diese Quellen anzugeben; es können nämlich, vorausgesetzt, daß während der Messung kein Glied der Kette verbogen wird, Fehler entspringen:

1) daher, daß bei'm Anspannen der Kette der Stab des hinteren Gehülfen etwas nachgiebt;
2) daß die Kette nicht jedesmal gleichgut gespannt ist;
3) daß sie nicht immer genau in der zu messenden Linie liegt;
4) daß die Kettenstäbe nicht genau senkrecht stehen, besonders derjenige, an welchem bei Messung auf geneigtem Boden die Kette gehoben wird;
5) entstehen endlich Fehler aus der Senkung der Kette, wenn dieselbe an den Stäben gehoben werden muß.

Nimmt man nun an, daß man bei jedem Zuge mit einer 50 Fuß langen Kette einen Fehler von $\frac{1}{4}$ Zoll = $\frac{1}{40}$ Fuß begehen kann, und setzt man für den schlimmsten Fall voraus, daß alle diese Fehler während der Messung sich anhäufen, so erhält man 1 Fuß Fehler bei einer Länge von 2000 Fuß, d. h., wenn man eine Linie mit der Meßkette zu wiederholten Malen mißt, so wird man bei 2000 Fuß 1 Fuß zu viel oder zu wenig haben. Man findet freilich oft geringere Fehler, namentlich bei Messungen von Standlinien, für welche man ein in jeder Hinsicht günstigeres Terrain auswählt.

Bei minder günstigem Boden können jedoch auch weit größere Unterschiede erhalten werden. — Bugge schlägt

den Fehler der Kettenmessung zu 1 Fuß bei 1000 Fuß an, womit Andere übereinstimmen.

Dieses ist jedoch nur der Unterschied wiederholter Kettenmessungen. Der absolute Fehler einer Kettenmessung, d. h., der Unterschied des durch Messung mit der Kette erhaltenen Resultates von der wahren Länge einer Linie, wie man sie, z. B., durch sorgfältige Messung mit Maßstäben findet, kann weit größer sein. Bugge schätzt nach seinen Versuchen den absoluten Fehler der Kettenmessung auf 2 Fuß bei 1000 Fuß. — Man begreift, daß man bei der Beurtheilung des absoluten Fehlers zu den obgedachten Fehlerquellen auch noch die Unrichtigkeit der Kettenlänge hinzufügen muß.

C. Verbindung des Winkelspiegels mit der Kettenmessung.

§. 72.

Die theoretische Geometrie bestimmt die gegenseitige Lage von Puncten **a**, **b**, **c** (Taf. V., Fig. 7) dadurch, daß sie von denselben auf eine nach Belieben gezogene Linie **AB** Perpendikel **ap**, **bq**, **cr** fällt. Kennt man die Abstände der Fußpuncte **p**, **q**, **r** dieser Perpendikel von einem beliebigen Puncte **A** der Linie **AB**, oder, mit dem Ausdrucke der Wissenschaft, die Abscissen **Ap**, **Aq**, **Ar**, nebst den Perpendikeln oder Ordinaten **ap**, **bq**, **cr**, so ist nicht nur die gegenseitige Lage der Puncte **a**, **b** und **c**, sondern auch ihre Lage gegen die Abscissenlinie **AB**, rücksichtlich des Anfangspunctes **A** der Abscissen, vollkommen bestimmt.

Gerade so bestimmt auch die practische Geometrie die Lage mehrerer Puncte durch Coordinaten, indem eine willkührliche, dem Zwecke aber am besten entsprechende Linie als Abscissenlinie in die Nähe jener Puncte gelegt wird. Soll, z. B., die krumme Linie **AB** (Taf. V., Fig. 8) ihrer Figur nach bestimmt werden, so legt man ihr so nahe als möglich die Abscissenlinie **XY**. Man mißt dann mit der Kette von **X** nach **Y**, und während ein Gehülfe nach und nach in den Puncten **A**, **P**, **Q**, **R** u. s. w., welche zur Bestimmung der Linie **AB** erforderlich sind, den halben Ruthenstab als Signal aufrichtet, bestimmt man mittelst des Winkelspiegels auf der Meßkette den Punct **p**, wo das Perpendikel von **A** auf **XY** ein-

trifft, und hält denselben einstweilen durch die aufgesetzte Fußspitze fest. Während man nun das Maß von X bis p, d. h. die Abscisse, von der Kette ablies't und aufschreibt, mißt der Gehülfe mit seinem Ruthenstabe die Ordinate Ap, die ebenfalls angemerkt wird. Auf gleiche Weise wird bei allen übrigen Puncten P, Q, R verfahren.

Ist die Linie AB gebrochen, so werden alle diejenigen Puncte derselben durch Coordinaten bestimmt, wo Biegungen Statt finden; ist sie aber krumm, so nimmt man in ihr Puncte in solchen Abständen, daß die zwischenliegenden Stücke als gerade angesehen werden dürfen, oder daß man wenigstens in den Stand gesetzt wird, durch die gewählten Puncte aus freier Hand einen Zug zu beschreiben, der von der wahren Gestalt der Linie nicht merklich abweicht.

Zeichnet man nun die gemessenen Abscissen und Ordinaten nach dem verjüngten Maßstabe auf ein Papier und verbindet die Endpuncte der Ordinaten so, wie es in der Natur der Fall ist, so erhält man das richtige Bild oder den Riß der Linie AB.

Die neben der Abscissenlinie XY liegenden Puncte brauchen nicht gerade Puncte derselben gebrochenen oder krummen Linie zu sein, sondern alle Puncte, die zu beiden Seiten von XY liegen und nicht gar zu weit von ihr abstehen, können an dieselbe angemessen werden.

Wie weit die zu bestimmenden Puncte von der Abscissenlinie abstehen dürfen, hat zwar keine Grenze, doch wird es gut sein, wenn die Ordinaten nicht zu lang ausfallen, damit die Fehler, welche man begeht, bei der Bestimmung des rechten Winkels durch den Winkelspiegel nicht zu merklich werden. Bei zusammenhängenden Flurmessungen brauchen die Ordinaten selten über 50 oder 60 Fuß hinauszugehen; meistens aber fallen sie weit kleiner aus.

Man begreift von selbst, daß hierbei die Führung eines genauen Manuales nöthig wird. Am vorzüglichsten scheint es, wenn man auf eine gerade Linie die Abscissen und Ordinaten nach dem Augenmaße aufträgt, an die Ordinate ihre gemessene Länge und an ihren Fußpunct das Maß der ihr zugehörigen Abscisse schreibt. Die Endpuncte der Ordinaten kann man durch Linien so verbinden, wie es der Natur entspricht, wodurch man eine Art von Ocularriß erhält. Es versteht sich, daß man

im Manual die Ordinaten auf verschiedene Seiten der Abscissenlinie zeichnen muß, je nachdem sie in der Natur auf die eine oder andere Seite fallen. — Besonders notirt man auch gern die Puncte, wo, wie bei O der Fall ist, die krumme Linie die Abscissenlinie schneidet, also die Ordinate = o ist.

Anmerkung 1. Vermittelst des in §. 66, Anmerkung, beschriebenen Instrumentes, kann man auch das Messen der Ordinaten ersparen, indem man, um z. B. Qr (Taf. V., Fig. 8) zu erhalten, den Punct u auf der Kette sucht, wo die Linie uQ mit der Abscissenlinie XY einen Winkel Qur = 45° macht, da dann in dem rechtwinklichen Dreiecke Qru, ur = rQ ist. Man müßte also die Entfernungen der Puncte r und u vom Anfangspuncte der Abscissen notiren, wo sich dann bei'm Auftragen auf das Papier die Länge ru = rQ von selbst ergiebt.

In den Fällen, wo die Messung mit dem Ruthenstabe sehr beschwerlich oder unmöglich wird, möchte dieses Verfahren Vortheil gewähren; im Allgemeinen aber wird es besser sein, wenn man die Ordinate rQ unmittelbar mißt.

Anmerkung 2. Das Auftragen der gemessenen Abscissen und Ordinaten geschieht am besten auf folgende Weise. Zuerst trägt man auf die Abscissenlinie die Maße der sämmtlichen Abscissen Xp, Xq u. s. w. (Taf. V., Fig. 8), und bemerkt den Endpunct einer jeden mit einem subtilen Zirkelstiche. Damit man aber nachher, ohne weiteres Nachsuchen und Nachgreifen auf dem Maßstabe, wisse, welchem Puncte eine jede Abscisse zugehört, zeichnet man mit Bleistift, bloß nach dem Augenmaße, auf der richtigen Seite der Abscissenlinie eine Ordinate dabei und fügt das Zeichen des zugehörigen Punctes dazu.

Um nun die nöthigen Perpendikel zu ziehen, bedient man sich eines kleinen hölzernen Lineals AB (Taf. VI., Fig. 7) und rechtwinklichen Dreiecks CDR. Letzteres setzt man mit der einen Kathete RD an die Abscissenlinie XY, schiebt das Lineal bis an die Hypotenuse CD heran, hält es durch einen Druck mit den Fingern fest und schiebt dann das Dreieck so weit am Lineale fort, bis seine andere Kathete gerade durch den Punct M geht, durch welchen ein Perpendikel auf die Abscissenlinie ge-

zogen werden soll. Die Linie C′R′ ist nun senkrecht auf XY.

Hat man auf diese Weise alle Perpendikel gezogen, so trägt man die Maße der Ordinaten darauf.

Oft werden die Abscissen so lang, daß der Zirkel sehr weit eröffnet werden muß und seine Spitzen sehr schief gegen das Papier zu stehen kommen, wo dann weder ein genaues Abnehmen der Linien vom Maßstabe, noch ein genaues Auftragen derselben auf das Papier möglich ist. In diesem Falle trägt man einen Punct auf die Abscissenlinie, der vom Anfangspuncte um ein rundes Maß, z. B. um 50 Ruthen, entfernt ist, und trägt sodann die Abscissen von diesem Puncte an auf, wobei man begreiflich von einer jeden jene 50 Ruthen abzuziehen hat.

Anmerkung 3. Bei dieser Gelegenheit wollen wir noch zeigen, wie man die Genauigkeit des rechten Winkels eines Dreiecks prüfen kann. Man legt dasselbe mit der einen Kathete CR (Taf. VI., Fig. 6) an ein gutes Lineal AB, das man auf dem Papiere festhält, zieht an der anderen Kathete eine feine Linie RD und bemerkt einen Punct derselben durch einen Nadelstich. Hierauf dreht man das Dreieck um, daß immer die Kathete CR am Lineale liegen bleibt, schiebt die Kathete RD bis an den bezeichneten Punct heran und zieht abermals eine Linie RD. Trifft diese genau in die vorige, so ist der Winkel richtig; wo nicht, so ist er falsch und muß um den halben Abweichungswinkel beider Linien verbessert werden. Diese Prüfung beruht demnach auf dem Satze, daß ein rechter Winkel seinem Nebenwinkel gleich ist.

D. Messung ganzer Figuren.

§. 73.

1) Unter Messung ganzer Figuren verstehen wir die Bestimmung einzelner Grundstücke oder einer Lage von mehreren Grundstücken, sowohl hinsichtlich des Umfanges, als auch der darin enthaltenen Grenzlinien, so daß man aus den Ergebnissen der Messung im Stande ist, eine dem Flurtheile vollkommen ähnliche Figur auf dem Papiere zu entwerfen. Wir setzen dabei voraus, daß das Grundstück, oder die Grundstückslage keine zu große Aus-

dehnung habe, so daß der Messung mit der Kette nach allen Seiten hin keine zu großen Hindernisse, namentlich wegen des Terrains, im Wege stehen.

2) Selten sind die Figuren auf dem Felde so einfach, daß sie durch Messung ihrer Bestandtheile (Seiten, Winkel und Diagonalen) bestimmt werden könnten; man ist vielmehr genöthigt, dieselben durch einfachere künstlich bestimmte Figuren, welche wir Hülfsfiguren nennen wollen, eng einzuschließen und ihre Messung von der gemessenen Hülfsfigur abhängig zu machen. Diese Hülfsfiguren sind nach der Localität sehr verschieden: mitunter reicht eine einzige gerade Linie hin, mitunter ist ein Dreieck, ein Viereck, oder eine mehrseitige Figur erforderlich.

3) Sollte, z. B., das unregelmäßige lange Grundstück (Taf. **VI.**, Fig. 2) seiner Figur nach bestimmt und aufgezeichnet werden, so reicht, unter der Voraussetzung, daß man von einem Ende **A** bis zum andern **B** sehen und messen kann, eine einzige gerade Linie **AB** hin, welche für die, zu ihren beiden Seiten liegenden Puncte eine Abscissenlinie wird. Selbst wenn man nicht von **A** nach **B** sehen kann, was wohl oft der Fall sein wird, bleibt doch noch die Möglichkeit, in der Mitte eine Linie **CD** abzustecken und dieselbe nach beiden Seiten hin zu verlängern, so daß man, von **A** nach **B** messend, immer einen Stab sieht, nach welchem man die Meßkette einrichten kann. Durch Messung der Abscissen und Ordinaten für die Puncte, welche zur Bestimmung des Umfanges der Figur nöthig sind, wird man in den Stand gesetzt, die ganze Figur nach einem beliebigen Maßstabe auf dem Papiere zu verzeichnen.

Sollten auch hierbei manche Ordinaten etwas lang ausfallen, z. B. gegen 100 Fuß und darüber, so hat dieses doch auf die Richtigkeit der Messung keinen nachtheiligen Einfluß, wenn man nur bei der Bestimmung des rechten Winkels und bei der Messung der Ordinate die gehörige Vorsicht braucht, denn der Winkelspiegel giebt den rechten Winkel mit einer hierzu noch hinreichenden Genauigkeit.

4) Reicht eine gerade Linie zur Aufnahme einer Feldlage nicht hin, so muß man um dieselbe eine Hülfsfigur **ABCD** (Taf. V., Fig. 13) abstecken, die so wenig, als möglich, Seiten hat, wobei es übrigens von den jedesmaligen Umständen abhängt, ob die Seiten der Hülfs-

figur theils mit den Umfangsgrenzen der Feldlage zusammenfallen, theils außer-, theils innerhalb derselben liegen. Indem man nun die Seiten der Hülfsfigur mißt, benutzt man sie zugleich als Abscissenlinien für die daran gelegenen Eckpuncte der aufzunehmenden Feldlage, deren Coordinaten eben so bestimmt werden, wie wir in §. 72 gezeigt haben.

Ist nun die Hülfsfigur **ABCD** zu Papier gebracht, so kann man auch mittelst der gemessenen Coordinaten die eingeschlossene Feldlage aufzeichnen. — Wie man aber eine, der Hülfsfigur ähnliche Figur zeichnen könne, werden wir im nächsten Paragraphen angeben.

5) Wenn es nicht bloß darauf ankommt, den Umfang einer Feldlage, sondern auch darin liegende Parcellen, Culturarten u. s. w. aufzunehmen, so muß man die Linien **HG**, **FE**, **MJ'**, **LK** (Taf. V., Fig. 14) legen, welche durch das Feld hindurch nahe an den aufzunehmenden Puncten hinlaufen. Diese Linien werden ihrer Lage nach dadurch bestimmt, daß man ihre Endpuncte in die Umfangslinien der Hülfsfigur einmißt. Indem man, z. B., die Linie **AD** mißt, bestimmt man zugleich auf derselben die Entfernung des Punctes **F** vom Anfangspuncte **A**, durch welchen die Linie **FE** gehen soll, und bemerkt diesen Punct durch einen eingeschlagenen Pfahl. Auf gleiche Weise wird auch der andere Endpunct **E** auf der Linie **BC** bestimmt. Die Feldmesser sagen hier, die Linie **FE** sei in die Linien **AD** und **BC** eingebunden. So sind in der Figur **MJ** und **LK** in **FE** und **AB**, **HG** in **AD** und **CD** eingebunden.

Das Einbinden solcher Durchschlagslinien ist von großer Wichtigkeit und dient wesentlich zur Erleichterung und Abkürzung, sowie auch zur Richtigkeit der Messungen. In die eingebundenen Linien kann man wieder neue Linien einbinden und somit das ganze zu messende Feld gleichsam wie mit einem Netze überziehen.

Ist nun die Hülfsfigur zu Papier gebracht, so hat man auch die Lage der eingebundenen Linien und kann somit alle Puncte auftragen, die an die Seiten der Hülfsfigur und die übrigen Linien durch Coordinaten angemessen sind.

E. Ueber die Aufnahme der Hülfsfiguren mit Hülfe der Meßkette und des Winkelspiegels.

§. 74.

1) Die Hülfsfigur ist aufgenommen, wenn ihre Winkelpuncte nach ihrer richtigen Lage gegeneinander auf dem Papiere verzeichnet sind. Diese Aufnahme geschieht bei zusammenhängenden Flurmessungen oder bei Hülfsfiguren von größerer Ausdehnung mit Hülfe des Meßtisches oder anderer winkelmessenden Werkzeuge; bei isolirten Messungen von geringerer Ausdehnung aber kann man, wenn das Terrain nicht gar zu ungünstig ist und wenn sonst keine unübersteiglichen Hindernisse entgegenstehen, auch mit der bloßen Meßkette auskommen, mit welcher man auch oft den Winkelspiegel mit Nutzen verbinden kann. Dieses zu zeigen, ist die Absicht des gegenwärtigen Paragraphen.

2) Jede Aufnahme gründet sich auf eine wirklich gemessene Linie AB (Taf. V., Fig. 11), die Standlinie, welche nach einem beliebigen (verjüngten) Maßstabe in beliebiger Lage ab auf die Zeichnung aufgetragen wird. Die Lage eines dritten Punctes C bestimmt man dann durch das Dreieck ABC, welches er mit den Puncten A und B bildet. Man mißt nämlich die Seiten AC und BC und trägt sie nach dem gewählten Maßstabe auf das Papier, indem man mit ihnen aus a und b Kreisbögen beschreibt, deren Durchschnitt den Punct c giebt, und wodurch das Dreieck abc dem ABC ähnlich wird.

Auf gleiche Weise bestimmt man auch den Punct D und erhält somit die dem Viereck ADBC ähnliche Figur adbc.

Jede Seite dieses Vierecks kann nun wieder Stand- oder Grundlinie für einen fünften Punct werden, z. B., AC für den Punct E, so daß man die fünfseitige Figur adbce auf dem Risse erhält, die der auf dem Felde ADBCE ähnlich ist.

Hieraus ergiebt sich, daß, wenn man die Seiten einer Hülfsfigur gemessen hat, man auch noch die sämmtlichen, von demselben Winkelpuncte A aus gezogenen Diagonalen AC, AB messen muß, um die ganze Figur durch Aneinandersetzung von Dreiecken, die mit Hülfe

ihrer drei Seiten construirt werden, zu Stande zu bringen.

Zu einem Viereck A D B C braucht man also nebst den Seiten nur die eine Diagonale A B; zur Controle kann man aber auch noch die andere CD messen und zusehen, ob sie nach dem verjüngten Maßstabe in den schon gefertigten Riß a d b c paßt. Ueberhaupt wird man zur Controle auch solche Diagonalen messen, welche man zur Fertigung des Risses nicht gerade nöthig hat.

3) Hieraus geht die Nothwendigkeit hervor, gleich bei'm Abstecken der Hauptfigur darauf Rücksicht zu nehmen, daß auch der Messung der erforderlichen Diagonalen kein locales Hinderniß im Wege steht, wenigstens kein solches, das nicht wegzuräumen wäre. Es brauchen nicht gerade alle Diagonalen von demselben Winkelpuncte auszulaufen. So könnte man, z. B., den Riß des Fünfecks A D B C E (Taf. V., Fig. 11) dadurch entwerfen, daß man außer den Seiten noch die Diagonalen EB und C D mäße; denn dann könnte man auf der Standlinie CB die Dreiecke C B E und C B D construiren, wodurch sich die Puncte E und D ergeben, so daß man auch die Linie E D kennt, obschon sie nicht unmitttlbar gemessen ist. Macht man dann aus den Puncten E und D mit den verjüngten Maßen von E A und D A zwei Kreisbögen, so giebt ihr Durchschnitt auch den Punct A.

Ueberhaupt kann man die Lage eines Punctes A leicht bestimmen, wenn zwei Puncte E und D im Risse schon gegeben sind; man hat zu dem Ende nur nöthig, die Abstände A E und A D zu messen, wodurch in dem Dreieck EDA alle drei Seiten bekannt sind.

4) Läßt sich eine Diagonale, z. B. AC, wegen unüberwindlicher Hindernisse nicht messen, so kann man auf folgende Weise verfahren: Man macht EC′ einem gewissen Theile von E C und E A′ einem eben so vielsten Theile von E A gleich, da dann C′ A′ einem solchen Theile von CA gleich ist. Wäre, z. B., $EC' = \frac{1}{2}$ EC, $EA' = \frac{1}{2}$ EA, so wäre auch $C'A' = \frac{1}{2}$ CA. Man kann also aus der gemessenen Länge C′ A′ auch auf die Länge von C A schließen.

Wäre es gar nicht möglich, innerhalb der Hülfsfigur eine Linie zu messen, so kann man die Seiten E C und EA rückwärts verlängern, und $EC'' = \frac{1}{n}$ E C, E A″

$= \frac{1}{n}$ EA nehmen, da dann auch $C''A'' = \frac{1}{n}$ CA, also $CA = n \times C''A''$ ist.

Wenn man sich dieses Verfahrens bedient, so muß man dafür sorgen, daß C'A' oder C''A'' nicht ein zu kleiner Theil von CA wird, weil sonst eine kleine Unrichtigkeit der Messung der ersteren Linien einen viel größeren Fehler in der Bestimmung von CA zur Folge hat. Es sollte C'A' nie kleiner als $\frac{1}{3}$ CA werden.

Man könnte auch EC' und EA' willkührlich nehmen, die Seiten des Dreiecks EV'C' messen und es nach einem verjüngten Maßstabe auf das Papier tragen, wodurch sich der Winkel E ergiebt, welcher bei der Entwerfung einer Hülfsfigur ebenfalls als Bestimmungsstück gebraucht werden kann.

5) Mitunter kann man einige Seiten der Hülfsfigur so legen, daß sie rechte Winkel bilden, was bei Messungen der Art, die sich nie auf sehr große Ausdehnung erstrecken können, durch den Gebrauch des Winkelspiegels mit hinlänglicher Genauigkeit geschehen kann; man hat dann nicht nöthig, so viele Diagonalen zu messen, und es ist daher diese Methode besonders dann brauchbar, wenn wegen der Localität Diagonalen sich nicht gut messen lassen. So könnte man, z. B., zur Aufnahme des Stück Waldes (Taf. VI., Fig. 1) das Fünfeck ABCDE abstecken, so jedoch, daß bei A und B rechte Winkel sind. Sind dann die Seiten gemessen, so kann man, vermöge des rechten Winkels bei A und B, leicht die vier Puncte A, B, C, E zu Papiere bringen und dann auch durch den Durchschnitt zweier aus E und C beschriebenen Kreisbögen den fünften Punct D bestimmen.

Wäre indeß nur der Winkel bei B einem rechten gleich genommen worden, so würde noch die Messung der Diagonale EC erfordert. Indem man nämlich auf die Schenkel eines rechten Winkels die Seiten BA und BC verjüngt aufträgt, hat man die Puncte A, B und C. Indem man ferner aus A und C mit den verjüngten Maßen von AE und CE Kreisbögen beschreibt, so giebt deren Durchschnitt den Punct E, und dann bestimmt sich auch auf gleiche Weise mittelst der Seiten ED und CD der Punct D.

6) Die bereits angeführten Beispiele können zeigen, wie in anderen ähnlichen Fällen zu verfahren ist. Die

Hauptsache ist immer die, daß jeder Punct als Winkelpunct eines Dreiecks gedacht wird, dessen beiden anderen Winkelpuncte ihrer Lage nach auf dem Risse schon bestimmt sind, und dieses Dreieck wird, wenn kein Hülfsmittel weiter zu Gebote steht, als die Meßkette, eigentlich immer durch seine drei Seiten construirt.

Irgend eine Linie, gewöhnlich die längste, bildet als Standlinie den Anfang der Messung; sie wird nach dem verjüngten Maßstabe in einer solchen Lage, wie es am bequemsten scheint, auf das Papier aufgetragen und giebt dadurch die ersten zwei Hauptpuncte der ganzen Messung. An sie hängt sich ein dritter Punct durch das Dreieck, das er mit ihr bildet, und auf gleiche Weise kann auch ein vierter oder fünfter Punct daran geknüpft werden, und die übrigen Seiten der so erhaltenen Dreiecke, überhaupt jede zwischen zwei schon bestimmten Puncten liegende Linie, kann wieder die Standlinie für einen noch zu bestimmenden Punct abgeben. Wie aber in jedem besonderen Falle die Construction nach Maßgabe des Terrains und der übrigen Oertlichkeiten zu machen sei, dies ist lediglich der Einsicht des Feldmessers überlassen.

Wie hierbei auch der Winkelspiegel zur Bestimmung jener Hauptpuncte der Messung benutzt werden kann, ist zur Genüge gezeigt worden.

Eine vorzügliche Regel bei Messungen der Art ist die, daß der Hauptpuncte so wenig, als möglich, sind, oder daß die abgesteckte Hülfsfigur so wenig Seiten habe, als möglich. Dies erleichtert für's Erste das Messungsgeschäft, dann aber auch fördert es die Richtigkeit der Messung bedeutend, indem das Aneinanderhängen vieler Dreiecke, woraus die Hauptfigur besteht, und hierdurch auch die Anhäufung der etwaigen Messungsfehler vermieden wird. — Da sich solche Messungen, die bloß mit Hülfe der Meßkette und des Winkelspiegels angestellt werden, selten auf große Strecken ausdehnen, so reicht man auch mit vier-, fünf- oder höchstens sechsseitigen Hülfsfiguren meistentheils aus.

7) Noch muß aber bemerkt werden, daß, wenn eine Linie **AB** (Taf. **VI**., Fig. 4) als Standlinie zur Bestimmung eines Punctes **C** dienen soll, die Einrichtung so getroffen werden muß, daß der Winkel bei **C** in dem Dreieck **ABC** nicht zu spitz wird, weil sonst der Durchschnitt der beiden Kreisbögen, die man aus **A** und **B** mit

den Seiten AC und **BC** beschreibt, sich nicht bestimmt genug erkennen läßt, indem die gedachten Bögen ihrer Breite wegen sich eine Strecke lang mit einander mischen. Ein gleicher Uebelstand tritt ein, wenn der Durchschnittswinkel, wie bei **C′**, ein sehr stumpfer ist.

§. 75.

In den Lehrbüchern der practischen Geometrie findet man meistentheils die Aufgabe, eine Entfernung zu messen, wenn man nicht von einem Endpuncte zum andern kommen kann, wobei dann drei Fälle unterschieden werden, nämlich 1) wenn beide Endpuncte zugänglich sind; 2) wenn nur einer und 3) wenn keiner der Endpuncte zugänglich ist. Die Auflösung kann zwar bloß mit Hülfe der Meßkette bewirkt werden, sie setzt aber ein hinlänglich großes ebenes Feld voraus, so daß man selten einen ersten Gebrauch davon wird machen können.

Um hiervon wenigstens einen Begriff zu geben, wollen wir den Fall betrachten, wo eine ungangbare Weite **AB** (Taf. V., Fig. 12) zu messen ist, zu deren Endpuncte A man von einem willführlich gewählten Puncte **D** kommen kann. — Man verlängert die Linie **AB** um ein gutes Stück bis **C** und wählt den Punct **D** so, wie er am geeignetsten scheint. Man mißt die Linien **DA** und **DC** mit der Kette, verlängert beide rückwärts durch **D** und macht **DE** = **DC**, **DF** = **DA**. So erhält man die Puncte **F** und **E**, und wenn man dann die Linie **FE** durch **F** so weit verlängert, bis **G** mit **D** und **B** in gerader Linie gesehen wird, so ist **GF** = **AB** und kann für **AB** gemessen werden. Die Richtigkeit des Verfahrens folgt zwar aus den einfachsten Sätzen der Elementargeometrie, indessen sieht man, daß die Aufgabe wegen des günstigen Terrains, das hier gefordert wird, nur selten mit Nutzen angewendet werden kann.

Erlauben es die Umstände nicht, **DA** und **DC** rückwärts zu verlängern, so kann man $DE' = \frac{1}{n} DC$, $DF' = \frac{1}{n} DA$ machen und die Linie **E′F′** durch **F′** so weit verlängern, bis **G′** mit **D** und **B** in gerader Linie gesehen wird, da dann **F′G′** auch $= \frac{1}{n}$ **AB** ist.

Mit Anwendung eines Winkelspiegels könnte man so verfahren: Man errichtet in A (Taf. VI., Fig. 5) auf AB das Perpendikel AD von hinreichender Länge, verlängert AB durch A um ein ansehnliches Stück bis C, errichtet in C auf CB ebenfalls ein Perpendikel und verlängert dasselbe so weit, bis E mit D und B in gerader Linie gesehen wird. Mißt man hierauf CA, CE und AD, so hat man AB durch die Formel $AB = \frac{CA \times AD}{CE - AD}$ zu berechnen.

Denn denkt man sich DF mit AC parallel gezogen, so ist das Dreieck DFE dem ABD ähnlich, folglich $EF : FD = AD : AB$, d. i. $CE - AD : AC = AD : AB$, woraus die obgedachte Formel folgt.

Noch leichter wird die Auflösung, wenn man ein Instrument hat, um Winkel von 45° abzustecken. Man errichtet auf AB (Taf. VI., Fig. 3) in A ein Perpendikel und verlängert dasselbe so weit, bis der Winkel $ACB = 45^0$ wird, da dann $AC = AB$ sein muß.

F. Ueber die Führung des Brouillons bei der Aufnahme einer Grundstückslage.

§. 76.

Wenn eine Lage vieler Grundstücke, d. h., ein gewisser Feldtheil mit den darin enthaltenen Parcellen gemessen werden soll, so ist ein deutliches Brouillon das erste, was der Feldmesser zu besorgen hat. Wie ein solches zu entwerfen sei, ergiebt sich zwar im Allgemeinen schon von selbst; indessen dürfte eine besondere Anleitung doch nicht überflüssig sein, und in dieser Absicht wollen wir den Geschäftsgang in seiner ganzen Ausdehnung betrachten, wie derselbe etwa bei Vermessungen ganzer Flurmarken Behufs der Regulirung des Catasters und der Sicherstellung des Besitzes stattfindet.

Der Feldmesser umgeht den Feldtheil mit Zuziehung aller Interessenten und bestimmt die Grenzen durch eingeschlagene Pfähle, wobei als Grundsatz festgehalten werden muß, daß jeder von Pfahl zu Pfahl gezogene Theil der Grenzlinie gerade sei, so jedoch, daß die Anzahl der Pfähle oder Grenzpuncte nicht über das Bedürfniß gehäuft werde. Diese Pfähle werden nachmals durch Grenzsteine ersetzt, aber es werden auch da Pfähle eingeschlagen, wo Grenz-

steine schon vorhanden sind. Auf gleiche Weise werden auch die Grenzen der inliegenden Parcellen, sofern dieses nicht aus irgend einem Grunde unnöthig wird, durch Pfähle bestimmt. Alle diese Pfähle werden vom ersten an mit fortlaufenden Nummern bezeichnet. — Die Grenzen zweier verschiedenen Culturarten werden, wenn sie nicht zugleich Besitzthumsgrenzen sind, nicht verpfählt. — Dieses Geschäft, welches bei Vermessungen ganzer Flurmarken von großer Wichtigkeit ist, nennt man Verlagen.

Bei krummlinigen Grenzen von sehr starker Krümmung würden sehr viele Grenzsteine erfordert werden, wenn es von Punct zu Punct gerade gehen sollte. In diesem Falle setzt man zwar die Grenzsteine weiter auseinander, bemerkt aber auf dem Plane dennoch die richtige Krümmung der Grenze. Ein Gleiches geschieht auch in allen ähnlichen Fällen, z. B, wenn ein nach einer sehr unregelmäßigen Linie laufender Bach die Grenze bildet. — Wenn, wie es an Fahrwegen der Fall ist, die Grenzsteine der Beschädigung unterworfen sein sollten, so kann man dieselben ein Paar Fuß in das Grundstück hineinrücken, was auf der Flurcharte ebenfalls bemerkt werden muß.

Von der ganzen Feldlage wird nun sogleich bei'm Verlagen ein Riß nach dem Augenmaße entworfen, so genau, als es nur thunlich ist. Es werden darauf alle Grundstücke mit ihren verschiedenen Culturarten und alle eingeschlagenen Pfähle bemerkt; letzteres geschieht durch einen kleinen Ringel (Taf. V., Fig. 14), dem auch die Nummer beigeschrieben wird. Zugleich wird die ortsübliche Benennung der ganzen Grundstückslage bemerkt und auf jedes einzelne Grundstück der Name seines Besitzers, sowie seine Culturart, geschrieben.

Das Papier, worauf man den Ocularriß entwirft, wird mit Siegellack auf ein Bretchen befestigt, das auf der Rückseite mit einer Handhabe versehen ist. Zum Aufzeichnen bedient man sich eines Bleistiftes; wenn aber das Brouillon auf längere Zeit aufbewahrt werden muß, so thut man wohl, wenn man es zu Hause mit Dinte auszeichnet.

Nunmehr ist man im Stande, die Hülfsfigur zur Aufnahme der Grundstückslage abzustecken und zugleich auch die Stellen zu bestimmen, wo ohngefähr in den Seiten der Hülfsfigur Durchschlagslinien einzubinden sind, welche zur Aufnahme der im Innern des Feldtheiles lie-

genden Parcellen und Culturarten gemessen werden müssen. Man begreift, daß der Ocularriß hierbei wesentliche Dienste leistet, wenn er der Natur einigermaßen nahe kommt.

Diejenigen Pfähle, mittelst welcher man die Hülfsfigur absteckt, werden mit Buchstaben bezeichnet, wenn sie nicht schon vorhandene Grenzpfähle sind; dasselbe gilt auch von den zur Fixirung der eingebundenen Linien geschlagenen Pfählen, und auf diese Weise werden die Feldgeschworenen, welche an die Stelle der Grenzpfähle Steine zu setzen beauftragt sind, vor Verwechselungen gesichert sein.

Die Hülfsfigur wird mit den in ihr eingebundenen Linien ebenfalls auf dem Ocularrisse verzeichnet, und hierbei ist es gut, wenn man die Winkelpuncte derselben, welche eigentlich die Hauptanhaltepuncte der Messung sind, von den Endpuncten der eingebundenen Linien durch besondere Zeichen unterscheidet, etwa wie in Fig. 14 (Taf. V.) angedeutet ist. Dieses ist zwar auf dem Ocularrisse selbst ohne großen Vortheil, wird aber bei der Aufzeichnung der Data der Kettenmessung unumgänglich nöthig.

Die Data der Messung können nun auf dem erwähnten Ocularrisse selbst aufgezeichnet werden; indem man also die Linie **AD** mißt, bemerkt man auf dem Ocularrisse, z. B., die Maße der Abscissen **Ap** und **Aq** (Taf. V., Fig. 14), sowie der zugehörigen Ordination **mp** und **nq**; desgleichen wird man die Maße aufzeichnen, wodurch die Stellen der eingebundenen Puncte **F** und **H** bestimmt werden, und endlich darf man auch nicht das Maaß der ganzen Linie **AD** aufzuschreiben vergessen.

Hierdurch muß aber wegen der vielen Linien und Zahlen der Ocularriß nothwendig undeutlich werden, abgesehen von den Schwierigkeiten, welche der richtigen Durchführung eines solchen Brouillons entgegenstehen. Besser wird man thun, wenn man die Data der Messung in ein eigenes dazu vorgerichtetes Manual schreibt, und zwar in der Weise, wie wir es in §. 72 schon angegeben haben. Die sämmtlichen Blätter dieses Manuals werden mit horizontalen Linien bezogen, die etwa 2 Zoll von einander abstehen. Will man nun, z. B., die Data der Messung der Linie **AD** aufzeichnen, so setzt man auf den Anfang einer Linie im Manuale den Punct **A** und giebt ihm das Zeichen, welches man für ihn als Winkelpunct

einer Hauptfigur festgesetzt hat. Auf diese Linie setzt man in einiger Entfernung vom Anfange einen senkrechten Strich für die Ordinate pm und bemerkt dabei das Maß dieser Ordinate, sowie das der ihr zugehörigen Abscisse Ap, ganz so, wie wir es in §. 72 angegeben haben. Da aber die Ordinate pm zur Bestimmung eines Grenzsteines dient, so zeichnet man an ihren Kopf einen Ringel als Zeichen eines solchen Grenzsteines und schreibt zugleich die Nummer des hier eingeschlagenen Pfahles bei. Auf gleiche Weise werden die Coordinaten aller übrigen Puncte aufgezeichnet. Die eingebundenen Puncte F und H setzt man auf die Linie selbst und bemerkt ihre Abstände vom Anfangspuncte A, und zuletzt verzeichnet man den Endpunct D und das Maß der ganzen Linie AD. — Ist eine Linie des Manuales schon beschrieben, ehe die Messung zu Ende ist, so trägt man auf die folgende Linie ohne Weiteres die Fortsetzung. Wenn man nun nach den Datis der Messung die Grenzsteine auf den Plan aufgezeichnet hat, so weiß man mittelst des Ocularrisses ohne Weiteres, wie die Grenzlinien zu ziehen sind.

Einige Schwierigkeit könnte jedoch aufstoßen, wenn solche Grenzlinien auf dem Plane verzeichnet werden sollen, welche nicht verpfählt worden sind; denn man weiß zwar aus den Datis der Messung die Grenzpuncte richtig aufzutragen, könnte aber in Verlegenheit gerathen, wenn man die Grenzlinie durch Verbindung dieser Puncte selbst ziehen will. Diesem wird vorgebeugt einmal durch möglichst genaue Entwerfung des obgedachten Ocularrisses; dann aber kann man auch im Manuale in dem Falle, wo Verwirrung zu befürchten steht, die Endpuncte derjenigen Ordinaten, wodurch Puncte derselben Grenze bestimmt werden, durch Linien verbinden, wie schon in §. 72 erwähnt worden ist. Auch kann man in solchen Fällen bei jeder Ordinate die Grenze, welche durch sie bestimmt wird, näher bezeichnen, ob, z. B., durch sie die Grenze eines Wiesenfleckes, oder eines Weges u. dergl. bestimmt wird. Ueberhaupt wird ein denkender Feldmesser in jedem Falle leicht die Mittel finden, wodurch er Irrungen vermeidet, besonders, wenn er sich zum Gesetze macht, das Auftragen der bei der Messung gefundenen Data auf die Charte nicht zu lange zu verschieben, wo ihm dann die Beschaffenheit des Feldes noch in lebhaftem Andenken sein wird.

Dieses ist ohngefähr der Geschäftsgang, welcher bei Messung ganzer Fluren, sofern es die Führung eines Brouillons bei'm Gebrauch der Meßkette angeht, zu beobachten ist. Wie viel davon bei kleineren sogenannten Privatmessungen, die, wie wir in diesem Capitel voraussetzen, nur mit Hülfe der Meßkette und des Winkelspiegels angestellt werden, in jedem Falle beizubehalten sei, hängt oft von der Absicht ab, in welcher die Messung gefordert wird, und von ihrer Wichtigkeit, oft auch von der in der Flurmark üblichen Einrichtung, und muß lediglich dem Ermessen des Geometers anheimgestellt werden.

Fünftes Capitel.

Von dem Gebrauche des Meßtisches.

Vom Aufstellen und Orientiren des Messtisches.

§. 77.

Es sei **AB** (Taf. VI., Fig. 8) eine auf dem Felde abgesteckte Linie und **ab** die ihr entsprechende auf dem Meßtische; man soll den Meßtisch so stellen, daß bei horizontaler Tischplatte der Punct **a** senkrecht über **A** zu stehen komme und **ab** mit **AB** parallel werde, daß also beide Linien in die durch **A** und **B** gelegte Verticalebene fallen.

Man setze den Meßtisch über den Punct **A**, so daß beiläufig **a** senkrecht über **A** steht und die Linie **ab** nach der Gegend von **B** gerichtet ist. Hierauf richte man die Füße des Stativs so, daß die Tischplatte eine bequeme Höhe bekommt und ohngefähr horizontal liegt, und alsdann schraube man die Füße fest.

Nun richte man die Linie **ab** genauer nach der Gegend von **B**, indem man zwei ihrer Puncte am Rande der Meßtischplatte durch die darauf gesetzten Spitzen beider Zeigefinger kenntlich macht und an denselben vorbei nach

dem bei B stehenden Signale visirt. Daß hierbei die Schraube, wodurch die Tischplatte festgeklemmt wird, gelockert sein muß, versteht sich von selbst. Man hänge nun die Lothgabel auf den Punct a und verrücke den Meßtisch, bis das Loth über A einspielt, ohne daß jedoch die Linie a b bedeutend aus der Richtung A B herausgebracht wird. Hierzu ist erforderlich, daß man den Meßtisch so fortrücke, daß die Kanten der Tischplatte in den verschiedenen Stellungen sich parallel bleiben, was man nach einiger Uebung leicht mit der erforderlichen Genauigkeit bewerkstelligen wird.

Spielt die Lothgabel über dem Puncte A richtig ein und hat zugleich bei ohngefähr horizontaler Lage der Tischplatte die Linie ab so genau die Richtung der AB, als man durch das Augenmaß zu beurtheilen vermag, so wird der Meßtisch mittelst der Wasserwaage genau horizontal gestellt. Dann setzt man die Kippregel an die Linie a b und dreht die nicht allzulocker geschraubte Tischplatte mit der Hand so lange, bis man das bei B stehende Signal im Felde des Fernrohres vom verticalen Visirfaden gedeckt sieht, oder wenigstens, bis dieser Faden vom Signale nicht bedeutend abweicht. Man schraubt hierauf die Tischplatte fest und bewegt sie mittelst der Micrometerschraube noch so weit, bis das Signal vom Faden genau gedeckt wird.

Man muß jedoch hierbei noch Folgendes mit der größten Vorsicht beobachten: Giebt man dem Tische, nachdem man ihn horizontal gestellt und die Kippregel darauf gesetzt hat, die sogenannte grobe Drehung mit der Hand, um das Fadenkreuz auf eine Signalstange zu richten, so kommt er leicht wieder ein Wenig aus seiner horizontalen Lage, und man muß daher die Wasserwaage nochmals aufsetzen, um die noch etwa vorhandene Abweichung zu corrigiren. Hat man sodann das Fadenkreuz durch die feine Drehung mittelst der Micrometerschraube auf den Gegenstand richtig eingestellt, so muß man den Meßtisch einige Augenblicke ruhen lassen und dann nochmals zusehen, ob daß Signal vom Faden richtig gedeckt wird. Denn gewöhnlich geben die Theile des Meßtisches, wenn die Platte festgeschraubt worden, wegen der Pressung, etwas nach, und das Fadenkreuz wird daher in solchen Fällen den Gegenstand, worauf es gerichtet wurde, wieder verlassen.

Anmerkung 1. Die Linie a b des Meßtisches, wodurch die A B des Feldes vorgestellt wird, zieht man am Besten mittelst einer starken, nicht allzu scharfen und in einen Griff gefaßten Nadel, und legt daneben, um sie kenntlich zu machen, eine eben so lange Bleistiftlinie. Sie muß so lang gezogen werden, als das Lineal der Kippregel erlaubt, und es ist am Besten, wenn sie über die ganze Meßtischplatte weggeht. Man darf sich nicht etwa begnügen, sie gerade so lang zu machen, daß sie eben die nach dem verjüngten Maßstabe aufgetragene A B darstellt, denn an eine lange Linie läßt sich das Lineal der Kippregel weit sicherer anlegen, als an eine kurze. Dieses gilt von allen denjenigen auf der Meßtischplatte gezogenen Linien, nach welchen man in der Folge den Meßtisch zu stellen oder zu orientiren beabsichtigt. — Damit man das Lineal an eine lange Linie möglichst sicher anlegen könne, sticht man in dieselbe mit einer Nadel ein Paar sehr feine Löcher in möglichst großer Entfernung, also nahe am Rande der Meßtischplatte, und umzieht jeden Punct, um ihn leicht aufzufinden, mit einem Bleistiftringel. An diese Puncte wird dann das Lineal angelegt.

Anmerkung 2. Es sei A B (Taf. VI., Fig. 16) eine Linie und A B′ ein Lineal, welches in dem Puncte A genau an der Linie A B anliegt, in B aber um den Abstand B B′ entfernt ist. Der Abweichungswinkel ist B′ A B, und dieser kann, weil er nur äußerst klein sein wird, durch die Formel $3438 \times \frac{BB'}{AB}$ Minuten ausgedrückt werden. Ist nun B B′ eine solche Größe, welche auf dem Papiere nicht gut mehr gesehen werden kann, so wird das Lineal A B′ die Richtung der A B zu haben scheinen, ohngeachtet es mit ihr den Winkel B′ A B macht, der um so größer ist, je kleiner A B ist. Wäre, z. B., $BB' = \frac{1}{40}$ Linie, $AB = 20$ Zoll $= 240$ Linien, so wäre der Winkel $A =$

$$3438 \times \frac{1}{40 \cdot 240} = \frac{3438}{9600} = 0{,}358 \text{ Minuten,}$$

also nur unbedeutend. Wäre aber A B = 5 Zoll, so würde A = 1,43 Minuten gefunden werden. Hieraus geht zur Genüge hervor, daß die Orientirungslinien auf dem Meßtische so lang, als möglich, zu ziehen sind.

Anmerkung 3. Hat man den Meßtisch nach der vorigen Weise gestellt und orientirt, so kann man auch in der Linie A B mit Hülfe des Fernrohres leicht Zwischenpuncte, D, C, und zwar mit großer Genauigkeit bestimmen. Wird nämlich das Signal bei B vom Visirfaden gedeckt, so steht jedes andere Signal in der Linie A B, das ebenfalls vom Visirfaden gedeckt wird.

§. 78.

Aufgabe. Einen Winkel A C B, den die Objecte A und B (Taf. VI. Fig. 9) des Feldes an dem Puncte C machen, auf den Meßtisch zu zeichnen.

Auflösung. Gewöhnlich ist der Scheitel c und die Richtung des einen Schenkels e f auf dem Meßtische schon gegeben. Man stelle also den Meßtisch horizontal und so, daß c senkrecht über C, und e f in die Richtung C B zu liegen kommt (§. 77). Man hebe nun die Kippregel von der Linie e f, an welche man sie, behufs der Orientirung nach der Richtung C B gelegt hatte, behutsam ab, setze sie behutsam in der Richtung C A wieder nieder und richte sie so, daß das Lineal genau an dem Puncte c liegt und das bei A stehende Signal vom Faden des Fernrohres gedeckt wird. Zieht man alsdann die Linie g h, so ist g c f der verlangte Winkel = A C B.

Etwas schwierig ist es hierbei, das Lineal an den Punct c so zu legen, daß zugleich auch das bei A stehende Signal vom Faden des Fernrohres gedeckt wird. Man sticht deshalb mitunter eine feine Nähnadel in dem Puncte c senkrecht in den Meßtisch ein, um das Lineal bei'm Visiren daran anlegen zu können, und damit diese Nadel dem Drucke, der übrigens so gelind, als möglich, geführt werden muß, nicht nachgebe, versieht man sie wohl auf der einen Seite mit einer Art Stütze, die, z. B., aus einem messingenen Klötzchen besteht, in welches die Nadel eingeschraubt wird (Taf. VI. Fig. 11). Daß der

Gebrauch eines solchen Apparates nur unbequem sein kann, leuchtet von selbst ein, abgesehen davon, daß die Nadelstiche durch wiederholtes Einsetzen der Nadel und durch den Druck des Lineals gegen dieselbe eine Ausdehnung erhalten werden, welche der Richtigkeit der Arbeit nachtheilig ist. Höchstens könnte man der sogenannten Anschlagenadeln sich bedienen, wenn man nur mittelst eines leichten Diopterlineals visirte.

Indessen ist eine solche Nadel auch ziemlich überflüssig und ihr Vortheil nur scheinbar. Man setze anfangs die Kippregel nach dem Augenmaße in der Richtung CA nieder, drehe sie so weit, bis das bei A befindliche Signal vom Faden gedeckt wird, ohne jedoch das Lineal sehr weit von dem Puncte c zu entfernen. Liegt, wenn der Visirfaden den Gegenstand A deckt, das Lineal nicht an c, so schiebe man es mit sich parallel an c heran und sehe nach, ob das Signal A vom Faden noch gedeckt wird. Ist dieses nicht der Fall, so visirt man nochmals genau nach A und wiederholt dieses Verfahren so lange, bis das Lineal richtig liegt. Durch einige Uebung erreicht man hierin eine solche Fertigkeit, daß man in wenigen Secunden einen Punct richtig anvisiren wird.

Anmerkung. Will man den auf den Meßtisch gezeichneten Winkel c in Graden und Minuten wissen, so nimmt man auf seinen Schenkeln möglichst lange und gleiche Abschnitte ca und cb (Taf. VI. Fig. 10), so daß man das gleichschenklige Dreieck abc erhält. Man mißt dann den Schenkel $ca = r$ und die Sehne $ab = s$ auf dem Transversalmaßstabe und rechnet nach der bekannten Formel

$$\sin \tfrac{1}{2} c = \frac{\tfrac{1}{2} s}{r}.$$

Hierbei richtet man es gern so ein, daß r eine Zahl wird, mit der man leicht dividiren kann, z. B. $r = 1000$. Wäre, z. B., $s = 424$, $r = 1000$, so hätte man $\sin \tfrac{1}{2} c = \frac{\tfrac{1}{2} \cdot 424}{1000} = 0{,}212$, also $\tfrac{1}{2} c = 12^\circ\ 14'\ 22''$, also $c = 24^\circ\ 28'\ 44''$.

Von den Ursachen, wodurch die mit dem Meßtische gemessenen Winkel fehlerhaft werden.

§. 79.

Die Fehler, die bei der Bestimmung mit dem Meßtische begangen werden, stammen im Allgemeinen aus folgenden Quellen:

1) Aus der Wandelbarkeit des Meßtisches, wenn die Theile desselben, nachdem er genau orientirt worden, der Pressung nachgeben und die Tischplatte dadurch ihre Lage ändert.

2) Aus der Unsicherheit bei'm Pointiren, d. h., bei dem Einstellen des Visirfadens auf einen Gegenstand. Weicht nämlich der Visirfaden vom Gegenstande A (Taf. VI. Fig. 15) nur so weit ab, daß der Abweichungswinkel A C A′ den kleinsten Sehewinkel nicht überschreitet, so wird die Abweichung nicht merklich sein und also der Visirfaden den Gegenstand A zu decken scheinen. Hieraus entspringt bei der Bestimmung des Schenkels C A ein Fehler A C A′, und da derselbe Fehler (B C B′) auch bei der Bestimmung des anderen Schenkels C B begangen werden kann, und beide Abweichungswinkel entweder außerhalb oder innerhalb des wahren Winkels B C A liegen können, so ist möglicher Weise der gemessene Winkel B′ C A′ um das Doppelte des kleinsten Sehewinkels fehlerhaft. Gebraucht man ein Diopterlineal ohne Fernrohr, wo, wegen des Visirens mit bloßem Auge, der kleinste Sehewinkel eine Minute betragen wird, so kann der gemessene Winkel um zwei Minuten fehlerhaft sein, und bei ungünstiger Beleuchtung wird man noch größere Fehler erhalten. Durch den Gebrauch eines Fernrohres aber werden die Fehler des Visirens bedeutend herabgesetzt, und zwar im Allgemeinen in dem Maße, als das Fernrohr die Gegenstände vergrößert. Bei einem Fernrohre also, das zwölf Mal vergrößert, und daher den kleinsten Sehewinkel auf $\frac{1}{12}$ Minute = 5 Secunden herabbringt, wird der Fehler eines gemessenen Winkels nur 10 Secunden betragen, vorausgesetzt, daß das Fernrohr mit seiner Vergrößerung auch hinreichende Deutlichkeit verbindet.

3) Aus dem unsicheren Anlegen des Lineals an die Orientirungslinie. Wie hierdurch der Winkel fehlerhaft

werden kann, läßt sich aus §. 77, Anmerkung 2, unmittelbar einsehen. Bei möglichst langen Orientirungslinien und fein gestochenen Puncten wird jedoch dieser Fehler nur unbedeutend sein.

4) Aus der Unebenheit der Meßtischplatte und des aufgezogenen Papieres, welche der genauen Horizontalstellung hinderlich ist und verursacht, daß die Umdrehungsebene des Fernrohres (nämlich der Visirlinie) nicht senkrecht gegen die Horizontalebene steht und bei verschiedenen Stellungen verschiedene Neigungen gegen die Tischplatte annimmt.

5) Der Winkel wird fehlerhaft, wenn sein Scheitelpunct nicht genau senkrecht über dem entsprechenden Puncte des Feldes steht.

6) Wenn die Visirlinie mit der Kante des Lineals nicht in einerlei Verticalebene liegt.

7) Wenn die Umdrehungsebene des Fernrohres nicht senkrecht gegen die Ebene des Lineals ist.

8) Wenn die Meßtischplatte nicht horizontal steht.

9) Wenn die Visirlinie, d. h. die Axe des Fernrohres, gegen die Umdrehungsaxe nicht senkrecht ist, also bei ihrer Umdrehung nicht eine Ebene, sondern die Oberfläche eines Kegels beschreibt.

Man könnte hierzu noch die Laune des Feldmessers und die Lust und Aufmerksamkeit, mit welcher er arbeitet, hinzufügen. — Daß überall ein gerades Lineal der Kippregel vorausgesetzt wird, versteht sich von selbst.

Die unter 4 bis 9 angeführten Fälle müssen nun theoretisch genau untersucht werden, wenn man von der Größe der hieraus entspringenden Fehler eine deutliche Vorstellung haben will.

§. 80.

Wenn der Scheitelpunct c des Winkels auf dem Meßtische nicht senkrecht über dem Scheitel C des Winkels ACB auf dem Felde steht (Taf. VI. Fig. 12).

Man denke sich den Winkel auf dem Felde auf die horizontale Meßtischplatte projicirt, so ist diese Projection ACB der eigentlich zu messende Winkel, wofür man auf der Tischplatte den Winkel AcB erhält, dessen Scheitel nicht mit C zusammenfällt. Man bezeichne, der Kürze

halber, den Winkel ACB mit C, AcB mit c, so ist in den Dreiecken CHA und cHB, weil bei H gleiche Winkel sind:

$$C + A = c + B,$$

daher:

$$\text{I.}\quad C = c + B - A,$$

also, daß c gegen C um B — A zu klein oder zu groß ist, je nachdem B — A positiv oder negativ ist.

Setzt man nun den Abstand cn des Scheitels c vom Schenkel CA = x, und die Entfernung des Signales A von c, d. h., cA = a, so ist $\sin A = \frac{x}{a}$, oder weil A nur ein kleiner Winkel sein wird, in Folge der Kleinheit von cn, Winkel $A = 3438 \frac{x}{a}$ Minuten. Ebenso findet man, wenn cB = b und cm = y gesetzt wird, Winkel $B = 3438 \frac{y}{b}$ Minuten, folglich der Fehler des Winkels c =

$$\text{II.}\quad 3438 \left(\frac{x}{b} - \frac{x}{a}\right) \text{ Minuten.}$$

Wir könnten nun noch weiter gehen und die Lage des Punctes c gegen C für den Fall bestimmen, daß der Fehler des Winkels c am Größten wird; allein es leuchtet schon aus der obigen Formel zur Genüge ein, daß der Fehler in allen Fällen nur unbedeutend sein kann. Immer kann man den Meßtisch so stellen, daß die Entfernung Cc keinen Zoll beträgt, wo dann begreiflich cm und cn noch kleiner sein müssen. Nehmen wir aber y = 1 Zoll an, und setzen die Entfernung b = 500 Fuß = 6000 Zoll, so beträgt der eine Theil des Fehlers $3438 \frac{y}{b}$ nur 0,57 Minuten, und bei größeren Distanzen ist er noch kleiner. Dieser Fehler kann nun durch das andere Glied mit dem Factor $\frac{x}{a}$ zum Theil, oder auch ganz, aufgehoben werden; er kann aber auch freilich dadurch verdoppelt werden, wie es, z. B., in Fig. 13 (Taf. VI.) der Fall ist, wo der Winkel c offenbar um die Summe von A und B größer ist, als C. So kann es denn kommen, daß, selbst wenn auf Distan-

zen von 500 Fuß hinaus visirt wird, sich ein Fehler von 1 Minute einschleicht, und bei kürzeren Distanzen werden die Fehler verhältnißmäßig größer ausfallen.

Man setze den Abstand $c C = d$, und den Winkel $c C A = \varphi$, also $c C B = \varphi - C$, so ist $n C c = 180^\circ - \varphi$, $m C c = 180^\circ - (\varphi - C)$, und $c n = d \sin(180^\circ - \varphi) = d \sin \varphi = x$, $c m = d \sin(\varphi - C) = y$. Setzen wir diese Werthe von x und y in die obige Formel, so haben wir den Fehler =

$$\frac{3438}{a\,b} \cdot d \left(a \sin(\varphi - C) - b \sin \varphi\right).$$

Im Dreiecke B C A können wir aber, ohne merklichen Fehler, C A mit $c A = a$, und C B mit $c B = b$ verwechseln, und wenn wir dann den Winkel $C A B = \alpha$, $C B A = \beta$ setzen, so haben wir $\sin \alpha : \sin \beta = b : a$, also $a = \frac{b \sin \beta}{\sin \alpha}$. Hierdurch erhalten wir

$$a \sin(\varphi - C) - b \sin \varphi = \frac{b \sin \beta \sin(\varphi - C)}{\sin \alpha} - b \sin \varphi =$$

$$\frac{b}{\sin \alpha} [\sin \beta \sin(\varphi - C) - \sin \alpha \sin \varphi] =$$

$$\frac{b}{\sin \alpha} \left(\sin \beta \sin(\varphi - C) - \sin(\beta + C) \sin \varphi\right),$$

weil nämlich $\alpha = 180^\circ - (\beta + C)$, also $\sin \alpha = \sin(\beta + C)$ ist. Lösen wir aber $\sin(\varphi - C)$ und $\sin(\beta + C)$ nach den bekannten Formeln auf, so finden wir den letzten Ausdruck =

$$\frac{- b \sin C}{\sin \alpha} (\sin \beta \cos \varphi + \cos \beta \sin \varphi) =$$

$$\frac{- b \sin C}{\sin \alpha} \sin(\varphi + \beta),$$

und wenn wir dieses statt $a \sin(\varphi - C) - b \sin \varphi$ substituiren, so wird der Fehler

$$\text{III.} \quad - 3438 \cdot \frac{d}{a} \cdot \frac{\sin(\varphi + \beta) \sin C}{\sin \alpha}.$$

Diese Formel erhält offenbar den größten Werth, wenn $\sin(\varphi + \beta) = 1$, also $\varphi + \beta = 90^\circ$ ist, woraus $\varphi = 90^\circ - \beta$ folgt.

Zieht man also C D senkrecht auf A B und macht den Winkel A C E = B C D, so ist E C die Linie, auf welcher der Punct c liegen muß, wenn der Fehler ein

Größtes werden soll. — Ist $\beta > 90^\circ$, so wird $90^\circ - \beta$ negativ, und dann hat man den Winkel $\beta - 90^\circ$ auf die andere Seite von C A zu tragen.

Der größte mögliche Fehler bei einem Abstande c C = d, ist also

$$\text{IV.} \quad 3438 \cdot \frac{d}{a} \cdot \frac{\sin C}{\sin \alpha}.$$

Setzt man die Seite A B = g, so ist $\sin \alpha : \sin C = b : g$, also $\frac{\sin C}{\sin \alpha} = \frac{g}{b}$, wodurch wir für den größten Fehler die einfache Formel erhalten

$$\text{V.} \quad 3438 \cdot \frac{d\,g}{a\,b}.$$

Ist nun a die kleinste Seite, so ist doch g — a kleiner, als b, daher auch $\frac{g}{b} - \frac{a}{b} < 1$, oder $\frac{g}{b} < 1 + \frac{a}{b}$, oder weil, unter obiger Voraussetzung, $\frac{a}{b}$ höchstens = 1 sein kann, $\frac{g}{b} < 2$. Setzen wir daher in der letzten Formel statt $\frac{g}{b}$ die Zahl 2, so erhalten wir den extremen Fehler =

$$\text{VI.} \quad 6876 \cdot \frac{d}{a} \text{ Minuten,}$$

und dieses giebt für d = 1 Zoll und a = 500 Fuß einen Fehler von etwas mehr als 1 Minute.

Man kann also den Fehler, der aus dem angeführten Grunde entsteht, bei Meßtischmessung als gar nicht vorhanden betrachten, wenn man nur bei der Stellung des Meßtisches mit möglichster Genauigkeit verfährt. Doch wenn Feldmesser behaupten, es könne ohne nachtheiligen Einfluß der Scheitelpunct des Winkels auf dem Meßtische von dem correspondirenden Puncte auf dem Felde um einen ganzen Fuß abstehen, so ist diese Behauptung offenbar zu weit ausgedehnt, und muß vor Nachlässigkeit der Art gewarnt werden.

Uebrigens bemerken wir noch, daß auch der Fehler 0 werden kann, für den Fall nämlich, wo $\sin(\varphi + \beta) = 0$, d. h., wo $\varphi + \beta = 180^\circ$, und also $\varphi = 180^\circ - \beta$

ist, oder wenn c in der Peripherie des um A B C beschriebenen Kreises liegt.

§. 81.

Wenn die Umdrehungsebene der Visiraxe zwar senkrecht auf der Ebene des Lineals steht, aber die Kante des Lineals nicht zugleich auch in der Umdrehungsebene liegt (Taf. VI. Fig. 14).

Es sei C der Scheitel des Winkels, C D das Lineal in der einen, C E in der andern Lage, und G B und H A seien die Durchschnittslinien der Umdrehungsebene mit der Ebene des Lineals, d. h., die auf den Horizont projicirte Visiraxe, welche mit der Kante des Lineals in der einen Lage den Winkel M, in der andern den Winkel N bildet. Sind nun die anvisirten Objecte A und B, so ist der wahre Winkel B C A, welchen wir kurz mit C bezeichnen wollen; das Lineal aber giebt auf dem Meßtische den Winkel D C E, welcher durch C′ bezeichnet sein mag. Es kommt nun darauf an, den Fehler zu finden, den man begeht, wenn man den Winkel C′ für den wahren C nimmt.

Man hat $C = C' + gCD - fCE$. Bezeichnen wir aber die Winkel H B C und H A C kurz mit B und A, so hat man im Dreiecke B C M, $B = gCD + M$, also $gCD = B - M$, und eben so $fCE = A - N$, folglich

$$C = C' + (B - A) - (M - N),$$

also einen Fehler $C - C' = (B - A) - (M - N)$.

Im gegenwärtigen Falle ist die Neigung der auf den Horizont projicirten Visiraxe gegen die Kante des Lineals unveränderlich, weil die projicirte Visiraxe mit der Durchschnittslinie der Umdrehungsebene und der Ebene des Lineals zusammenfällt, daher $N = M$ ist. Folglich behalten wir den Fehler

$$C - C' = (B - A).$$

Ziehen wir nun C m senkrecht auf G B und setzen $CB = b$, $Cm = y$, so ist $\sin B = \frac{y}{b}$, wofür wir, in Folge der Kleinheit von y, setzen dürfen: Winkel $B = 3438 \cdot \frac{y}{b}$ Minuten. Eben so hat man, wenn C n

auf H A senkrecht gezogen und C A = a, C n = x gesetzt wird, $A = 3438 \frac{x}{a}$ Minuten, und folglich

$$C - C' = 3438 \left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right) \text{ Minuten.}$$

Da bei jedem nur mittelmäßigen Instrumente die projicirte Visiraxe G M mit der Kante des Lineals nur einen kleinen Winkel machen wird, so kann sehr nahe C m = C n gesetzt werden, was dann auch in aller Strenge wahr ist, wenn das Lineal beidemal mit derselben Stelle an C angelegt wird. Man hat daher y = x und daher den Fehler

$$C - C' = 3438 \cdot x \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right).$$

Hieraus ist nun ersichtlich, daß die Fehler des Visirens sich zum Theil aufheben, und daß, wenn die Abstände der anvisirten Objecte A und B von C gleich groß sind, der Fehler ganz verschwinden muß; denn dann wird, wegen b = a, $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = 0$, und also auch C — C' = 0, d. h., C = C'. Aber selbst bei einem nur mittelmäßig gearbeiteten Instrumente wird x nur eine sehr kleine Größe sein, die nie über eine Linie betragen wird, und dann muß der Unterschied zwischen C und C' so unbedeutend ausfallen, daß er auf dem Meßtische auf keine Weise sichtbar werden kann. Wäre, z. B., x = 1''', b = 100' = 14400''', a = 500' = 72000''', so würde man C — C' nur = 0,191 Minuten = 11'',5 Secunden finden. So gering ist schon der Fehler, wenn nur auf die kurze Distanz von 100 Fuß visirt wird, bei größeren Distanzen wird er aber verhältnißmäßig geringer. Man kann also diesen Fehler als für den Meßtisch gar nicht vorhanden betrachten.

Wenn man also den Meßtisch auf dem Zwischenpuncte einer Linie aufstellt und ihn nach dem einen Endpuncte orientirt, so muß, wenn die Kippregel von der anderen Seite an die Linie angelegt wird, auch der andere Endpunct vom Visirfaden nahe genau gedeckt werden, wenn auch das Instrument den oben bezeichneten Fehler hat. Geschieht es nicht, so muß die Ursache irgendwo

anders liegen. Nur wird vorausgesetzt, daß die Endpuncte vom Zwischenpuncte einige hundert Fuß abstehen.

Zusatz. Der Winkel, den die beiden Visirlinien mit einander bilden, ist BHA, und kann für den wahren Winkel BCA genommen werden, da der Abstand der Scheitel H und C so gering ist (§. 80). Der Unterschied des gemessenen Winkels MCN vom Winkel MHN ist dann = M — N, d. h., dem Unterschiede der Winkel gleich, um welche die Visirlinie gegen das Lineal geneigt ist. Sind daher beide Winkel M und N gleich, so ist der Fehler = 0.

§. 82.

Wenn die Umdrehungsebene der Visiraxe auf der Ebene des Lineals und folglich auch auf der horizontalen Meßtischplatte nicht senkrecht steht.

Die Umdrehuugsebene MQ (Taf. VI., Fig. 17) der Visiraxe schneide die horizontale Ebene des Meßtisches MR in der Linie MN unter einem Neigungswinkel = w. Es sei ferner ba die Visiraxe, und es werde durch dieselbe eine Ebene aceb senkrecht auf die Ebene des Meßtisches gelegt, so ist diese die eigentliche Visirebene, und die Durchschnittslinie ce stellt die auf den Horizont projicirte Visiraxe vor.

Fällt man von a und b die Perpendikel ac und be auf ce, so stehen diese senkrecht auf der Ebene des Meßtisches; läßt man ferner auf MN von a und b die Perpendikel ad und bf herab und zieht cd und ef, so sind die Dreiecke acd und bef bei c und e rechtwinklich, und es ist Winkel adc = bfe der Neigungswinkel w der Umdrehungsebene gegen die Ebene des Meßtisches; folglich fe = (fb) · cos w, cd = (da) · cos w.

Man ziehe ferner (in der Umdrehungsebene) die bn mit MN parallel, so ist abn der Erhebungswinkel der Visiraxe über den Horizont, und wenn wir diesen mit h bezeichnen, so ist bn = df = (ba) · cos h und an = (ba) sin h; daher auch ad = dn + an = fb + (ab) · sin h und cd $= \left(fb + (ab) \cdot \sin h\right) \times \cos w$ $= (fb) \cos w + (ab) \sin h \cos w.$

Man ziehe ferner (in der Ebene des Meßtisches) die ek mit MN parallel, so ist cek der Neigungswinkel der auf den Horizont projicirten Visirlinie ec gegen die Linie MN. Bezeichnen wir diesen mit ψ, so ist $tg\,\psi = \frac{ck}{ek}$. Aber $ck = cd - ef = (ab) \cdot \sin h \cdot \cos w$, $ek = df = (ab) \cdot \cos h$, folglich

$$tg\,\psi = tg\,h \cdot \cos w.$$

Man nenne den Abweichungswinkel der Umdrehungsebene von der Verticalebene λ, so ist $w = 90^0 - \lambda$ und $\cos w = \sin \lambda$; aber da λ, und folglich auch ψ, nur klein sein werden, so dürfen wir λ statt $\sin \lambda$, und ψ statt $tg\,\psi$ setzen, wodurch wir erhalten

$$\psi = \lambda\, tg\,h.$$

Man sieht also, daß der Winkel ψ mit dem Erhebungswinkel h veränderlich ist, und hieraus stammen eben die Fehler der Winkelmessung. Es sei PS die Kante des Lineals, die in gegenwärtigem Falle gegen die Linie MN, und also auch gegen die ihr parallele unter einem sich gleich bleibenden Winkel $MSP = Ste = a$ geneigt ist, dann hat man den Winkel, den das Lineal mit der Visirlinie bildet, $= tge = Ste - teg = a - \psi = a - \lambda\, tg\,h$. Ist bei der zweiten Lage der Kippregel (wo nach dem anderen Schenkel des Winkels visirt wird) der Erhebungswinkel des Fernrohres $= h'$, so bildet die projicirte Visirlinie mit dem Lineale den Winkel $a - \lambda\, tg\,h'$, da λ eine unveränderliche Größe ist. Der Unterschied der Winkel $a - \lambda\, tg\,h$ und $a - \lambda\, tg\,h'$ ist nun der Fehler des gemessenen Winkels (§. 81 Zus.), also der Fehler =

$$\lambda\,(tg\,h' - tg\,h).$$

Man sieht also, daß der Fehler bloß aus der verschiedenen Erhebung des Fernrohres bei'm Visiren entsteht. Ist also das Fernrohr beidemal gleich hoch gehoben, oder gleich tief gesenkt, d. h., ist $h' = h$, so ist der Fehler $= 0$. Dieses findet auch dann Statt, wenn das Fernrohr stets horizontal liegt; denn dann ist $h = h' = 0$, also auch $tg\,h' = tg\,h = 0$. — Am größten wird der Fehler, wenn das Fernrohr bei'm Visiren das eine Mal gesenkt, das andere Mal gehoben werden muß; denn ist h ein Senkungswinkel, so muß er in die Formel $\lambda\,(tg\,h' - tg\,h)$ negativ gesetzt werden, wodurch auch

tg h negativ wird, und der Fehler also $= \lambda\,(\text{tgh}' + \text{tgh})$ zu schätzen ist. Wäre, z. B., was sich sehr leicht zutragen kann, $\lambda = \frac{1}{2}$ Grad $= 30'$, $h = h' = 20^{0}$, so würde man einen Fehler von $(\text{tg}\ 20^{0} + \text{tg}\ 20^{0}) \cdot 30' = 0{,}728 \times 30' = 21{,}84$ Minuten erhalten. Man sieht also, daß, wenn man mit einem Instrumente, das mit diesem Fehler behaftet ist, messen will, das Fernrohr nur äußerst wenig, oder gar nicht, gekippt werden darf.

§. 83.

Wenn die Visirare nicht senkrecht gegen die Umdrehungsaxe steht.

In diesem Falle beschreibt die Visirare einen Kegel, dessen Are mit der Umdrehungsare zusammenfällt. Es sei CK (Taf. VI., Fig. 18) diese Are, K die Spitze des Kegels und **A L B S** ein auf der Are senkrechter Durchschnitt, der, wie man weiß, ein Kreis ist, dessen Mittelpunct C in der Are liegt.

Von C und K lasse man auf die Ebene des horizontalen Meßtisches die Perpendikel **CD** und **KE** herab und ziehe **DE**, so ist **DE** die Projection der Are **CK**. Ist nun **KG** die (auf die Oberfläche des Kegels fallende) Visirare, so lasse man von **G** das Perpendikel **GM** auf den Meßtisch herab und ziehe **ME**, so ist **ME** die projicirte Visirare und also die eigentliche Visirlinie, und es kommt nun darauf an, den Winkel **MED** zu finden, den wir kurz mit φ bezeichnen.

Zieht man aber **MN** senkrecht auf **DE**, so hat man

$\text{tg MED} = \text{tg}\ \varphi = \frac{MN}{EN}$, wo nun **MN** und **EN** zu bestimmen sind.

Es sei **AB** die Linie, in welcher die durch die Are **CK** gelegte Verticalebene (in welcher zugleich auch **CD** und **KE** liegen) die Grundfläche des Kegels schneidet, so ist, wenn man noch **CQ** senkrecht auf **KE** zieht, Winkel **DCB = KCQ** = dem Neigungswinkel der Are **CK** gegen den Horizont, und dieser sei $= e$. Es sei ferner s der Winkel **GCB**, d. h. der Drehungswinkel, um welchen sich die Ebene **CGK**, in welcher die Visirare liegt, durch Drehung um die Kegelare **CK** von der Verticalebene **CDEK** entfernt hat. Zieht man dann **GH**

senkrecht auf CB, so ist $GH = r \sin s$, $CH = r \cdot \cos s$, wenn nämlich der Halbmesser der Grundfläche CG mit r bezeichnet wird. Zieht man noch HI senkrecht auf CD, so ist $HI = CH \times \sin e = r \cos s \cdot \sin e$. — Da die Grundfläche des Kegels senkrecht auf der Ebene CDEK steht, so steht auch GH auf dieser Ebene senkrecht, und da auch MN darauf senkrecht steht, so ist GH mit MN parallel. Zieht man also HN, so müssen, weil GM mit der Ebene DK parallel ist, auch GM und HN parallel sein, also daß $MN = GH$ sein wird, wodurch nun MN gefunden ist. Offenbar ist auch HN mit ID und HI mit DN parallel, folglich auch $DN = HI$ und $EN = ED - HI = ED - r \cos s \cdot \sin e$. Weil aber $CQ = DE = CK \cdot \cos e$, so ist, wenn wir die Axe des Kegels mit k bezeichnen, $NE = k \cos e - r \cos s \cdot \sin e$.

Substituiren wir nun dieses in die Gleichung für $\operatorname{tg} \varphi$, so erhalten wir $\operatorname{tg} \varphi = \frac{r \sin s}{k \cos e - r \cos s \cdot \sin e}$, oder wenn wir Zähler und Nenner mit r dividiren, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin s}{\frac{k}{r} \cos e - \cos s \cdot \sin e}$. Hier ist nun $\frac{k}{r} = \frac{CK}{AC} =$ der Tangente des Winkels KAC, um welchen die Seitenlinie KA des Kegels, also auch die Visirlinie gegen die Grundfläche geneigt ist, und wenn wir diesen Winkel mit w bezeichnen, so haben wir

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin s}{\operatorname{tg} w \cdot \cos e - \cos s \cdot \sin e},$$

welches die gesuchte Gleichung ist. Sie kann noch etwas abgekürzt werden, da es sich hier nur um den Fall handelt, wo sowohl der Neigungswinkel e der Umdrehungsaxe gegen den Horizont, als auch der Winkel $KAC = w$ an der Grundfläche des Kegels nur sehr klein sind, also der Kegel ein sehr stumpfer ist. Hier können wir nämlich $\operatorname{tg} w = w$, $\sin e = e$ und $\cos e = 1$ setzen, also daß

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin s}{w - e \cos s}.$$

Diese Formel gestalten wir nun für unsere Zwecke besser so. Setzen wir zuerst $s = 90^\circ$, wodurch $\sin s = 1$,

$\cos s = 0$ wird, so erhalten wir $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{w}$, also $\cot\varphi = w = \operatorname{tg} w = \cot(90^0 - w)$, und daher $\varphi = 90^0 - w$. In diesem Falle steht die Ebene GCK auf der Verticalebene DK senkrecht, und da CK nahe horizontal liegt, so liegt auch die Ebene GCK, und mit ihr das Fernrohr, nahe horizontal.

Wird nun das Fernrohr aus der horizontalen Lage um den Winkel h erhoben, so ist der Drehungswinkel s in der vorigen Formel $= 90^0 + h$, also $\sin s = \cos h$, $\cos s = - \sin h$, und daher $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos h}{w + e \sin h}$. Hier können wir aber den Winkel φ (DEM) $= 90^0 - w + \psi = 90^0 + (\psi - w)$ setzen, wo dann ψ den Winkel bedeuten wird, um welchen die projicirte Visiraxe, bei einer Erhebung des Fernrohres um den Winkel h, von der projicirten Visiraxe bei horizontaler Lage des Fernrohres abweicht. Man hat dann

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left[90^0 + (\varphi - w)\right] = - \cot(\psi - w)$$

$$= \frac{\cos h}{w + e \sin h}, \text{ oder } \operatorname{tg}(\psi - w) = \frac{-(w + e \sin h)}{\cos h}$$

$$= \frac{-w}{\cos h} - e \operatorname{tg} h,$$ oder weil $\psi - w$, wenn das Fernrohr nicht gar zu hoch gehoben wird, nur ein kleiner Winkel sein kann:

$$\psi - w = \frac{-w}{\cos h} - e \operatorname{tg} h, \text{ woraus folgt:}$$

$$\psi = \frac{-(1 - \cos h)}{\cos h} w - e \operatorname{tg} h.$$

Wie nun auch die projicirte Visiraxe bei horizontaler Lage des Fernrohres gegen die Kante des Lineals geneigt sein mag, so ändert sich doch dieser Neigungswinkel um den Winkel ψ, und hieraus folgt, daß auch der Fehler eines gemessenen Winkels $= \psi$ sein muß, wenn bei'm Visiren nach dem einen Schenkel das Fernrohr horizontal liegt, bei'm Visiren nach dem anderen Schenkel um den Winkel h erhoben wird (§. 81, Zus.).

Der Fehler $\psi = \frac{-(1 - \cos h)}{\cos h} w - e \operatorname{tg} h$ besteht nun, wie man sieht, aus zwei wesentlich verschiedenen

Theilen. Der von e oder der Neigung der Umdrehungsaxe gegen den Horizont abhängige ist kein anderer, als der, den wir schon in §. 82 haben kennen lernen; denn wenn die Umdrehungsebene nicht vertical steht, so kann die Umdrehungsaxe auch nicht horizontal liegen, und der Neigungswinkel dieser Umdrehungsaxe gegen den Horizont ist gleich dem Neigungswinkel der Umdrehungsebene gegen die Verticalebene. Um also diesen Theil des Fehlers nicht in der Rechnung zu haben, werden wir die Umdrehungsaxe horizontal annehmen, wodurch c = 0 wird, und wir

$$\psi = -\frac{1 - \cos h}{\cos h} w = - w \operatorname{tg} h \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} h$$

erhalten, was denn derjenige Fehler des gemessenen Winkels ist, der einzig dadurch entsteht, daß die Visiraxe nicht in einer Ebene, sondern auf der Oberfläche eines sehr stumpfen Kegels beweglich ist.

Man könnte bei'm ersten Anblicke der Sache diesen Fehler für größer halten, als er wirklich ist. Nimmt man, z. B., h = 5°, so ist der Fehler nur $\frac{1}{262}$ w, und also sehr klein, wenn auch w einen ganzen Grad und mehr betrüge. Aber er wächs't sehr schnell, wenn das Fernrohr höher gehoben wird, und wird, z. B., für h = 10°, $\frac{1}{65}$ w; für h = 20°, $\frac{1}{15,6}$ w; doch ist er auch für so große Erhebungswinkel weit kleiner, als w, und also nicht merklich, wenn w nur wenige Minuten beträgt. — Uebrigens ist der Fehler immer derselbe, das Fernrohr mag um den Winkel h gehoben oder gesenkt werden, denn wenn gleich ein Senkungswinkel negativ gesetzt werden muß, so bleibt cos h doch immer positiv; wird daher das Fernrohr das eine Mal gesenkt, das andere Mal ebensoviel gehoben, so wird der Winkel ohne Fehler gefunden.

Setzt man h = 180°, d. h., wird das Fernrohr bei horizontaler Lage ganz umgeschlagen, so wird, wegen cos 180° = — 1, der Fehler ψ = 2 w. Dieses findet bei einer Kippregel Statt, die sich ganz umschlagen läßt, wenn man den Meßtisch auf dem Zwischenpuncte einer Linie aufgestellt und nach dem einen Endpuncte orientirt hat, und sodann das Fernrohr umdreht, um es nach dem anderen Endpuncte zu richten.

§. 84.

Wenn der Meßtisch nicht horizontal steht. Wir setzen hierbei voraus, daß alles Uebrige in Ordnung und namentlich die Kippregel fehlerfrei sei. Der hieraus entstehende Fehler eines gemessenen Winkels besteht aber aus zwei wesentlich verschiedenen Theilen: der eine und minder bedeutende Theil entsteht daher, daß der Winkel nicht auf der Horizontalebene, sondern auf der geneigten Meßtischplatte gemessen wird; der andere Theil hat darin seinen Grund, daß die Umdrehungsebene der Visiraxe bei geneigter Meßtischplatte nicht vertical stehen kann, was begreiflicher Weise einen ähnlichen Fehler erzeugen muß, als wenn bei sonst horizontaler Tischplatte die Umdrehungsebene von der Verticale abweicht.

Um die Größe des ersten Theiles des Fehlers zu untersuchen, sei NP die schief liegende Meßtischplatte (Taf. VI., Fig. 19) und C der Scheitel des zu messenden Winkels. Durch C denke man sich eine Horizontalebene MQ gelegt, deren Durchschnittslinie mit der Meßtischplatte MN sein mag. Es sei ferner ACB ein Winkel in der Horizontalebene, und es werden auf die Ebene NP die Perpendikel AA', BB' gezogen, so daß der Winkel A'CB' entsteht. Wieviel ist nun A'CB' von ACB unterschieden?

Zieht man auf MN das Perpendikel AE und sodann A'E, so ist AEA' der Neigungswinkel beider Ebenen, welcher mit e bezeichnet sein mag. Ist dann der Winkel ACN des Schenkels CA mit der Durchschnittslinie MN $= \tau$, so hat man $CE = CA \cdot \cos \tau$, $AE = CA \sin \tau$, $A'E = AE \cos e = CA \cdot \sin \tau \cdot \cos e$. Bezeichnen wir also den Winkel A'CN mit ψ, so ist $\operatorname{tg} \psi = \frac{A'E}{CE} = \frac{CA \cdot \sin \tau \cdot \cos e}{CA \cdot \cos \tau} = \operatorname{tg} \tau \cdot \cos e$. Nun wird aber, weil wir den Neigungswinkel e nur klein annehmen, der Winkel ψ von τ nicht viel unterschieden sein, so daß, wenn man $\psi = \tau + x$ setzt, x nur sehr klein sein kann. Man hat also $\operatorname{tg}(\tau + x) = \operatorname{tg} \tau \cos e$, und wenn man beiderseits $\operatorname{tg} \tau$ subtrahirt, so wird

$$\operatorname{tg}(\tau+x) - \operatorname{tg}\tau = -(1-\cos e)\operatorname{tg}\tau = -2\sin\tfrac{1}{2}e^2 \operatorname{tg}\tau.$$

Hier hat man $\operatorname{tg}(\tau+x) - \operatorname{tg}\tau = \frac{\sin(\tau+x)}{\cos(\tau+x)} - \frac{\sin\tau}{\cos\tau} =$

$$\frac{\sin(\tau+x)\cos\tau-\cos(\tau+x)\sin\tau}{\sin(\tau+x)\cos\tau}=\frac{\sin x}{\cos\tau\cos(\tau+x)},$$

wofür wir nahe genau $\frac{x}{\cos\tau^2}$ setzen dürfen. Statt $(\sin\frac{1}{2}e)^2$ setzen wir $(\frac{1}{2}e)^2 = \frac{1}{4}e^2$, und hierdurch erhalten wir also $\frac{x}{\cos\tau^2} = -\frac{1}{2}e^2 \operatorname{tg}\tau = -\frac{1}{2}e^2 \frac{\sin\tau}{\cos\tau}$, also $x = -\frac{1}{2}e^2 \sin\tau\cos\tau = -\frac{1}{4}e^2 \sin 2\tau$, also

$$\text{I, } \psi = \tau + x = \tau - \tfrac{1}{4}e^2 \sin 2\tau.$$

Setzen wir den Winkel $ACB = C$, wodurch $BCN = \tau + C$ wird, und bezeichnen wir den Winkel $B'CN$ mit ψ', so haben wir auf gleiche Weise

$$\text{II, } \psi' = \tau + C - \tfrac{1}{4}e^2 \sin 2(\tau+C).$$

Der Unterschied der Winkel ψ' und ψ, oder $B'CN - ACN$ ist aber der Winkel $B'CA'$, welchen Winkel wir mit C bezeichnen wollen; indem wir also die Gleichung I. von II. subtrahiren, finden wir

$$C' = C - \tfrac{1}{4}e^2\left[\sin(2\tau+2C)-\sin 2\tau\right],$$

oder weil allgemein

$$\sin x - \sin y = 2\cos\tfrac{1}{2}(x+y)\sin\tfrac{1}{2}(x-y):$$

$$C' = C - \tfrac{1}{2}e^2\cos(2\tau+C)\sin C;$$

oder $C' - C = -\frac{1}{2}e^2\cos(2\tau+C)\sin C.$

Der Bogen e ist in Theilen des Halbmessers auszudrücken, und hierdurch wird auch $C' - C$ in solchen Theilen erhalten. Will man $C' - C$ in Minuten erhalten und zugleich auch e in Minuten ausdrücken, so muß man e^2 mit 3438 dividiren. Hierdurch erhält man

$$C' - C = \frac{-e^2}{2\cdot 3438}\cos(2\tau+C)\sin C.$$

Dieses ist nun selbst für einen bedeutenden Werth von e nur gering. Setzen wir, z. B., $e = 1^0 = 60'$, so findet sich

$$C' - C = 0{,}523\cos(2\tau+C)\sin C \text{ Minuten},$$

was, wegen $\cos(2\tau+C)$ und $\sin C < 1$, in keinem Falle mehr als $\frac{1}{2}$ Minute betragen kann. Der Fehler ist nämlich darum so klein, weil er in quadratischem Verhältnisse des kleinen Bogens e steht.

Aber der andere Theil des Fehlers, der durch die Kippung des Fernrohres entsteht, kann sehr bedeutend werden. Um dieses zu zeigen, sei, wie vorhin, NP die

schief liegende Meßtischplatte, C der Scheitel des zu messenden Winkels, und durch denselben die Horizontalebene MQ gelegt, welche die Tischplatte in der Linie MN durchschneiden mag. Ist nun die Kippregel gehörig rectificirt, so steht die Umdrehungsebene zwar senkrecht auf der Tischplatte, nicht aber gegen den Horizont. Es sei CA′ die Durchschnittslinie der Umdrehungsebene mit der Meßtischplatte, welche, wie es doch streng genommen sein sollte, mit der Kante des Lineals zusammenfallen mag. Man erweitere die Umdrehungsebene, bis sie die Horizontalebene in der Linie CA schneidet, und sehe nun die Sache so an, als ob die Umdrehungsebene, welche mit der Ebene des Winkels ACA′ zusammenfällt, schief auf der Horizontalebene stehe und CA die Kante des Lineals sei. Verfährt man ebenso bei dem anderen Schenkel CB′, so erhält man auf der Horizontalebene den Winkel BCA, dessen Abweichung vom wirklich gezeichneten Winkel B′CA′ nicht viel beträgt und nach dem Vorhergehenden bestimmt werden kann. Es kommt also nur darauf an, den Unterschied des Winkels BCA vom wahren Winkel, welchen die auf den Horizont projicirten Visirlinien mit einander bilden, zu finden.

Zu dem Ende müssen wir aber die Neigung der Umdrehungsebene A′CA gegen den Horizont, die wir mit ε bezeichnen wollen, ausmitteln. Zieht man aber AA′ senkrecht auf CA′, so steht diese Linie auch auf der Ebene NP senkrecht; zieht man ferner A′E auf MN senkrecht und sodann AE, so ist A′EA der Neigungswinkel = e der Ebenen NP und MQ, und also im rechtwinklichen Dreieck A′EA der Winkel bei A = 90° — e. Zieht man sodann A′G auf EA und A′F auf CA senkrecht, so ist A′FG der Neigungswinkel der Umdrehungsebene gegen die Horizontalebene, und A′GF ist ein rechter Winkel, da die Ebene des Neigungswinkels A′EA auf den Ebenen MQ und NP senkrecht steht.

Demnach ist $\operatorname{tg} A'FG = \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{A'G}{FG}$. Man hat aber $A'G = AA' \sin A'AG = AA' \sin(90^\circ - e) = AA' \cos e$, und $AG = AA' \cos(90^\circ - e) = AA' \sin e$. Bezeichnen wir wieder den Winkel ACN, wie vorhin, durch τ, so ist $CAE = 90^\circ - \tau$, und daher $GF = AG \cdot \sin FAG = AG \cdot \sin(90^\circ - \tau) =$

AG · cos τ = AA' · sin e · cos τ. Folglich hat man

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{A'G}{FG} = \frac{AA' \cdot \cos e}{AA' \cdot \sin e \cdot \cos \tau} = \frac{\cot e}{\cos \tau}.$$

Nennen wir aber λ den Abweichungswinkel der Umdrehungsebene von der Verticalebene, so ist $\varepsilon = 90^\circ - \lambda$, und daher $\operatorname{tg} \varepsilon = \cot \lambda = \frac{\cot e}{\cos \tau}$, oder auch $\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{tg} e \cdot \cos \tau$, indem man nämlich mit cot λ in 1 dividirt. Da aber e und folglich auch λ nur klein sind, so setzen wir e und λ statt tg e und tg λ, wodurch wir erhalten

$$\lambda = e \cdot \cos \tau.$$

Nennen wir nun h den Erhebungswinkel des Fernrohres über den Horizont, wenn von C nach A visirt wird, so bildet, nach §. 82, die auf den Horizont projicirte Visiraxe mit der Kante des Lineals den Winkel $\psi = \lambda \operatorname{tg} h = e \cdot \cos \tau \operatorname{tg} h$. Ist also, wenn von C nach B visirt wird, der Erhebungswinkel h', so haben wir den Abweichungswinkel der auf den Horizont projicirten Visiraxe von der Kante des Lineals = $\psi' = e \cos (\tau + C) \operatorname{tg} h'$, indem man nun statt des Winkels ACN = τ, den Winkel BCN = $\tau + C$ zu setzen hat, wenn wir nämlich den Winkel BCA mit C bezeichnen. Der Unterschied der Winkel ψ' und ψ giebt aber (§. 82) den Fehler, um welchen der Winkel BCA, und folglich auch der gemessene Winkel B'CA' falsch ist, sofern nämlich dieser Fehler bloß von der Kippung des Rohres abhängt. Dieser ist daher =

$$\psi' - \psi = \left(\operatorname{tg} h' \cos (\tau + C) - \operatorname{tg} h \cos \tau\right) \cdot e.$$

Hieraus sehen wir nun, daß der Fehler ganz verschwindet, wenn h = h' = 0 ist, d. h., wenn beidemal die Visiraxe horizontal liegt, denn dann ist tg h = tg h' = 0. Auch wird der Fehler sehr gering, wenn die Erhebungswinkel h und h' nur sehr klein sind. — Bei'm Gebrauche eines bloßen Diopterlineals sind diese Winkel nie sehr groß, und hieraus wird begreiflich, wie ältere Meßtischmessungen doch erträgliche Resultate liefern konnten, wenngleich die Vorrichtungen zum Horizontalstellen der Tischplatte so unvollkommen waren.

Wenn der Meßtisch horizontal steht, die Umdrehungsebene von der Verticalebene aber abweicht, so erhält man

den richtigen Winkel dennoch, wenn das Fernrohr beidemal gleichviel gehoben oder gesenkt ist (§. 82). Dieses gilt aber für den gegenwärtigen Fall nicht, wenigstens nicht durchgängig, denn setzt man h = h', so erhält man

$$\psi' - \psi = \mathrm{tg}\, h \left(\cos(\tau + C) - \cos\tau\right) e = -\ 2\, e\, \mathrm{tg}\, h\, \sin\left(\tau + \tfrac{1}{2}C\right) \sin\tfrac{1}{2}C.$$

Dieses kann zwar 0 werden, wenn $\sin(\tau + \frac{1}{2}C) = 0$ wird, d. h., wenn entweder $\tau + \frac{1}{2}C = 180°$, oder $\tau + \frac{1}{2}C = 360°$, also $\tau = 180° - \frac{1}{2}C$, oder $\tau = 360° - \frac{1}{2}C$ ist. Wenn aber $\tau + \frac{1}{2}C = 90°$ ist, so wird der Fehler $\psi' - \psi = -2\, e\, \mathrm{tg}\, h \sin \frac{1}{2}C$ und hat dann seinen größten Werth. Wäre, z. B., $C = 60°$, also $\sin \frac{1}{2}C = \sin 30° = \frac{1}{2}$, so findet man den Fehler $= -\ e\, \mathrm{tg}\, h$. und dieses giebt, wenn man $e = 1°$ und $h = 20°$ setzt, einen Fehler von 21,8 Minuten. Wäre, unter übrigens gleichen Umständen, $C = 120°$, so würde man gar einen Fehler von 37,8 Minuten erhalten. Man kann hieraus zur Genüge abnehmen, wie schädlich eine schiefe Lage der Meßtischplatte werden kann.

Anmerkung. Wenn die Tischplatte nicht eben ist, so müssen ähnliche Fehler entstehen, als aus der schiefen Lage der Tischplatte und der Abweichung der Umdrehungsebene von der Verticalebene. Denn erstlich verhindert die Unebenheit der Tischplatte die genaue Horizontalstellung, und dann kommt auch die Umdrehungsebene der Kippregel nothwendig in eine abweichende Lage von der Verticalebene, was auch besonders dann Statt findet, wenn die Fläche des Papieres Knötchen und sonstige Erhabenheiten zeigt. — Hierher kann man auch die oft bedeutende Schwere der Kippregel rechnen, welche, wenn sie nahe am Rande des Meßtisches niedergesetzt wird, denselben nothwendig aus der horizontalen Lage drücken muß. Um dieses zu vermeiden, hat man neuerdings den drei Horizontalschrauben des Meßtischstatives dadurch einen größeren Abstand gegeben, daß man sie in drei Vorsprünge einsenkte, welche an den Kopf des Statives angeschnitzt sind.

§. 85.

Ueberblicken wir nun nochmals die Ergebnisse der bisherigen theoretischen Untersuchungen und suchen wir ein Resultat für die Praxis daraus zu ziehen! Jeder Fehler, der aus der unrichtigen Stellung des Meßtisches, sofern der Scheitelpunct des Winkels auf der Tischplatte nicht genau senkrecht über dem entsprechenden Puncte des Feldes steht, entspringen könnte, läßt sich mit großer Sicherheit vermeiden, und eben dieses kann man auch von den Fehlern sagen, die aus dem unrichtigen Anlegen des Lineals an die Orientirungslinie entstehen. Durch den Gebrauch eines Fernrohres vermeidet man auch die Unsicherheit bei'm Visiren, besonders wenn man wichtige Winkelmessungen nur bei guter Beleuchtung der Signale vornimmt.

Die Fehler, die aus der Abweichung der Kante des Lineals von der durch die Visiraxe gelegten Verticalebene entspringen, sind selbst bei mittelmäßig gearbeiteten Instrumenten zu unbedeutend, als daß sie bei Meßtischmessungen noch Berücksichtigung erforderten. Hat man die Kippregel mittelst eines herabhängenden Seiles so rectificirt, daß der verticale Visirfaden bei einer Hebung und Senkung von etwa 20° vom Seile nicht abweicht, so ist sie für Meßtischmessungen, wenigstens in gewöhnlichen Fällen, vollkommen hinreichend, und man hat weder von der schiefen Stellung der Umdrehungsebene gegen die Verticalebene, noch von der schiefen Neigung der Visiraxe gegen die Umdrehungsaxe (§. 83) einen Fehler zu befürchten. Bei weitem die meisten und beträchtlichsten Fehler scheinen aus der schiefen Stellung der Meßtischplatte gegen den Horizont und aus ihrer Unebenheit zu entstehen, wie die Entwickelungen des §. 84 zur Genüge zeigen; denn eine Abweichung des Meßtisches von der Horizontalebene von wenigen Minuten, kann leicht den Winkel um ebensoviel Minuten fehlerhaft geben. Besonders aber sind die Unebenheiten der Meßtischplatte nicht nur der genauen Horizontalstellung hinderlich, sondern sie bringen auch leicht die Ebene des Lineals, welche doch ganz eigentlich als die Projectionsebene angesehen werden muß, beträchtlich aus der horizontalen Lage und können deßhalb beträchtliche Fehler in der Aufnahme der Winkel veranlassen. Wird aber in dieser Beziehung die gehörige Vorsicht angewen-

det, so lehrt die Erfahrung, daß geschickte Geometer bei'm Trianguliren großer Fluren nicht leicht Fehler begehen, die beträchtlich mehr als 1 Minute betragen, und um diese Genauigkeit desto sicherer zu erreichen, ist es rathsam, die Triangulirung so einzurichten, daß man das Fernrohr so wenig als möglich aus der horizontalen Lage zu führen braucht, weil dann auch die Fehler wegen der Neigung des Meßtisches beträchtlich klein werden (§. 84), was begreiflich auch von den Fehlern wegen der Unebenheit des Meßtisches gelten muß.

Uebrigens wird man aus dem bisher Gesagten zur Genüge einsehen, daß solche Kippregeln, deren Fernrohr man ganz umwenden kann, die Genauigkeit gewöhnlicher Meßtischmessungen nicht wesentlich fördern können. Nur bei vorzüglich genauen Aufnahmen, z. B. graphischer Netze, möchte das Umwenden des Rohres, Behufs genauer Rectification, unerläßlich sein.

§. 86.

Aufgabe. Es sind A und B (Taf. VII., Fig. 1) zwei Puncte des Feldes, deren Lage auf dem Meßtische entweder durch unmittelbares Messen und Auftragen der Linie AB nach dem verjüngten Maßstabe, oder wo anders her, gegeben ist; man soll die Lage eines dritten Punctes C gegen die Puncte A und B bestimmen.

Auflösung. Es kommt hierbei alles darauf an, über der Linie ab des Meßtisches, durch welche die AB des Feldes vorgestellt wird, ein Dreieck abc zu construiren, das dem Dreiecke ABC ähnlich ist. Diese Construction kann aber auf dreierlei Weise vollbracht werden, nämlich:

1) kann man zur gegebenen Seite AB noch eine andere Seite AC und den von beiden Seiten eingeschlossenen Winkel A zu Hülfe nehmen;

2) kann man das Dreieck ABC aus der Seite AB und den beiden daran liegenden Winkeln A und B construiren, und

3) kann man das Dreieck ABC aus der Seite AB, einem anliegenden Winkel A und dem gegenüberliegenden Winkel C zu Stande bringen.

In diesen drei verschiedenen Auflösungen unserer Aufgabe ist aber der wesentliche Gebrauch des Meßtisches enthalten.

Erste Auflösung. Ist ab die Linie des Meßtisches, wodurch die AB des Feldes vorgestellt wird, so bringe man den Punct a senkrecht über den correspondirenden A, die ab in die Richtung der AB (§. 77) und bestimme den Winkel cab = CAB. Man messe sodann die Linie AC und trage sie nach demselben Maßstabe, womit ab aufgetragen wurde, auf den Schenkel ac, so ist c der gesuchte Punct, der, weil offenbar das Dreieck abc dem ABC ähnlich ist, zu a und b dieselbe Lage hat, wie C zu A und B.

Zweite Auflösung. Man bestimme außer dem Winkel cba = CBA (Taf. VII., Fig. 2) noch den Winkel cba = CBA, indem man b senkrecht über B und die ba in die Richtung der BA bringt. Der Durchschnittspunct c der Schenkel ac und bc stellt den Punct C in seiner richtigen Lage gegen A und B vor, indem offenbar das Dreieck abc dem ABC ähnlich ist.

Dritte Auflösung. Man bringe wieder einen der Endpuncte der Linie ab (Taf. VII., Fig. 3), etwa a, über den entsprechenden Punct A des Feldes, die ab in die Richtung der AB und bestimme den Winkel cab = CAB, wobei man die Visirlinie ac so lang als möglich zu ziehen hat, da der Meßtisch nach ihr orientirt wird. Nun begebe man sich mit dem Meßtische über den Punct C des Feldes, und da derselbe auf dem Papiere noch nicht vorhanden ist, so verfahre man, um die richtige Stellung des Meßtisches zu erhalten, folgendermaßen. Nachdem man den Tisch über C aufgestellt, nach dem Augenmaße in die horizontale Richtung gebracht und der ca ebenfalls nach dem Augenmaße die Richtung der CA gegeben hat, legt man an den Punct b ein auf die scharfe Seite gestelltes Lineal (etwa den Transversalmaßstab, den man immer zur Hand hat), dreht dasselbe um den Punct b, bis man, darüber hin visirend, das Signal bei B erblickt. Dann zieht man an dem Lineale, das man unverrückt festhält, eine Bleistiftlinie und bemerkt deren Durchschnitt mit der Linie ac, in dessen Nähe der gesuchte Punct c fallen wird. Diesen Durchschnitt bringt man nun senkrecht über C, stellt den Meßtisch genau horizontal und orientirt ihn nach der Linie CA. Alsdann legt man die Kippregel an den Punct b, visirt nach B und zieht die Visirlinie cb, deren Durchschnitt mit der ac den gesuchten Punct c giebt.

Denn da c a die Richtung der C A hat und der Winkel bei a dem bei A gleich gemacht ist, so wird b a mit B A parallel, folglich auch der Winkel abc = ABC, und das Dreieck abc dem ABC ähnlich. Nun hat man zwar im Allgemeinen einen andern Punct als c senkrecht über C gebracht, allein da c nicht weit seitwärts von C liegen kann, so kann bei der Bestimmung des Winkels C kein merklicher Fehler begangen werden.

Anmerkung. Die Linie A B, von welcher aus die Bestimmung des Punctes C vorgenommen wird, heißt die Grund- oder Standlinie. Das erste Verfahren, besonders wenn es im Zusammenhange mehrmals wiederholt wird, heißt Stationiren, das zweite ist das Vorwärtsvisiren oder Vorwärtsabschneiden, und das dritte das Rückwärtseinschneiden.

§. 87.

Untersuchung der Fehler, welche bei der Bestimmung der Lage eines Punctes C gegen eine Standlinie A B begangen werden, wenn außer derselben noch eine zweite Seite des Dreiecks A B C und der eingeschlossene Winkel zu Hülfe genommen werden.

1) Es sei A B C (Taf. VII. Fig. 4) das wahre Dreieck und A B′ C′ das falsche, das man erhält, wenn man statt der wahren Seiten A B und A C die falschen A B′ und A C′, und statt des wahren Winkels B A C den falschen B′ A C′ nimmt. — Die Winkel des Dreiecks A B C nennen wir mit den an seinen Spitzen stehenden Buchstaben und die ihnen gegenüber liegenden Seiten mit a, b, c, so daß c dem Winkel C gegenüber liegt u. s. w. — Den Fehler einer Größe bezeichnen wir durch ein vorgesetztes d, so daß z. B. d c den Fehler von c, und daher c + d c die falsche Seite A B′ bedeutet, während durch c die wahre A C vorgestellt wird. Ist dann d c positiv, so ist die falsche Seite zu groß; zu klein dagegen, wenn d c negativ ist. — Alle Fehler sind ihrer Natur nach immer nur kleine Größen.

2) Zieht man C C′, so ist diese Linie der Abstand des fehlerhaft liegenden Punctes C′ vom wahren C, den wir mit D bezeichnen wollen. Um D zu finden, mache

man A D = A C = b, so ist D C′ der Fehler von b = d b, C D = 2 · C A · sin $\frac{1}{2}$ D A C. Weil aber der Winkel D A C, als Fehler d A des Winkels A nur klein ist, so setzen wir $\frac{1}{2}$ D A C = $\frac{1}{2}$ d A statt sin $\frac{1}{2}$ D A C, daher C D = b · d A. Ferner können wir das Dreieck C D C′ als ein rechtwinkliges betrachten, da der Winkel C D C′ von 90° nur sehr wenig unterschieden ist. Also ist □ C C′ = □ C D + □ D C′, daher

$$\text{I.} \quad D = \sqrt{(d\,b)^2 + b^2\,(d\,A)^2}.$$

Wäre, z. B., b = 1500′, d b = 2′, d A = 5 Minuten, so hat man den zu d A gehörigen Bogen für den Halbmesser 1 = 0,001454, also b · d A = 2,18 Fuß, und daher C C′ = D = $\sqrt{2^2 + (2{,}18)^2}$ = 2,96 Fuß.

Man sieht, daß der Abstand D um so größer wird, je größer die Fehler d b und d A sind, und daß in keinem Falle diese Fehler sich gegenseitig heben können, so nämlich, daß D = 0 würde.

3) Um die Fehler der übrigen Winkel und der dritten Seide zu finden, verlängere man A C durch C und ziehe B′ C″ mit B C parallel. Dann ist der Winkel A C″ B′ = A C B = C, und das Dreieck A C B dem A C″ B′ ähnlich, daher

$$A B : A C = B B' : C C'',$$
$$\text{d. i.} \quad c : b = d c : C C'',$$
$$\text{folglich} \quad C C'' = \frac{b}{c} \cdot d c.$$

Macht man nun A E = A C″, so ist D E = C C″, und E C′ = D C′ — D E = d b — $\frac{b}{c}$ d c. Die Linie C″ E können wir ohne Bedenken mit C D = b · d A verwechseln, und wenn wir also den Abstand C′ C″ mit △ bezeichnen, so haben wir, wie vorher:

$$\text{II.} \quad \triangle \sqrt{\left(d\,b - \frac{b}{c}\,d\,c\right)^2 + b^2\,(d\,A)^2}$$

$$\left(= \sqrt{\square\, C''E + \square\, C'E}\right).$$

Die Größe C′ C″ = △ kann oft ansehnlich größer werden, als C′ C = D, wenn nämlich die Seite A C = b zu groß, die Seite A B = c dagegen zu klein gemessen wäre, also d b positiv, d c negativ gefun-

den würde, was man auch sogleich wahrnehmen kann, wenn man den Punct B′ auf A B selbst nimmt (nicht auf der verlängerten A B). Behalten wir, z. B., die obigen Werthe von b, d b und d A bei, setzen aber d c negativ = — 2 Fuß und c = b, so wird $db - \frac{b}{c}dc = 4$ und $\triangle = \sqrt{4^2 + (2{,}18)^2} = 4{,}55$ Fuß, während D nur = 2,96 Fuß gefunden wurde.

Nun haben wir weiter den Winkel A C″ C′ zu bestimmen, welchen wir mit φ bezeichnen wollen. Wir haben aber für den Winkel C″C′E, $\sin C''C'E = \frac{C''E}{C''C'}$ und $\cos C''C'E = \frac{C'E}{C''E'}$, und da $C''C'E = 180^0 - \varphi - C''AC'$, wofür wir wegen der Kleinheit von C″A C′ kurz $180^0 - \varphi$ setzen dürfen, so ist $\sin(180^0 - \varphi) = \frac{b \cdot dA}{\triangle}$, $\cos(180^0 - \varphi) = \frac{db - \frac{b}{c} \cdot dc}{\triangle} = \frac{c \cdot db - b \cdot dc}{c \cdot \triangle}$, oder

$$\text{III.}\quad \sin\varphi = \frac{b \cdot dA}{\triangle},\ \cos\varphi = \frac{-(c \cdot db - b \cdot dc)}{c\,\triangle} = \frac{b \cdot dc - c \cdot db}{c\,\triangle}.$$

4) Ziehen wir C″ G auf B′ C′ senkrecht, so haben wir $C''G = C''C' \cdot \sin C''C'G$. Aber $C''C'G = EC'G - EC'C'' = C - (180^0 - \varphi) = C + \varphi - 180^0$, wenn wir nämlich den Winkel E C′ G mit $AC''B' = C$ vertauschen, daher $C''G = \triangle \sin(C + \varphi - 180^0) = -\triangle \sin(\varphi + C)$. Ferner ist $\sin C''B'G = \frac{C''G}{B'C''}$, und da C″ B′ G der (kleine) Fehler d B des Winkels B = C B A = C″ B′ A ist, so setzen wir d B statt sin C″ B′ G, und da wir außerdem hier ohne merklichen Fehler B′ C″ mit B C = a verwechseln können, so haben wir

$$\text{IV.}\quad dB = \frac{-\triangle}{a} \cdot \sin(C + \varphi).$$

Behalten wir, um ein Beispiel zu geben, die obigen Zahlen bei, nämlich d b = 2 Fuß, d c = — 2 Fuß, d A = 5 Minuten, b · d A = 2,18 Fuß, b = c = 1500 Fuß, $\triangle$ = 4,55, so finden wir

$$\sin\varphi = \frac{2{,}18}{4{,}55} = 0{,}479,\ \cos\varphi = \frac{-2-2}{4{,}55} = \frac{-4}{4{,}55}$$

= — 0,879. Da nun sin φ positiv, cos φ aber negativ ist, so liegt der Winkel φ im zweiten Quadranten, und man hat $\varphi = 151^\circ\ 23'$. Nehmen wir ferner das Dreieck A B C gleichseitig, so wird a = b = c = 1500 Fuß, und $C = 60^\circ$, daher $C + \varphi = 211^\circ\ 23' = 180^\circ + 31^\circ\ 23'$, und folglich $\sin(C + \varphi) = -\sin 31^\circ 23' = -\ 0{,}521$, wodurch man erhält $dB = +\frac{4{,}55 \times 0{,}521}{1500} = 0{,}00158$ (als Bogen für den Halbmesser = 1), d. h., in Minuten d B = 5,43 Minuten.

Dieses war der Fehler des Winkels B; um auch den Fehler des Winkels C zu erhalten, muß man überlegen, daß sowohl die Summe der richtigen Winkel, A + B + C, als auch die Summe der falschen Winkel (A + d A) + (B + d B) + (C + d C), 180° betragen muß. Hieraus folgt

$$\text{V.}\quad dA + dB + dC = 0,$$

und daher d C = — (d A + d B), was für obiges Beispiel d C = — (5 + 5,43) = — 10,43 Minuten giebt. Der Winkel C wird also in diesem Falle zu klein erhalten, und sein Fehler ist der bedeutendste.

Setzt man voraus, die Seiten c und b seien richtig gemessen worden, so ist d b = d c = 0, und dann findet sich $\triangle = D = b \cdot dA$, $\sin\varphi = 1$, $\cos\varphi = 0$, daher $\varphi = 90^\circ$, $\sin(C + \varphi) = \cos C$ und folglich

$$\text{VI.}\quad dB = -\frac{b \cdot dA}{a}\cos C,$$

wobei es nun auf das Verhältniß von a zu dem Product b · cos C ankommt, ob d B größer oder kleiner ist, als d A. Nimmt man das Dreieck gleichseitig, so ist a = b und $\cos C = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, folglich $dB = -\frac{1}{2}dA$ und daher auch $dC = -(dA + dB) = -(dA - \frac{1}{2}dA) = -\frac{1}{2}dA$. Der Fehler des Winkels A ist also auf die beiden andern Winkel gleich vertheilt. Dieses findet übrigens auch bei allen gleichschenkligen

Dreiecken Statt, denn hier ist $b \cos C = \frac{1}{2} a$, weßhalb die Formel VI. übergeht in $d B = -\frac{1}{2} d A$.

5) Um endlich den Fehler der dritten Seite a zu finden, hat man $C' G = C'' C' \cdot \cos C'' C' G = \triangle \cos \left[C - (180^o - \varphi)\right] = \triangle \cos \left[180^o - (C + \varphi)\right] = - \triangle \cos (\varphi + C)$, und so viel ist $B' C'$ größer, als $B' C''$. Zieht man aber $C H$ mit $A B'$ parallel, so ist $C H = B B' = d c$, und $A B : B C = C H : C'' H$, d. h., $c : a = d c : C'' H$, daher $C'' H = \frac{a \cdot d c}{c}$, und um so viel ist $B' C''$ größer, als $B C$ oder a. Daher ist $B' C'$, d. h. $a + d a$, um $- \triangle \cos (\varphi + C) + \frac{a \cdot d c}{c}$ größer, als a, d. h., es ist

$$\text{VII.} \quad d a = \frac{a \cdot d c}{c} - \triangle \cos (\varphi + C).$$

In dem obigen Beispiele hatte man $\triangle = 4{,}55$ Fuß und $\varphi + C = 180^o + 31^o\, 23'$, daher $\cos (\varphi + C) = - 0{,}854$ und $\triangle \cos (\varphi + C) = - 3{,}88$ Fuß. Ferner war $a = c$ und $d c = - 2$ Fuß, daher auch $\frac{a \cdot d c}{c} = - 2$ Fuß, und folglich $d a = + 1{,}88$ Fuß, so daß a um 1,88 zu groß gefunden worden ist.

Setzt man hier ebenfalls die Seiten b und c als richtig gemessen voraus, d. h. $d b = d c = 0$, so erhält man, wie vorhin, $\varphi = 90^o$, $\cos (\varphi + C) = - \sin C$, $\triangle = b \cdot d A$ und daher

$$d a = b \cdot d A \cdot \sin C.$$

Nun hat man $a : c = \sin A : \sin C$, daher $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$ und folglich

$$\text{VIII.} \quad d a = \frac{b c \sin A}{a} \cdot d A.$$

Man sieht, daß der Fehler $d a$ um so geringer wird, je kleiner $\sin A$ und je größer a ist, d. h., je näher A an 180^o liegt. Wenn es also darauf ankommt, die dritte Seite a mit möglichster Genauigkeit zu bestimmen, so muß man den Winkel A so stumpf, als möglich, nehmen. Sind dann die Seiten b und c richtig gemessen, so wird selbst ein bedeutender Fehler des Winkels A einen kaum merklichen Einfluß haben.

§. 88.

Untersuchung der Fehler, welche bei der Bestimmung des Punctes C begangen werden, wenn zur Construction des Dreiecks ABC außer der Standlinie AB noch die ihr anliegenden Winkel A und B zu Hülfe genommen werden (Taf. VII., Fig. 5).

1) Wir wollen zur Vereinfachung der Untersuchung die Standlinie $AB = c$ als richtig annehmen. Werden nun bei der Bestimmung der Winkel A und B die Fehler $CAC' = dA$ und $CBC' = dB$ begangen, so erhält man statt des Punctes C den falschen C', dessen Lage jetzt untersucht werden soll. Zieht man aber CD auf AC' und CE auf BC' senkrecht, so hat man, wie im vorigen §, $CD = b \cdot dA$ und $CE = a \cdot dB$. Zieht man ferner DF auf BC' und CG auf DF senkrecht, so ist $DF = DG + CE$; aber $DG = CD \cdot \sin DCG = CD \cdot \sin (90^0 - CDG) = CD \cdot \sin C'DF = CD \times \sin (90^0 - DC'F) = CD \times \cos DC'F$; also, wenn wir den Winkel DC'F mit C verwechseln, $DG = b \cdot dA \cdot \cos C$, und $DF = a \cdot dB + b \cdot dA \cdot \cos C$. Es ist aber $DC' \cos C'DF = DC' \sin DC'F = DF$, d. i. $db \cdot \sin C = a \cdot dB + b \cdot dA \cos C$, daher

$$\text{I. } db = \frac{a \cdot dB + b \cdot dA \cos C}{\sin C}$$

und nach derselben Analogie auch

$$da = \frac{b \cdot dA + a \cdot dB \cos C}{\sin C}.$$

Offenbar kann es sich nun ereignen, daß die Winkelfehler dA und dB zufällig so beschaffen sind, daß der Fehler der einen oder anderen Seite verschwindet; allein dieses hängt lediglich vom Ungefähr ab und führt zu keiner allgemeinen Regel. Im Allgemeinen kann man jedoch behaupten, daß die Fehler db und da der Seiten um so größer werden, je spitzer oder je stumpfer der Winkel C ist, unter welchem sich die beiden Visionslinien schneiden; denn dann ist der Werth von sin C sehr klein, der von cos C dagegen nahe = 1, und also wird, z. B., in der Formel $db = \frac{a\,dB + b\,dA \cdot \cos C}{\sin C}$, der Zähler, besonders wenn seine beiden Glieder positiv, ziemlich groß,

der Nenner dagegen klein, wodurch ein großer Werth von db erzeugt wird. Nehmen wir, z. B., $A = B = 80^\circ$, so folgt $C = 20^\circ$; ist ferner die Standlinie $c = 800$ Fuß, so erhält man nach den Formeln $a = \frac{c \sin A}{\sin C}$, $b = \frac{c \sin B}{\sin C}$, $a = b = 2303{,}5$ Fuß. Setzt man endlich $dA = dB = 2$ Min., so findet sich $db = da = 7{,}60$ Fuß, welches schon ein beträchtlicher Fehler ist. — Setzt man unter übrigens gleichen Umständen $A = B = 10^\circ$, so ist $C = 160^\circ$ und $\sin C = \sin 160^\circ = \sin 20^\circ$, $\cos C = - \cos 20^\circ$, $a = b = 406{,}17$, und man findet $da = db = 0{,}04$, also einen unmerklichen Fehler, was daher kommt, daß, wegen des negativen Werthes von $\cos C$, die beiden Glieder des Zählers $b \cdot dA + a \cdot dB \cos C$ sich beinahe aufheben. Würde man aber dB negativ nehmen, d. h., den Winkel B zu klein gemessen voraussetzen, so werden wieder beide Glieder des Zählers positiv, und man findet $da = - db = 1{,}34$.

Man sieht also, daß besonders spitze Durchschnitte der Visionslinien (d. h., spitze Werthe des der Standlinie gegenüber liegenden Winkels) sehr nachtheilig auf die Richtigkeit der Messung wirken können, und solche müssen daher mit Sorgfalt vermieden werden. Bei'm Gebrauche des Meßtisches kommt noch der Umstand hinzu, daß der Durchschnittspunct zweier materiellen Linien sich nicht mit der erforderlichen Schärfe angeben läßt, wenn dieselben unter einem sehr spitzen Winkel sich schneiden.

Im Allgemeinen werden die Fehler da und db ihren kleinsten Werth erhalten, wenn der Nenner $\sin C$ am größten, also $= 1$ wird. Dann wird $C = 90^\circ$, d. h., die beiden Visirlinien schneiden sich rechtwinklich. Rechtwinkliche Durchschnitte geben also die Seiten im Allgemeinen am Genauesten und haben außerdem die wichtige Eigenschaft, daß sie sich ganz scharf angeben lassen. — Weil für $C = 90^\circ$, $\cos C = 0$ wird, so erhalten wir für den Fehler der Seiten a und b:

$$db = a \cdot dB, \quad da = b \cdot dA.$$

Damit aber bei gleich großen Werthen von dA und dB, db ein eben so vielster Theil von b werde, als da von a ist, d. h., damit beide Seiten a und b mit glei-

chem Grade der Genauigkeit erhalten werden, muß nothwendig $a = b$ sein. Denn hier sollen die Quotienten $\frac{db}{b} = \frac{a}{b} dB$ und $\frac{da}{a} = \frac{b}{a} \cdot dA$ gleich sein, und da außerdem $dB = dA$ vorausgesetzt wird, so hat man $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, also $a^2 = b^2$ oder $a = b$.

Also wird im Allgemeinen der Punct C gegen die Standlinie AB mittelst der ihr anliegenden Winkel A und B dann am Genauesten bestimmt, wenn bei C ein rechter Winkel ist und die Seiten AC und BC einander gleich sind.

Doch gebraucht man bei solchen Bestimmungen, z. B. bei großen Triangulirungen, lieber gleichseitige, als gleichschenklich rechtwinkliche Dreiecke, obschon die ersteren im Allgemeinen nicht so genaue Bestimmungen geben. Hier ist der Grund der, daß man jede Seite des Dreiecks wieder als Standlinie zur Bestimmung eines neuen Punctes benutzt, oder an jede Seite des ursprünglichen Dreieckes wieder ein neues Dreieck legt; wollte man sich aber des gleichschenklich rechtwinklichen Dreiecks bedienen, so würden die folgenden Dreiecke immer kleiner werden.

2) Will man den Abstand des falschen Punctes C′ vom wahren C wissen, so hat man im rechtwinklichen Dreiecke CDC′: $C'C = \sqrt{\square CD + \square DC'} =$

$$\sqrt{(b \cdot dA)^2 + \left(\frac{a \cdot dB + b \cdot dA \cos C}{\sin C}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{b^2 \cdot (dA)^2 \sin C^2 + (a \cdot dB + b \cdot dA \cos C)^2}{\sin C^2}}.$$

Nun ist $(a \cdot dB + b \cdot dA \cos C)^2 =$
$a^2 (dB)^2 + 2ab \cos C \cdot dB \cdot dA + b^2 \cos C^2 (dA)^2$, und wenn hierzu $b^2 \cdot (dA)^2 \sin C^2$ hinzugethan wird, so giebt die Summe der beiden Glieder

$$b^2 (dA)^2 \sin C^2 + b^2 (dA)^2 \cos C^2 =$$
$$b^2 (dA)^2 (\sin C^2 + \cos C^2) = b^2 (dA)^2.$$

Bezeichnen wir daher CC′ mit D, so erhalten wir

$$\text{II. } D = \frac{1}{\sin C}\sqrt{b^2 (dA)^2 + a^2 (dB)^2 + 2ab \cos C \cdot dA \cdot dB}.$$

Auch dieser Werth von D wird im Allgemeinen am kleinsten, wenn der Nenner sin C am größten, also = 1 wird. Da dann cos C = 0, so wird für diesen Fall

$$D = \sqrt{b^2 (dA)^2 + a^2 (dB)^2}.$$

3) Der Fehler des dritten (nicht gemessenen) Winkels C ergiebt sich aus §. 87, V; man hat nämlich

$$dC = -(dA + dB).$$

Haben also die Fehler dA und dB gleiche Zeichen, d. h., sind die Winkel A und B beide zu klein oder beide zu groß gemessen, so ist der Fehler von C der Summe der bei A und B begangenen Fehler gleich und kann also schon merklich werden, wenn auch dA und dB unmerklich wären. Wenn man daher die Winkel bei A und B aufgetragen und dadurch auf dem Meßtische den Punct C erhalten hat; wenn man dann den Meßtisch über C aufstellt, ihn nach der Linie CA orientirt und hierauf die Kippregel an die Linie CB anlegt, so wird der Visirfaden oft beträchtlich von dem bei B stehenden Signale abweichen. Wenn aber auch gar keine Abweichung sich zeigte, so wird zwar der Winkel C richtig gefunden sein, auf die Richtigkeit der Winkel A und B kann man aber hieraus nicht schließen, denn in der Formel dC = − (dA + dB) können sich die Fehler dA und dB gehoben haben, so daß dC = 0 wird. In solchen Fällen muß der eine von den Winkeln A und B zu groß, der andere dagegen um eben so viel zu klein gefunden worden sein.

4) Wir haben bis jetzt noch keine Rücksicht auf den Fehler der Standlinie genommen. Auf den Winkel C hat dieser Fehler gar keinen Einfluß, denn der Fehler dieses Winkels hängt lediglich von den Fehlern der Winkel A und B ab. Sei AB die wahre Standlinie = c und AB′ die falsche, so ist CC′ = dc der Fehler von c. Zieht man B′C″ mit BC′ parallel, so ist C″ der Punct, den man statt des wahren C erhält, wenn zugleich auch die Winkel A und B um die kleinen Stücke CAC′ = dA und C′BC = dB fehlerhaft sind. Aber das Dreieck AB′C″ ist dem Dreieck ABC′ ähnlich, und hieraus folgt, daß die Seiten AC′ und BC′, die sich aus den fehlerhaften Winkeln A + dA und B + dB (bei richtig gemessener Standlinie) ergeben, noch in demselben Verhältnisse zu vergrößern und zu verkleinern sind,

als die Standlinie zu groß oder zu klein gefunden ist. Zieht man nämlich C'H mit AB parallel, so ist C'H = BB' = dc, und weil AB : AC' = C'H : C'C'', so folgt $C'C'' = \frac{AC'}{AB} \cdot C'H = \frac{AC'}{c} \cdot dc$. Statt AC' kann man aber ohne Bedenken AC = b setzen, daher $C'C'' = \frac{b}{c} dc$. Der vollständige Fehler von der Seite b ist also =

$$DC'' = DC' + C'C'' = \frac{a \cdot dB + b \cdot dA \cdot \cos C}{\sin C} + \frac{b}{c} dc.$$

Sind die Winkel A und B richtig gemessen, so erhält man ein Dreieck, das dem wahren vollkommen ähnlich ist, nur daß darin die Seiten a und b in demselben Verhältnisse von den wahren Maßen abweichen, als die Standlinie fehlerhaft gemessen worden.

§. 89.

Zusammenstellung der, aus den in §. 87 und 88 angestellten Untersuchungen hervorgehenden practischen Resultate.

1) Wenn ein Dreieck ABC (Taf. VII., Fig. 4) aus zwei Seiten, der Standlinie AB = c und der Seite AC = b, und dem eingeschlossenen Winkel A bestimmt wird, so ist es im Allgemeinen gleichgültig, wie das Dreieck beschaffen ist, ob der Winkel bei A sehr stumpf ist, oder ob er einem rechten nahe kommt, oder ob er endlich spitz ist; denn weder der Abstand des fehlerhaft gefundenen Winkelpunctes C' vom wahren Winkelpuncte C, noch die Lage des Fehlpunctes C' hängen, wie die Gleichungen I, II und III des §. 87 zeigen, von der Beschaffenheit des Winkels A ab. Damit der Abstand des Fehlpunctes C' vom wahren Puncte C möglichst klein werde, giebt es kein anderes Mittel, als den Winkel A und die Seite b möglichst genau zu messen; damit aber auch die dritte Seite BC = a nebst den beiden Winkeln B und C möglichst genau erhalten werden, muß auch die Standlinie = c mit der größten Sorgfalt bestimmt sein. Uebrigens wird man die Sache am füglichsten so einrichten, daß die Standlinie c nicht beträchtlich kürzer ist, als die andere Seite b, weil nach der

Standlinie der Meßtisch orientirt werden muß und die Orientirung und damit der Winkel A desto genauer erhalten werden können, je weiter das Richtungssignal entfernt ist; vorzüglich aber leuchtet ein, daß ein Fehler in der Orientirung, der begreiflich auf den Winkel A fällt, um so merklicher auf die Bestimmung des Punctes C wirken muß, je größer die Seite b ist. — Unrichtigkeiten in den Seiten b und c, besonders wenn die eine zu klein, die andere zu groß gemessen ist, sind die vorzüglichste Ursache der Fehler in den übrigen Stücken des Dreiecks, besonders in den Winkeln B und C, daher genaue Messung der Seiten b und c die vorzüglichste Sorgfalt des Geometers sein muß. Setzt man aber diese Seiten als richtig gemessen voraus, so ist es allerdings am vortheilhaftesten, wenn sie gleich sind (b = c), denn dann wird der Fehler des Winkels A auf die beiden anderen Winkel B und C gleich vertheilt, d. h., der Fehler sowohl von B als der von C beträgt nur die Hälfte des Fehlers von A. Kommt es endlich darauf an, die dritte Seite a mit möglichster Genauigkeit zu erhalten, so muß man den Winkel A so stumpf, als möglich, nehmen, weil dann sein Einfluß auf a verschwindet.

2) Wenn aber ein Dreieck ABC (Taf. VII., Fig. 5) aus der Standlinie AB = c und den daran liegenden Winkeln A und B bestimmt wird, so ist die Form des Dreiecks, wenn die Lage des dritten Winkelpunctes C möglichst genau bestimmt werden soll, nicht mehr so gleichgültig, wie im vorigen Falle. Bei'm Meßtische wird es schon darum nöthig, daß sich die Visirlinien nicht unter einem sehr schiefen Winkel schneiden, weil sich dieselben in Folge ihrer Breite eine kleine Strecke hindurch vermischen und daher der Durchschnitt nicht mit Sicherheit zu erkennen ist. Doch ist dieser Grund der minder wichtige. Aber schon eine oberflächliche Betrachtung führt zu dem Resultate, daß Fehler in den Winkeln A und B um so beträchtlicher auf die Seiten AC und BC (Taf. VII., Fig. 6) wirken müssen, je spitzer der Winkel bei C ist, oder je später die Visirlinien AC und BC zusammenlaufen. In der That wird der Punct C am genauesten bestimmt, wenn der Winkel bei C ein rechter ist, und wenn zugleich AC = BC ist. Dem muß man also in so weit nachzukommen suchen, daß der Winkel bei C nicht allzu schief wird, und daß das Verhältniß der Seiten AC und

BC von dem der Gleichheit nicht zu bedeutend abweicht. Man setzt daher fest, daß der Winkel C nicht unter 45° und nicht über 135° betragen soll.

Der Fehler, der bei der Messung der Standlinie AB begangen wird, hat den Einfluß, daß die übrigen Seiten des Dreiecks in demselben Verhältnisse größer oder kleiner gefunden werden, in welchem die Standlinie zu groß oder zu klein gefunden wurde.

Am mißlichsten steht es mit der Bestimmung des Winkels C, weil der Fehler desselben die Summe der in den Winkeln A und B begangenen Fehler ist. Diese Fehler können sich zum Theil aufheben, wenn der eine von den Winkeln A und B zu klein, der andere zu groß gemessen ist, also beide Fehler in der Summe entgegengesetzte Vorzeichen haben; allein sie häufen sich an, wenn sie gleiche Vorzeichen haben, also die Winkel A und B entweder beide zu klein, oder beide zu groß gemessen sind. Dann kann begreiflicher Weise der Fehler von C sehr merklich werden, wenn auch die von A und B unbeträchtlich sind.

3) Wenn das Dreieck ABC aus der Standlinie AB, einem ihr anliegenden und dem ihr gegenüberliegenden Winkel C construirt wird, so hat man ganz die in Nr. 2 gegebenen Vorschriften zu beachten.

§. 90.

Bestimmung der gegenseitigen Lage mehrerer Puncte des Feldes mit Hülfe des Meßtisches.

1) Man hat das in diesem §. Vorzutragende zugleich als Ergänzung dessen anzusehen, was in §. 74 (Cap. 4) über die Aufnahme einzelner Felddistricte gesagt ist. Die zu diesem Behufe abzusteckenden Hülfsfiguren werden nämlich, wie schon dort bemerkt wurde, zumeist mit Hülfe des Meßtisches aufgenommen, indem man ihre Winkelpuncte nach den jetzt vorzutragenden Methoden in ihrer richtigen gegenseitigen Lage zu Papier bringt.

2) I) Die erste und am meisten gebräuchliche Methode, die Aufnahme mehrerer Puncte zu bewirken, ist die des Vorwärtsvisirens und Vorwärtsabschneidens; es wird nämlich eine Standlinie AB (Taf. VII., Fig. 7) von hinreichender Länge und in schicklicher Lage abgesteckt, genau

gemessen und nach einem passenden Maßstabe auf den Meßtisch aufgetragen und nachher die Lage jedes Punctes C, D, E, F u. s. w. nach der zweiten Construction (§. 86, 2) durch das Dreieck bestimmt, das er mit den Endpuncten der Standlinie bildet, ABC, ABD, ABE u. s. w. Nachdem man nämlich den Meßtisch über A aufgestellt und nach AB orientirt hat, zieht man nach jedem der zu bestimmenden Puncte eine Visirlinie, und ebenso verfährt man an dem anderen Endpuncte B der Standlinie. Man hat hierbei nur nöthig, bei jeder Visirlinie zu bemerken, nach welchem Puncte oder Signale sie gezogen ist, damit man unter den mannigfaltigen Durchschnitten der Visirlinien die rechten aufzufinden weiß. — Wenn der aufzunehmenden Puncte viele sind, daß man also weder die Nummer oder den Buchstaben des Pfahles, womit ein jeder bezeichnet ist, merken, noch bei jedem eine Meßfahne aufstecken kann, so muß ein Gehülfe von Punct zu Punct gehen und eine Meßfahne dort in die Höhe halten. Um aber Irrungen vorzubeugen, bekommt er einen Zettel in die Hand, auf welchem ihm die Folge, in welcher er die Puncte zu begehen hat, vorgeschrieben ist. Er darf sich nicht eher von einem Puncte entfernen, als bis ihm ein Zeichen gegeben wird, was mit einer Pfeife geschehen kann. Auch der Gehülfe giebt, sobald er den gesuchten Punct gefunden und die Meßfahne in die Höhe gerichtet hat, ein solches Zeichen. — In solchen Gegenden, wo durch Gebüsch, Bäume und andere Hindernisse die freie Aussicht oft gehemmt wird, bedient man sich sehr hoher Meßfahnen.

2) II) Die Standlinie AB muß man so legen, daß sie nicht nur möglichst horizontal läuft und genau und bequem gemessen werden kann, sondern auch, daß jeder aufzunehmende Punct mit ihr ein Dreieck bildet, welches zu seiner Bestimmung nicht gar zu unvortheilhaft ist (§. 89, 2), d. h., welches von gleichseitigen oder gleichschenklich rechtwinklichen nicht bedeutend abweicht, wie es, z. B., bei den Dreiecken ABE, ABH und ABI der Fall ist. Dieses ist augenscheinlich nicht für alle Puncte gleich gut möglich, wie, z. B., für die Puncte C, D, F, G, K, L, N. Man stellt deßhalb zur Controle den Meßtisch auf einem dritten Puncte, z. B. I, auf, den man für vorzüglich sicher bestimmt hält. Indem man hier den Meßtisch nach IA orientirt und das Lineal dann

15*

an IB legt, muß der Visirfaden das Signal bei B decken, woraus wenigstens die Richtigkeit des Winkels AIB, wenn gleich nicht die richtige Lage des Punctes I, hervorgeht. Legt man aber das Lineal an I und visirt, z. B., nach F., und geht die Visirlinie mit den schon aus A und B nach F gezogenen in einem Puncte zusammen (ohne daß nämlich die Durchschnitte dieser drei Visirlinien ein kleines Dreieck bilden), so hat man eine beinahe an Gewißheit grenzende Wahrscheinlichkeit, daß die beiden Puncte I und F richtig liegen. Erst dann pflegt man die aufgenommenen Puncte auf dem Meßtische durch feine Nadelstiche zu bezeichnen, wenn man sie durch eine dritte Visirlinie controlirt hat. — Man bemerkt hier das nahe gleichseitige Dreieck AIF, welches zur Bestimmung von F vortheilhaft ist, wenn AI als Standlinie angesehen wird. — Auf gleiche Weise kann man durch jeden von I aus sichtbaren Punct noch eine dritte Visirlinie legen, um seine Lage zu controliren, oder auch, um ihn erst sicher zu bestimmen, wenn er mit der Standlinie ein zu unvortheilhaftes Dreieck bildet. — Das Aufstellen des Meßtisches auf sicher bestimmten Puncten außer der Standlinie wird oft aus dem Grunde nöthig, weil gewisse Puncte von der Standlinie aus nur ein einziges Mal anvisirt werden können und daher von anderen sicher bestimmten Puncten zum zweiten oder dritten Mal anvisirt werden müssen. Hierbei hat man dann immer darauf zu sehen, daß jeder Punct wenigstens mit zweien solchen, von denen er anvisirt wird, ein vortheilhaftes Dreieck bildet. — So begreift man, daß gut bestimmte Puncte zur Aufnahme solcher Puncte benutzt werden können, welche man von der Standlinie aus gar nicht sehen kann.

Bei der Messung kleinerer Districte stellt man den Meßtisch, weniger des wiederholten Controlirens wegen, als vielmehr deshalb zu wiederholten Malen auf, um solche Puncte zu bestimmen, die von der Standlinie aus entweder gar nicht, oder doch nur mittelst sehr unvollkommener Dreiecke bestimmt werden konnten, weil bei der geringen Ausdehnung der Messung kleine Winkelfehler keinen so merklichen Einfluß haben; doch darf man das Controliren nicht unterlassen, so oft sich Gelegenheit dazu darbietet. Bei ausgedehnten Triangulirungen über ganze

Flurmarken aber ist wiederholtes Controliren unerläßliche Bedingung.

2) III) Mitunter wird es wegen der Oertlichkeit erforderlich, einige der aufzunehmenden Puncte, entweder von den Endpuncten der Standlinie oder von andern schon gut bestimmten Puncten aus nach der ersten Construction (§. 86, 1) zu bestimmen. Könnte man, z. B., den Punct **M** wohl von **B** aus, aber von keinem der übrigen Puncte sehen, so würde man die Visirlinie **B M** nehmen und darauf das Maß der **B M** auftragen. Ebenso würde man verfahren, wenn man den Punct **M** zwar von anderen Puncten aus sehen könnte, aber entweder auf keinem derselben den Meßtisch aufstellen wollte, oder wenn man dessen ungeachtet keine schicklichen Durchschnitte für den Punct **M** erhielte. Ohne Noth sollte man aber dieses Verfahren nicht anwenden.

2) IV) Kann man wegen des Terrains die Standlinie **AB** nicht so legen, daß sie zu der beabsichtigten Aufnahme geschickt ist, so bestimmt man sich außer ihr einige Hülfspuncte, von welchen aus die Aufnahme sicher bewirkt werden kann. Diese Hülfspuncte müssen daher so liegen, daß sie nicht nur mit der Standlinie, sondern auch mit den übrigen aufzunehmenden Puncten vortheilhafte Dreiecke bilden. — Um nur ein Beispiel anzuführen, seien **A**, **B**, **C**, **D**, **E** (Taf. VII., Fig. 8) die aufzunehmenden Puncte; man könnte aber aus irgend einem Grunde nicht wohl eine andere Standlinie legen, als **M N**, welche augenscheinlich zur Aufnahme keines der Puncte **A**, **B**, **C**, **D**, **E** geeignet ist. Hier würde man sich den Punct **P** wählen, denselben von der Standlinie **M N** aus bestimmen und hierauf von **M**, **N** und **P** aus die Aufnahme der gedachten Puncte bewirken. Hierbei ist es vortheilhaft, wenn man bei Messung der Standlinie nahe in der Mitte einen Punct **V** bemerkt, um sich desselben zur Controlirung des Hülfspunctes **P** zu bedienen (Vergl. Fig. 7).

3) I) Mitunter macht es das Terrain ganz unmöglich, die aufzunehmenden Puncte durch bloße Durchschnitte von Visirlinien zu bestimmen, z. B., wenn der Umfang **ABCDEF** (Taf. VII., Fig. 9) eines Gehölzes aufgenommen werden soll. In diesem Falle wiederholt man die erste Construction (§. 86, 1) von Punct zu Punct, d. h., man stationirt. Nachdem man nämlich eine Umfangslinie der Hülfsfigur, etwa **A F**, auf den Meßtisch aufgetragen

hat, stellt man denselben über einem Endpuncte A auf, bestimmt den Winkel BAF und trägt auf den Schenkel AB das Maß der AB, wodurch man den Punct B erhält. Nun stellt man den Meßtisch über B, bestimmt den Winkel ABC und trägt auf den Schenkel BC das Maß der BC, wodurch man wieder C erhält. Auf gleiche Weise erhält man auch D. Da man nun die Maße der Seiten DE und FE kennt, so ergiebt sich eigentlich der Punct E schon von selbst, indem man nur aus D mit DE und aus F mit FE Kreise zu beschreiben braucht, deren Durchschnitt den Punct E geben muß. Dieses wäre jedoch nur halbe Arbeit, da man auf solche Weise nicht zur Ueberzeugung gelangen kann, ob die Messung richtig ist. Vielmehr stellt man den Meßtisch noch über D auf und bestimmt den Punct E gerade so, wie die früheren. Dann hat man eine doppelte Controle für die Richtigkeit der Arbeit; da nämlich die Puncte E und F auf dem Meßtische vorhanden sind, so kann man untersuchen, ob die gemessene Länge FE wirklich zwischen die Puncte E und F hineinpaßt. Dann kann man auch den Meßtisch über E aufstellen, ihn nach ED orientiren und die Kippregel an E und F anlegen, wo dann das bei F stehende Signal vom Visirfaden genau gedeckt werden muß, wenn die Arbeit richtig ist. Dieselbe Probe kann man auch über F anstellen. — Uebrigens versteht sich von selbst, daß man jeden Winkelschenkel so lang, als möglich, ausziehen muß, weil der Meßtisch nachher nach ihm orientirt wird.

3) II) Es ereignet sich sehr häufig, daß diese Prüfungen nicht zutreffen, oder daß, wie man sagt, die Figur nicht schließt. Die Ursache hiervon liegt in der Anhäufung der unvermeidlichen Fehler, die bei der Messung, sowohl der Seiten, als auch der Winkel, begangen werden. Denn wenn, z. B., der Punct B fehlerhaft bestimmt ist, so wird es auch der Punct C, wenn auch der Winkel ABC und die Seite BC richtig gemessen werden; werden aber in diesen Stücken wiederum Fehler begangen, so muß C um so fehlerhafter werden, wenn die neuerdings begangenen Fehler mit den vorigen sich häufen. Anders ist es dagegen, wenn die Puncte von einer Standlinie aus bloß aus Durchschnitten von Visirlinien bestimmt werden; erhält man hier eine fehlerhafte Lage für den einen Punct, so werden deßhalb noch nicht

die übrigen falsch, und außerdem lassen sich Fehler durch Controliren mittelst dritter oder vierter Visirlinien leicht entdecken.

Man muß daher bei'm Stationiren die größte Vorsicht anwenden, sowohl bei der Messung und Auftragung der Seiten, als auch bei'm Abnehmen der Winkel. Man muß ferner dafür sorgen, daß die aufzunehmende Figur so wenig Seiten hat, als möglich, damit die Anhäufung von Fehlern möglichst vermieden werde. Ferner muß man auch die Seiten der Figur möglichst gleich nehmen, damit man nicht in den Fall komme, nach einer kurzen Linie orientiren und nach einer ungleich längeren visiren zu müssen, was nach §. 89, 1 auf das Gelingen der Arbeit ungünstig wirkt.

Wenn die Figur nicht schließen will, so ist es sehr mißlich, Correctionen vorzunehmen, um die Fehler zu vertheilen. Das Beste ist, daß man während der Operation in allen Stücken die größte Vorsicht beobachtet und, wenn sie nicht gelungen ist, die Fehler aufsucht und verbessert. Hat man zuletzt, der Controle halber, in **E** aufgestellt, nach **ED** orientirt und das Lineal an **E** und **F** gelegt, und trifft nun der Visirfaden nicht auf das Signal bei **F**, so visire man genau von **E** nach jenem Signale und bemerke den Durchschnitt **F'** der Visirlinie mit **AF**; ist das Stück **F' F** nur unbedeutend, so nehme man die Mitte zwischen **F** und **F'** als den richtigen Punct an.

3) III) Mitunter ist es möglich, eine Diagonale **BE** der Figur zu messen, und dann diese als Standlinie zu wählen. Man hat dann nicht nöthig, den Meßtisch so oft aufzustellen, denn in unserer als Beispiel gewählten Figur brauchte man nur den Meßtisch über **B** und **E** zu setzen, die Visirlinien **BA**, **BC**, **EF**, **ED** zu ziehen und darauf die gemessenen Linien aufzutragen, um mit einem Male die ganze Figur zu erhalten. Solche Vortheile darf man nie unbenutzt lassen, im Gegentheil muß man sie suchen, wenn sie sich nicht gleich bei'm ersten Anblicke der Sache darbieten. Selbst das bloße Aufstellen des Tisches in **B** oder **E** reicht hin, um mittels der gemessenen Seiten und der Diagonale **BE** die ganze Figur zu Stande zu bringen; denn wenn man in **B** den Meßtisch aufgestellt, nach **BE** orientirt und die Puncte **A** und **C** bestimmt hat, so kann man, da man die Maße von **CD** und **ED** kennt, den Punct **D** durch den Durchschnitt

zweier Kreisbögen bestimmen, und ebenso auch den Punct F. Doch ist es viel besser, wenn man nach der ersten Art den Meßtisch noch in E aufstellt.

Wäre die Diagonale BE nicht meßbar, könnte man aber ungehindert von B nach E sehen, so reicht schon zweimaliges Aufstellen des Tisches, in B und E nämlich, hin, um mit Hülfe ihrer Seiten die ganze Figur zu construiren. Man stelle nämlich den Meßtisch in B auf, orientire ihn nach BE und bestimme auf die bekannte Weise die Puncte A und C. Nun nehme man auf BE für E einen Punct E' da, wo man glaubt, daß der Punct E liegen werde, bringe E' über den dadurch vorgestellten Punct des Feldes, orientire nach EB und bestimme, nach dem bei D' stehenden Signale visirend, den Winkel BE'D', welcher dem Winkel BED vollkommen gleich ist. Man mache hierauf E'D' = der gemessenen ED, beschreibe aus C mit CD einen Kreisbogen von hinreichender Ausdehnung und ziehe D'D mit BE parallel, so ist der Durchschnitt D dieser Linie mit dem gedachten Kreisbogen der gesuchte Punct. Zieht man ferner DE mit D'E' parallel, so erhält man den richtigen Punct E, und auf gleiche Weise kann man auch den Punct F bestimmen.

4) Mitunter ist es vortheilhaft, eine Figur aus einem einzigen in ihrer Fläche schicklich gelegenen Standpuncte K aufzunehmen (Taf. VII., Fig. 10). Ueber K nämlich wird der Meßtisch aufgestellt und orientirt, wenn eine Orientirungslinie vorhanden und in ihr der Punct K gegeben ist. Außerdem wird man aber den Meßtisch bloß über K horizontal aufstellen und mittels der Lothgabel auf ihm den Punct suchen, welcher senkrecht über K liegt. Diesen Punct bezeichnet man durch einen Nadelstich, legt an ihn die Kippregel und visirt nach allen Winkelpuncten der Figur. Trägt man dann auf die Visirlinien KA, KB u. s. w. die Maße der Linien KA, KB u. s. w., so erhält man die Winkelpuncte A, B u. s. w. der aufzunehmenden Figur. — Mitunter wird man auch wohl den Meßtisch über einem Puncte A der Figur selbst aufstellen, von da nach allen übrigen Puncten B, C, D, E visiren und auf die Visirlinien die gemessenen Längen AB, AC, AD, AE auftragen.

5) Jeder besondere Fall einer Messung macht nach der Verschiedenheit des Terrains und anderer Localitäten

ein modificirtes Verfahren nöthig. Aber, wie auch eine Reihe von Puncten aufgenommen werden mag, so kommt doch alles auf die Bestimmung eines jeden Punctes durch ein Dreieck zurück, von dem eine Seite auf dem Meßtische schon gegeben ist, und welches entweder nach der ersten, oder nach der zweiten, seltener nach der dritten, Construction des §. 87 zu Stande gebracht wird. Eine Hauptregel ist hierbei die, daß jeder Punct, soviel als möglich, unabhängig von dem anderen bestimmt werde, d. h., daß die Bestimmung eines jeden, wo es nur irgend thunlich ist, wenigstens zum Theil unmittelbar von der Standlinie mit abhänge, und nicht bloß von Puncten, die selbst erst mittelbar bestimmt wurden, damit die Häufung der unvermeidlichen Fehler vermieden werde. Da dieses nicht in allen Fällen angeht, so sollen mittelbar bestimmte Puncte, welche zur Bestimmung neuer Puncte dienen sollen, vorzüglich genau bestimmt sein. Daß man daneben noch die Regeln des §. 89 zu beobachten habe, versteht sich von selbst. — Uebrigens muß es dem Erfindungsgeiste des Geometers überlassen bleiben, wie in jedem besonderen Falle die Messung anzustellen ist; die eigne Praxis ist hier die beste Lehrmeisterin.

§. 91.

Aufgabe. A, B und C sind drei Puncte des Feldes, deren gegenseitige Lage auf dem Meßtische irgendwoher gegeben ist; man soll die Lage eines vierten Punctes D bestimmen, ohne vorher auf einen der Puncte A, B und C den Meßtisch aufzustellen, und also ohne eine Orientirungslinie zu haben.

Auflösung. I) Wenn der Standpunct D des Meßtisches innerhalb des Dreiecks ABC sich befindet (Taf. VIII., Fig. 1).

Es seien a, b, c die den Puncten A, B, C des Feldes der Reihe nach entsprechenden Puncte des Meßtisches. Denkt man sich, der Punct d des Meßtisches sei dem D des Feldes vollkommen entsprechend, d. h., es sei das Dreieck adc ähnlich dem ADC, also auch bdc ähnlich dem BDC und adb ähnlich dem ADB; denkt man sich ferner, es sei d senkrecht über D und da in die Richtung der DA gebracht, also der Meßtisch orientirt, so muß auch db in die Richtung der DB, dc in die Richtung der DC fallen, weil nach der Voraussetzung

die Winkel adc und ADC, adb und ADB, bdc und BDC gleich sind. Bei richtiger Orientirung des Tisches muß nun auch ac mit AC, bc mit BC und ab mit AB parallel sein, wie ebenfalls aus der Aehnlichkeit der Dreiecke adc und ADC u. s. w. hervorgeht. Wenn also umgekehrt der Meßtisch so gestellt ist, daß der (noch nicht bekannte) Punct d senkrecht über D steht und da in die Richtung der DA fällt, oder ab mit AB parallel ist, so muß er richtig orientirt sein, und wenn man dann das Visirinstrument an a anlegt, nach A visirt und die Visirlinie aA zieht; wenn man ferner bei den Puncten b und c ebenso verfährt, so müssen alle drei Visirlinien in einem Puncte d sich schneiden, welcher genau dem D entspricht, d. h., welcher gegen a, b, c dieselbe Lage hat, wie D gegen A, B, C. Wenn man aber den Meßtisch so verrückt, daß zwar d senkrecht über D, aber nicht ab mit AB parallel bleibt, wenn also etwa a nach a′, b nach b′ c nach c′ versetzt wird, so werden sich die gedachten drei Visirlinien nicht in einem Puncte schneiden, sondern ein Dreieck LMN bilden, welches das Fehlerdreieck genannt wird.

Man wähle nun auf dem Meßtische einen Punct d, von dem man glaubt, daß er mit dem Puncte D des Feldes übereinstimmen werde, stelle den Meßtisch über D nach dem Augenmaße horizontal, lege an d und a ein auf die scharfe Seite gestelltes Lineal, drehe den Meßtisch so lange, bis man, über das Lineal hinvisirend, das Signal bei A erblickt, und ziehe mit Bleistift eine Visirlinie. Hierauf lege man das Lineal an den Punct b in gleicher Weise, wie vorhin, drehe es so lange um b, bis man, darüber hinvisirend, das Signal bei B erblickt, und ziehe eine zweite Visirlinie. Verfährt man eben so am dritten Puncte c, so werden die drei erhaltenen Visirlinien ein Dreieck LMN bilden, innerhelb dessen der gesuchte Punct d liegen muß. Um diesen Punct einigermaßen zu bestimmen, wähle man ihn so, daß seine senkrechten Abstände $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ von den nach A, B, C gezogenen Visirlinien sich eben so verhalten, wie die Entfernungen dieser Puncte von D, nämlich $d\alpha : d\beta : d\gamma = DA : DB : DC$, wobei man sich bloß auf das Augenmaß verläßt. Diesen so bestimmten Punct d bringt man senkrecht über D und wischt die mit Bleistift gezogenen Visirlinien wieder weg. Wäre das Fehlerdreieck

L M N nicht sehr groß, so bringe man bloß seine Mitte senkrecht über D. Hierdurch kommt der noch unbekannte wahre Punct d so genau senkrecht über D zu liegen, als zu einer genauen Meßtischmessung erfordert wird.

Nachdem man den Meßtisch genau horizontal gestellt hat, orientirt man ihn nach der Linie d a, wo d den vorhin beiläufig bestimmten Punct bedeutet. Bei diesem Orientiren ist keine große Genauigkeit erforderlich, und es kann dasselbe allenfalls nach dem Augenmaße, mit Hülfe eines Lineals, bewirkt werden, nur muß jetzt der Meßtisch genau horizontal stehen. Man legt nun das Lineal des Visirinstrumentes an a, visirt genau nach A und zieht eine Visirlinie mit einem fein zeichnenden Bleistifte so leise, als eben hinreicht, die Linie sichtbar zu machen. Eben so verfährt man bei b und c, und hierdurch erhält man wieder ein Fehlerdreieck L M N, das aber kleiner sein wird, als das vorige, und innerhalb dessen der gesuchte Punct d liegen muß. — Um seine richtige Lage zu erhalten, sucht man innerhalb des Fehlerdreiecks L M N denjenigen Punct d, dessen Abstände von den nach A, B und C gezogenen Visirlinien sich wie die Entfernungen des Punctes D von A, B und C verhalten, so nämlich, daß man diese Abstände oder Perpendikel $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ in derselben Ordnung vergleicht, wie die Entfernungen der Puncte A, B und C von D, nach denen die Visirlinien gezogen sind; mit kurzem Ausdruck, daß $d\alpha : d\beta : d\gamma = DA : DB : DC$. Dieses wird, nach Lehmann, bloß nach dem Augenmaße verrichtet. Nun legt man das Lineal genau an den so gefundenen Punct d und an a an, bringt die d a genau in die Richtung der D A und bemerkt die Lage des Lineals mit einer feinen Linie; man legt ferner das Lineal an b, visirt nach B und zieht ebenfalls eine Visirlinie. Verfährt man eben so bei c, und gehen alle drei Visirlinien in einem Puncte d zusammen, so ist dieser der gesuchte, dem D entsprechende. Erhält man aber wieder ein Fehlerdreieck, so ist dasselbe doch weit kleiner, als das vorige, und der wahre Punct d liegt wieder innerhalb desselben und wird auf gleiche Weise bestimmt, wie vorhin. Nun wird das vorige Verfahren nochmals wiederholt und man erhält immer kleinere Fehlerdreiecke, die zuletzt in einen Punct verschwinden, welcher natürlich der gesuchte sein muß. Gewöhnlich sind ein Paar Versuche

schon hinreichend, um den gesuchten Punct mit aller Schärfe zu erhalten. — Alle Linien werden, bevor der richtige Punct gefunden ist, mit Bleistift nur so lang ausgezogen, als eben nöthig ist, und sobald man sie nicht mehr braucht, sogleich wieder weggewischt, damit, wegen der vielen Linien, keine Irrungen entstehen.

Daß die obgedachte Proportion, nach welcher innerhalb des Fehlerdreiecks der gesuchte Punct bestimmt wird, richtig sei, ist sehr leicht einzusehen. Da nämlich der Punct L des Fehlerdreiecks nicht weit von D entfernt ist, so ist der Winkel A L B der nach A und B gezogenen Visirlinien von dem wahren Winkel A D B nur äußerst wenig (§. 80) und für den Meßtisch so gut als gar nicht unterschieden. Da nun außerdem die Dreiecke A V D und B V L bei V gleiche Winkel haben, so folgt, daß der Winkel D A V dem L B V gleich sein muß. Auf gleiche Weise ergiebt sich, daß auch D C M = D A V = L B V ist. Also bildet jede der drei Visirlinien mit der von D nach demselben Puncte gezogenen Geraden einerlei Winkel. Bezeichnen wir diese drei gleichen Winkel mit x, y, z, so ist $d\alpha = AD \sin x$, $d\beta = BD \sin y$, $d\gamma = CD \sin z$, daher $d\alpha : d\beta : d\gamma = AD \sin x : BD \sin y : CD \sin z$, d. h., weil $\sin x = \sin y = \sin z$ ist, $d\alpha : d\beta : d\gamma = AD : BD : CD$.

II) Wenn der vierte Punct D außerhalb des Dreiecks A B C liegt, und zwar einer Seite gegenüber. Für diesen Fall müssen wir wieder dreierlei Lagen des Punctes D unterscheiden, nämlich:

1) Wenn der Punct D auf der Peripherie des Kreises liegt, welcher um das Dreieck A B C beschrieben werden kann. In diesem Falle läßt sich aber der Punct D ganz und gar nicht bestimmen, weil die drei Visirlinien immer in einem einzigen Puncte zusammenlaufen, man mag den Tisch drehen, wie man will, jede andere Stellung des Tisches aber einen andern Durchschnittspunct giebt.

Um dieses zu zeigen, sei A B C (Taf. X. Fig. 2) das Dreieck des Feldes und a b c das ihm ähnliche des Meßtisches. Es sei ferner d der dem Puncte D entsprechende Punct des Meßtisches, und man habe d senkrecht über D gebracht, so ist klar, daß die durch a und A, b und B, c und C gezogenen Visirlinien alle drei

in dem Puncte d zusammenlaufen müssen, wenn der Meßtisch genau orientirt ist, d. h., wenn ursprünglich schon d, a und A in gerader Linie liegen, oder wenn die Seiten des Dreiecks a b c der Ordnung nach denen des Dreiecks A B C parallel sind. Liegt aber der Punct D in der Peripherie des um A, B, C beschriebenen Kreises, so gehen die durch a und A, b und B, c und C gezogenen Visirlinien immer noch in einen einzigen Punct zusammen, man mag dem Dreiecke a b c eine Lage geben, welche man will, wenn nur immer d senkrecht über D bleibt.

Man drehe die ganze Figur d a b c um den festen Punct d in die beliebige Lage d a′ b′ c′, so begreift man, daß die Winkel a′ d a und b′ d b gleich sein müssen; denn der Winkel a′ d b′ ist identisch mit a d b, und wenn zu jedem noch b′ d a hinzukommt, so folgt die Gleichheit der genannten Winkel. Eben so folgt, daß der Winkel b′ d b dem c′ d c gleich ist. Man lege durch a′ und A und durch b′ und B Visirlinien, so werden sich beide in einem Puncte d′ so schneiden, daß der Winkel A d′ B dem A d B gleich wird, und folglich auch d′ in der Peripherie des um A B C beschriebenen Kreises liegt. Denn betrachten wir die Dreiecke b′ B d und a′ A d, so ist der Winkel b′ d B = a′ d A. Da aber a b mit A B parallel ist, so ist:

$$db : da = dB : dA;$$

aber $db = db'$ und $da = da'$, folglich

$$db' : da' = dB : dA,$$

oder $dB : db' = dA : da'$.

Also werden in den Dreiecken B b′ d und A a′ d die gleichen Winkel bei d von proportionirten Seiten eingeschlossen; die Dreiecke sind folglich ähnlich, und daher auch die Winkel d′ A d und d′ B d gleich. — Da nun außerdem die Dreiecke A G d′ und B G d bei G gleiche Winkel haben, so müssen auch die Winkel A d′ B und A d B gleich sein.

Ziehen wir nun auch durch c′ und C eine Visirlinie, so folgt durch Vergleichung der ähnlichen Dreiecke d b′ B und d c′ C, und hernach der Dreiecke d′ B H und d C H wieder eben so, daß auch der Winkel B d′ C dem B d C gleich sein muß, und daß folglich auch der Durchschnitt der B d′ mit C d′ in dem Umfange des um A, B, C beschriebenen Kreises liegt.

Da demnach die Durchschnitte aller drei Visirlinien A d′, B d′ und C d′ in der Peripherie des gedachten Kreises liegen, so können diese Visirlinien sich nur in einem einzigen Punct, d′ schneiden. Mithin entscheidet hier das Zusammenlaufen aller drei Visirlinien nicht über die richtige Orientirung des Tisches, und daher auch nicht über die richtige Lage von D.

Die Sache wird auch aus folgender Ueberlegung klar. Die Lage des Punctes D hängt von den beiden Winkeln A D B und B D C ab, unter welchen die Seiten AB und BC von D aus gesehen werden. Aber diese Seiten werden in jedem Puncte der Peripherie des um A B C beschriebenen Kreises unter gleichen Winkeln gesehen, da die Winkel in demselben Kreisabschnitte einander gleich sind. Die Größe der gedachten Winkel entscheidet also nur darüber, daß man in der Peripherie des gedachten Kreises steht, nicht aber, in welchem Puncte der Peripherie.

2) Wenn der vierte Punct D innerhalb des um das Dreieck A B C beschriebenen Kreises liegt (Taf. IX. Fig. 1). In diesem Falle wird ebenso, wie vorhin, verfahren, nur darf man jetzt den richtigen Punct d nicht innerhalb des Fehlerdreiecks L M N suchen, sondern es fällt derselbe immer auf diejenige Seite der mittleren Visirlinie B L, auf welcher das Fehlerdreieck nicht liegt. Hier müssen sich also die Abstände d α, d β, d γ des Punctes d von den drei Visirlinien, wie die Entfernungen D A, DB, DC verhalten.

3) Wenn der vierte Punct D außerhalb des um das Dreieck A B C beschriebenen Kreises liegt (Taf. IX. Fig. 3). Hier fällt der wahre Punct d mit dem Fehlerdreiecke L M N auf dieselbe Seite der mittleren Visirlinie B N, und das Verhältniß seiner Abstände von den drei Visirlinien ist eben so zu wählen, wie vorhin.

III) Wenn der vierte Punct D außerhalb des Dreiecks A B C liegt, und zwar einem Winkel B gegenüber (Taf. VIII. Fig. 2). Man sagt, daß der Punct D dann dem Winkel B gegenüber liege, wenn die Linie D B außerhalb des Dreiecks A B C fällt und zugleich unter den drei von D nach A, B und C gezogenen Linien die mittlere ist. Die Auflösung ist so, wie in allen vorigen Fällen; der wahre Punct d aber und das Feh-

lerdreieck L M N liegen auf entgegengesetzten Seiten der mittleren Visirlinie B N.

Uebrigens bemerken wir noch, daß in den Figuren 1 und 2 (Taf. VIII.) und 1 und 3 (Taf. IX.) die analogen Puncte immer mit einerlei Buchstaben bezeichnet sind, wodurch die Construction der übrigen von selbst verständlich wird, wenn eine von ihnen erklärt ist.

IV) Wenn endlich die drei Puncte A, B und C in einer geraden Linie liegen. so ist die Auflösung ganz so, wie in II., 2; der wahre Punct d liegt nämlich auch hier immer auf derjenigen Seite der mittleren Visirlinie, wo das Fehlerdreieck nicht liegt.

Zusatz 1. Die hier gegebene Auflösung unseres Problemes gründet sich auf ein methodisches Probiren, so lange, bis man seinen Zweck vollkommen erreicht hat; man hat aber auch Constructionen angegeben, durch welche bloß aus den gemessenen Winkeln A D B und B D C (Taf. IX. Fig. 1) der Punct D mit völliger geometrischer Schärfe, d. h. theoretisch richtig, bestimmt werden kann; doch stehen alle diese Constructionen der vorigen Methode an practischer Brauchbarkeit weit nach, daher wir uns nicht weiter dabei aufhalten. — Indessen möchte es, besonders für ungeübte Anfänger, etwas schwierig sein, den Punct d nach dem richtigen Verhältnisse seiner Abstände von den drei Visirlinien bloß mit Hülfe des Augenmaßes zu bestimmen; daher wir noch folgende Auflösung erläutern wollen.

Nachdem man das erste Visirliniendreieck M N L erhalten hat (Taf. IX., Fig. 1), weiß man aus dem Vorherigen sogleich, nach welcher Richtung man den Tisch drehen muß, um ihn richtig zu orientiren. Man drehe ihn also, aber so lange, bis man ein entgegengesetzt liegendes Fehlerdreieck L′M′N′ erhalten hat, so nämlich, daß der wahre Punct d zwischen die beiden mittleren Visirlinien L B und L′B zu liegen kommt. Verbindet man nun immer die Scheitel zweier solcher Winkel beider Fehlerdreiecke, deren Schenkel durch einerlei Seite des Dreiecks ABC gehen, d. h., zieht man die Linien LL′, MM′, NN′, so durchschneiden sich alle drei in dem gesuchten Puncte d. — Die Auflösung ist in allen Fällen anwendbar, auch selbst dann, wenn beide Fehlerdreiecke nicht entgegengesetzt liegen, nur müßten dann die drei besagten Linien bis zu ihrem Durchschnitte verlängert werden,

was freilich nicht immer gehörig scharfe Resultate giebt. Laufen alle drei Linien (**L L′, M M′, N N′**) in demselben Puncte zusammen, so kann man versichert sein, daß kein Fehler vorgefallen ist, und aus ihrem mehr oder weniger scharfen oder bestimmten Durchschnitte läßt sich der Grad der Genauigkeit in der Bestimmung des Punctes **d** beurtheilen. Natürlich wird man, nachdem der Punct **d** sich ergeben hat, den Meßtisch nach der längsten Linie **D B** orientiren und sich überzeugen, ob die durch **a** und **A**, **b** und **B**, **c** und **C** gezogenen Visirlinien ebenfalls auch in dem Puncte **d** zusammenlaufen.

Denn da die Winkel **A L B**, **A d B** und **A L′ B** so gut als gleich sind (§. 80) und ihre Schenkel auf derselben Linie **A B** stehen, so liegen die drei Puncte **L**, **d** und **L′** in der Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser aber, wegen der Größe der Sehne **A B**, ungemein groß sein muß, so daß man den durch **L**, **d** und **L′** gehenden Bogen als eine gerade Linie ansehen kann. Eben so folgt, daß auch **d** mit **M** und **M′** in gerader Linie liegt, und daß folglich der gesuchte Punct **d** durch den Durchschnitt der Linien **L L′** und **M M′** bestimmt ist. Man kann aber diesen Durchschnitt noch durch die Linie **N N′** controliren, weil **d** mit **N** und **N′** ebenfalls in gerader Linie liegen muß.

Zusatz 2. Es ist nun noch zu untersuchen übrig, was man bei der Wahl des Punctes **D** zu beobachten habe, damit derselbe mit der erforderlichen Genauigkeit bestimmt werde. Hierüber bemerken wir nun Folgendes:

1) Man muß den Punct **D** so wählen, daß er wenigstens mit zweien von den Puncten **A B C** ein vortheilhaftes Dreieck bildet, wenigstens sollen zwei Visirlinien sich nicht spitzer oder stumpfer, als unter 45° schneiden.

2) Außerdem muß man Sorge dafür tragen, daß der Punct **D** der Peripherie des durch **A**, **B**, **C** gehenden Kreises nicht zu nahe liege; denn da im Umfange selbst, bei jeder Stellung des Meßtisches, das Fehlerdreieck verschwindet, so läßt sich übersehen, daß es nahe am Umfange sehr klein werden und einem Puncte gleichen wird, obschon der Meßtisch bedeutend von der wahren Orientirung abweicht. Man würde daher, wenn man diesen

scheinbaren Punct für den gesuchten d annehmen wollte, bedeutend irren.

Um dieses zur deutlichen Anschauung zu bringen, wollen wir folgende Rechnung führen. Da nach dem Vorigen die Puncte A, B, d, L (Taf. IX, Fig. 1) im Kreise liegen, so ist auch Winkel BLd $=$ BAD $= \varphi$. Da ferner auch die Puncte B, C, d und N in der Peripherie eines Kreises liegen, so ist BNd $+$ dCB $= 180^0$ $=$ BNd $+$ LNd, folglich LNd $=$ BCd $= \psi$. Berechnen wir nun im Dreieck NLd aus der Seite LN, die durch die mittlere Visirlinie gebildet wird, die Seiten Ld und Nd, so haben wir nach den bekannten Formeln der Trigonometrie

$$Ld = \frac{\sin \psi}{\sin(\varphi + \psi)} \cdot LN \text{ und } Nd = \frac{\sin \varphi}{\sin(\varphi + \psi)} \cdot LN,$$

$$\text{und hieraus } LN = \frac{Ld \cdot \sin(\varphi + \psi)}{\sin \psi} = \frac{Nd \cdot \sin(\varphi + \psi)}{\sin \varphi}.$$

Es ist nun klar, daß der Punct d sich nur dann mit gehöriger Sicherheit bestimmen läßt, wenn eine irrige Lage desselben noch durch ein hinreichend großes Fehlerdreieck angezeigt wird. Liegt aber D in der Peripherie des durch A, B, C gehenden Kreises, so ist BAD $+$ BCD $= \varphi + \psi = 180^0$ und $\sin(\varphi + \psi) = 0$. Deßhalb wird auch LN $= 0$, d. h., das Fehlerdreieck verschwindet, wie groß auch die Abstände Ld und Nd sein mögen. Liegt aber D der Peripherie des gedachten Kreises nahe, so ist $\varphi + \psi$ nahe $= 0$ und $\frac{\sin(\varphi + \psi)}{\sin \psi}$ oder $\frac{\sin(\varphi + \psi)}{\sin \varphi}$ werden kleine Brüche sein; es wird also LN auch nur ein kleiner Theil von Ld oder Nd sein, der leicht unmerklich werden kann, wenn Ld und Nd auch noch merkliche Größen sind. Es sei, z. B., $\varphi + \psi = 176^0$ und $\varphi = \psi = 88^0$, so wird $\sin(\varphi + \psi) = \sin(180^0 - 4^0) = \sin 4^0$, und LN $= 0{,}0698 \times$ Ld. Wäre also Ld $= \frac{1}{2}$ Linie, mithin die Lage von d noch merklich unrichtig, so würde LN doch nur 0,0349, oder etwa $\frac{1}{26}$ Linie betragen und daher von einem Puncte auf dem Meßtische kaum zu unterscheiden sein. Mithin wäre auch das Fehlerdreieck in einen Punct verschwunden und folglich kein Mittel mehr vorhanden, die Lage von d zu corrigiren.

3) Wenn also aus dem Fehlerdreieck die wahre Lage des Punctes d sich mit Sicherheit bestimmen lassen soll, so muß auch ein kleiner Fehler in der Lage von d durch ein hinreichend großes Fehlerdreieck angezeigt werden. Dieses findet nun Statt:

A) Wenn der Standpunct D innerhalb des Dreiecks ABC liegt (Taf. VIII., Fig. 1).

B) Wenn der Standpunct D außerhalb des Dreiecks ABC einem Winkel gegenüberliegt (Taf. VIII., Fig. 2). Am bequemsten ist es, wenn der Winkel B, dem man gegenübersteht, sehr stumpf ist.

C) Wenn die drei Puncte A, B, C in gerader Linie liegen.

D) Wenn der Punct D innerhalb des durch A, B, C gehenden Kreises liegt (Taf. IX., Fig. 1), so darf er nicht nahe an der Peripherie dieses Kreises liegen, sondern muß vielmehr in die Nähe des Mittelpunctes fallen, wo die Bestimmung am sichersten, wenigstens am bequemsten ist. Eine solche Lage von D wird man dann wählen, wenn der Mittelpunct des gedachten Kreises außer dem Dreiecke ABC liegt.

E) Wenn endlich D außerhalb des Dreiecks ABC einer Seite AB gegenüber (Taf. IX., Fig. 3) und auch außerhalb des um A, B, C beschriebenen Kreises liegt, so muß auch hier der Punct D so weit von diesem Kreise abstehen, als möglich. Man wird eine solche Lage von D am liebsten dann wählen, wenn der Mittelpunct des Kreises noch innerhalb des Dreiecks ABC liegt, und wenn die Seite, welcher man gegenüber zu stehen kommt, mit D ein nicht unvortheilhaftes Dreieck bildet.

Neben allen diesen Regeln, welche sich sämmtlich leicht aus der Betrachtung des Fehlerdreiecks ergeben, darf aber die unter Nro. 1 aufgestellte nicht übersehen werden.

Zusatz 3. Von dieser theoretisch interessanten Aufgabe macht man meistens nur dann Gebrauch, wenn die drei gegebenen Puncte so beschaffen sind, daß man den Meßtisch nicht darüber aufstellen kann, wie dieses, z. B., bei großen Vermessungen der Fall sein kann, wenn an trigonometrische Netzpuncte ein s. g. graphisches Netz durch Aufnahme mit dem Meßtische angeschlossen werden soll. Sie kann aber auch bei Netzlegung über einzelne Flurmarken, wo man meistentheils über jedem Puncte

den Meßtisch aufstellen kann, mit Vortheil angewendet werden, wie im nächsten Capitel gezeigt wird. —

Eine wichtige Bemerkung ergiebt sich aus den bisherigen Untersuchungen in Bezug auf die Bestimmung eines Punctes nach der dritten Methode des §. 86 durch Rückwärtseinschneiden, welche, wenn man den zu bestimmenden Punct durch den Durchschnitt zweier Visirlinien erhalten hat und ihn durch eine dritte Visirlinie controlirt, von der Aufgabe des gegenwärtigen §. sich nur dadurch unterscheidet, daß der Meßtisch gleich Anfangs nach der, durch den gesuchten Punct schon gezogenen Visirlinie richtig orientirt wird, wodurch natürlich dieser Punct auch sogleich richtig gefunden wird. Dennoch kann es kommen, daß, weil die Orientirung des Meßtisches nicht genau ist, die drei Visirlinien ein kleines Fehlerdreieck bilden. Hier meinen nun Unkundige, daß sie der Sache genügen, wenn sie mitten in dieses Fehlerdreieck hineinstechen; allein man begreift, daß auf diese Weise der Fehler nur noch ärger werden kann, da der richtige Punct nicht immer im Fehlerdreiecke liegt. Nach den bisher angegebenen Regeln kann man aber aus dem Fehlerdreiecke den wahren Punct leicht finden.

§. 92.

Aufgabe. **AB** (Taf. X., Fig. 1) sei eine Linie im Felde und **a b** die ihr gleichnamige des Meßtisches; man soll die Lage irgend eines dritten Punctes **C** gegen die Standlinie **AB** finden, ohne den Meßtisch über AB aufzustellen und ohne von **C** aus eine Orientirungslinie nach irgend einem schon bekannten Puncte zu haben.

Auflösung. Den Punct **C** wähle man so, daß er mit der Standlinie ein nicht zu unvortheilhaftes Dreieck bildet; man muß hierbei zufrieden sein, daß der Winkel **ACB** nicht zu spitz wird, denn die Auflösung unserer Aufgabe macht es nothwendig, daß der Unterschied der Seiten **CA** und **CB** sehr groß ausfalle. Auf dem Meßtische bezeichne man nach dem Augenmaße die Stelle, wo der Punct **C** ungefähr liegen wird, bringe diese Stelle über **C** und richte den Meßtisch so, daß **a b** mit **AB** parallel wird, so genau, als eben nach dem Augenmaße möglich ist. Außer **C** wähle man noch einen vierten

Punct D in möglich größter Entfernung von C, doch so, daß der Winkel ADB nicht zu spitz wird.

Nachdem man den Meßtisch auf die vorhin bezeichnete Weise gestellt hat, legt man das Lineal an a, visirt nach A und zieht eine Visirlinie, und ebenso verfährt man bei b. Hierdurch erhält man auf dem Meßtische den Winkel acb, welcher von dem Winkel ACB des Feldes nur wenig verschieden sein kann, da c von C nur wenig absteht. Man legt endlich noch das Lineal an c, visirt nach D und zieht eine Visirlinie über den ganzen Meßtisch weg.

Nun begiebt man sich auf den Punct D, bestimmt nach dem Augenmaße in der Linie cd des Meßtisches die Stelle, wo der Punct d ungefähr hinfallen wird, bringt diese Stelle senkrecht über D und orientirt den Meßtisch nach der Linie dc, daß also dc in die Richtung der DC zu liegen kommt. Man lege das Lineal an a, visire nach A und ziehe eine Visirlinie, so erhält man den Durchschnittspunct d, und das Dreieck acd wird dem ACD ähnlich, weil beide den Winkel z gemein haben und die Winkel bei c und C, nämlich $x' + y'$ und $x + y$, identisch sind. Legt man nun das Lineal an d, visirt nach B und zieht eine Visirlinie, so erhält man das Dreieck cdm, welches dem CDB ähnlich ist, indem beide den Winkel cdm gemein haben und die Winkel x' und x identisch sind. Man hat also

$$da : DA = cd : CD,$$
$$dm : DB = cd : CD,$$
daher $$da : DA = dm : DB,$$

also die Dreiecke adm und ADB, da sie außerdem den Winkel adm gemein haben, ähnlich, und daher am mit AB parallel.

Man lege daher das Lineal an die Puncte a und m und bemerke nach der einen oder anderen Seite hin einen entfernten Gegenstand M, welcher vom Visirfaden genau gedeckt wird. Man lege sodann das Lineal an a und b und drehe den Meßtisch mittelst der Micrometerschraube so lange, bis man den Gegenstand M wieder vom Visirfaden gedeckt sieht. Dann liegt ab mit AB parallel, und der Meßtisch ist folglich nach AB orientirt. Schneidet man sich nun mittelst der Puncte a und A, b und B rückwärts ein, so ist der Durchschnitt d' der Visirlinien dem Puncte D des Feldes gleichnamig.

Noch ehe man die Tischplatte um den Abweichungswinkel bam wendet, lege man das Lineal an a und c und bemerke nach der einen oder der anderen Seite hin einen entfernten Punct N, welcher vom Visirfaden genau gedeckt wird. Legt man dann, nachdem man die Tischplatte gedreht hat, das Lineal an a, visirt nach N und zieht eine Visirlinie, so liegt in dieser der Punct c', der dem C entspricht. Diesen kann man dadurch bestimmen, daß man das Lineal an d' legt und nach C visirt.

Nun wird man noch den Meßtisch über C aufstellen, ihn nach der Linie CD orientiren und den Punct c' durch die Puncte A und B controliren; ergeben sich Fehler, so muß man das Verfahren von Neuem wiederholen.

Von dieser Aufgabe wird man jedoch nur dann Gebrauch machen dürfen, wenn kein anderes vollkommneres Mittel zu Gebote steht.

Anmerkung. Bei allen Aufgaben der Art, wo der Meßtisch aufzustellen ist, ohne daß man eine Orientirungslinie hat, kann man der Boussole sich bedienen, um wenigstens den Meßtisch näherungsweise zu orientiren, vorausgesetzt, daß man vorher schon bei genauer Orientirung der Tischplatte, also in richtiger Lage gegen die AB, die Richtung der magnetischen Mittagslinie SN darauf verzeichnet hat. Gesetzt nun, man habe den Meßtisch über C gebracht und setze das Gehäus der Boussole wieder ebenso an die Linie SN, wie sie daran lag, als man diese Linie zog; man drehe dann das Tischblatt so lange, bis die Magnetnadel genau auf den Nordpunct einspielt, so muß ab mit AB parallel sein, daß also der Tisch orientirt ist. Denn die durch nicht gar zu weit entfernte Puncte gezogenen magnetischen Mittagslinien können als parallel angesehen werden, und mithin sind auch alle Linien parallel, die, wie ab und AB, gegen die Richtung der Magnetnadel gleiche Neigung haben. Wegen der Unvollkommenheit, besonders kleinerer Boussolen, und der Veränderlichkeit der Richtung der Magnetnadel hat aber diese Art, den Meßtisch zu orientiren, bei weitem nicht die erforderliche Schärfe; es dürfen also auch keine Messungen darauf gegründet werden, wenn nicht irgendwo anders her sichere Prüfungen möglich sind.

§. 93.

Aufgabe. Eine Entfernung zu messen, bei welcher man nicht von einem Endpuncte zum andern kommen kann.

Auflösung. In Form dieser Aufgabe wird der Gebrauch des Meßtisches in den meisten Lehrbüchern der practischen Geometrie erläutert. Es ist klar, daß die Auflösung in dem bisher Vorgetragenen vollständig enthalten ist; denn wenn ein Dreieck, nach §. 86, 1, aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel bestimmt wird, so ist die dritte Seite eine solche Entfernung. Wird ein Dreieck durch eine Standlinie und die daran liegenden Winkel bestimmt, so sind die beiden anderen Seiten als solche Entfernungen anzusehen. Wenn endlich Puncte von einer Standlinie aus durch bloße Durchschnitte von Visirlinien bestimmt werden, so kann man ihre gegenseitigen Abstände ebenfalls als unzugängliche Entfernung betrachten. Hieraus ist aber die Auflösung der Aufgabe mit allen ihren Modificationen unmittelbar klar.

§. 94.

Aufgabe. Zwischen A und B (Taf. VIII., Fig. 1a) befindet sich ein Wald, welcher nicht gestattet, von A nach B zu sehen; es soll aber von A nach B ein Weg gerade durch gehauen werden, und man verlangt daher die Richtung zu wissen, in welcher man von A aus einzuschlagen hat.

Auflösung. Man stecke eine Figur ABCD ab, von welcher A und B Winkelpuncte sind, und die sich so leicht, als möglich, aber doch mit großer Genauigkeit, entwerfen läßt. Die Beschaffenheit des Terrains macht für diese Aufgabe in jedem besonderen Falle ein besonderes Verfahren nöthig. Nachdem man die Figur ABDC auf dem Meßtische entworfen hat, stellt man diesen über A auf, orientirt ihn nach der Linie ac und legt das Lineal an a und b, so giebt dieses die Richtungslinie an, auf welcher man so weit von A, als möglich, Stäbe einstecken muß, um die Richtung nicht wieder zu verlieren.

Wir erwähnen diese Aufgabe nur, damit man sehe, wie man in ähnlichen Fällen zu verfahren hat.

Sechstes Capitel.

Von der Aufnahme einer Flurmark mittelst des Meßtisches.

§. 95.

Wir haben im ersten Capitel im Allgemeinen erklärt, wie an die trigonometrisch bestimmten Netzpuncte eine Vermessung des Details geschlossen werden kann. Diese Detailmessung, für welche der Meßtisch und die Meßkette, in Verbindung mit dem Winkelspiegel, die geeignetsten Werkzeuge sind, hat nach dem bisher Vorgetragenen keine Schwierigkeit; man wählt irgend einen Theil des zu messenden Landes, z. B. eine Lage von Grundstücken, veranstaltet die zur Bestimmung aller Puncte nöthigen Messungen mit der Kette, unter Zuziehung des Winkelspiegels und Ruthenstabes, und bestimmt, von den gegebenen Puncten des trigonometrischen oder graphischen Netzes ausgehend, die Anhaltepuncte der Kettenmessung mittelst des Meßtisches durch Schnitte von Visionslinien, oder durch Stationiren. Hierdurch wird nicht nur die gemessene und aufgezeichnete Partie ihrem Urbilde vollkommen ähnlich, sondern sie bekommt auch ihre richtige Lage gegen die Netzpuncte und folglich gegen alle übrigen Theile des ganzen der Messung unterworfenen Landes.

Man begreift hiernach, daß über Detailmessungen nur noch wenig zu sagen sein wird, da das Meiste hierüber schon in Cap. 4 und 5 vorgetragen ist. Wir wollen indessen hier etwas umständlicher über den Gang sprechen, den man bei der Vermessung einer Flurmark zu nehmen hat, und zwar unabhängig von aller vorhergegangenen trigonometrischen oder graphischen Netzaufnahme, weil hierbei das Geschick des Detailgeometers, der nicht bloß die Aufnahme der auf jede Meßtischplatte fallenden Gegenstände zu bewirken, sondern auch für die richtige Verbindung der erforderlichen Platten durch ein graphisches Netz selbst zu sorgen hat, schon mehr in Anspruch genommen wird.

§. 96.

Der Geometer hat zuerst die Localität der Flurmark und ihren Umfang genau auszukundschaften. Hierdurch lernt er die schicklichste Stelle zur Messung einer Standlinie kennen, die er auf horizontalem, festem und freiem Boden am liebsten in der Mitte der Flur legen und so lang, als möglich, etwa 3000 Fuß und darüber, auf keinen Fall aber unter 1500 Fuß, nehmen wird. Jedesfalls richtet sich die Größe der Standlinie nach der Größe der aufzunehmenden Flur. Diese Standlinie muß er mittelst seiner wohlberichtigten Kette wenigstens zweimal messen und, wenn die Resultate der wiederholten Messungen verschieden sein sollten, aus allen das Mittel nehmen. Hierbei ist es gut, wenn er beiläufig die Mitte der Standlinie durch ein Signal bezeichnet und während der Messung seine Abstände von den Endpuncten bestimmt. Dieses Signal, das vorläufig nur aus einem Pfahle, mit einer dabei gesteckten Meßfahne, besteht, nachmals aber durch eine Stange ersetzt werden kann, darf nicht mit bloßem Auge in die Standlinie einvisirt werden, sondern man muß sich hierzu des Fernrohres in der Weise bedienen, wie wir in §. 77, Anmerk. 3, angedeutet haben. Dasselbe gilt auch von den auf Zwischenpuncten der Standlinie in der Absicht aufgesteckten Meßfahnen, um darnach die Kettenstäbe in die Linie einzuvisiren, da das Einrichten derselben nach den so weit entlegenen Signalen an den Endpuncten der Standlinie für das bloße Auge zu beschwerlich sein würde. — Auch wird es für die Detailvermessung nicht ohne Nutzen sein, wenn der Geometer in bestimmten Abständen, etwa von 400 Fußen, Pfähle in die Standlinie einschlagen läßt.

Gestattet es die Localität nicht, eine Standlinie von solcher Länge zu messen, die der Größe der Flur angemessen ist, so muß man eine gebrochene Linie **ABC** substituiren (Taf. **VIII**., Fig. 2), die jedoch nie aus mehr als zwei Theilen bestehen darf, und deren Brechungswinkel **ABC** so stumpf, als möglich, sein muß, weil hierdurch, nach §. 87, nicht nur der Fehler der dritten Seite **AC**, sofern er durch einen Fehler des Winkels **B** erzeugt wird, größtentheils verschwindet, sondern auch sie selbst die größte Länge erhält. Der Winkel **ABC** wird mit dem Meßtische aufgenommen, und dann trägt man auf seine Schenkel

die Maße der Linien BA und BC, die einander nahe gleich und so groß sein müssen, daß AC die zu einer Standlinie erforderliche Länge erhält.

§. 97.

Um unserem Vortrage eine bestimmte Beziehung geben zu können, wollen wir die Catastralvermessung des Großherzogthums S. Weimar als Beispiel anführen. Die Fluren werden hier nach dem 2000theiligen Maßstabe vermessen, und da die Weimarische Ruthe genau 2000 Pariser Linien hält, so ist die verjüngte Ruthe einer Pariser Linie gleich. Auf jedes Meßtischblatt werden mittelst einer dazu vorgerichteten Chablone die vier Eckpuncte eines Quadrates gedrückt, welches nach dem 2000theiligen Maßstabe genau 400 Weimarische Acker, also 56000 Quadratruthen Fläche enthält, den Acker zu 140 Quadratruthen gerechnet. Die Seite dieses Quadrates hat folglich $\sqrt{56000} = 236,643$ Par. Linien, und die Diagonale $\sqrt{2 \times 56000} = 334,664$ Par. Linien, aus welchen beiden Dimensionen man auch das Quadrat mittelst eines guten Stangenzirkels und eines hinreichend langen Transversalmaßstabes construiren kann. Zuerst wird quer über die Platte die Diagonale aufgetragen, und dann bestimmt man die beiden andern Endpuncte durch Schnitte von Kreisbögen, die aus den Endpuncten der Diagonale mit den Seiten des Quadrates beschrieben werden. Die Richtigkeit eines Quadrates prüft sich durch die Gleichheit der vier Seiten und der beiden Diagonalen. — Die Flur wird demnach durch die Messung in Vierecke von 400 Acker getheilt, deren Verbindung durch ein Dreiecksnetz bewirkt wird.

§. 98.

1) Das nächste Geschäft ist also die Anordnung des Dreiecksnetzes, dessen Puncte durch abgeschälte, oben mit Strohbunden versehene Stangen junger Fichten bezeichnet werden. Haben diese Stämme keine blendende Weiße mehr, so streicht man sie mit Kalk an. Man benutzt auch gern schon vorhandene unwandelbare Gegenstände als Netzpuncte, besonders wenn sie, wie, z. B., eine Kirchthurmspitze, in allen Theilen der Flur sichtbar sind, wo sie dann sehr wesentlich die Netzaufnahme erleichtern und ihre Richtigkeit fördern.

Bei der Anlage eines Netzes hat man auf folgende zwei Bedingungen hauptsächlich zu achten: 1) daß es sich mit Leichtigkeit und Sicherheit aufnehmen läßt, und 2) daß es bequeme Anhaltepuncte für die Detailmessung abgiebt. In Bezug darauf wollen wir Folgendes bemerken:

2) Die Standlinie AB (Taf. VIII., Fig. 4) muß so lang genommen werden, daß auf ihr ein nahe gleichseitiges Dreieck ABF construirt werden kann, womit man über einen sehr großen Theil der Flur wegkommt. Liegt sie nahe in der Mitte der Flur, so wird man auch auf ihrer andern Seite ein ähnliches Dreieck ABD construiren. Man wird deßhalb bei der Wahl der Standlinie darauf bedacht sein müssen, daß man von ihr aus bis in sehr entfernte Stellen der Flur dringen kann, und aus diesem Grunde wird man sie oft außer der Mitte der Flur, ja oft in einer benachbarten Flur legen müssen. An das Dreieck ABF wird man ein anderes von ohngefähr gleicher Größe BFG setzen, wenn die Größe der Flur es erheischen sollte.

Die genaue Bestimmung dieser Dreieckspuncte, welche gleichsam die Grundlage der ganzen Netzaufnahme ausmachen, muß nun die erste Sorge sein. Man kann hierbei etwa auf folgende Weise verfahren: Nachdem man die Standlinie AB im geeigneten Maßstabe aufgetragen hat, stellt man den Meßtisch über A auf und visirt nach F und G, und ebenso verfährt man über B, wodurch der Punct F ziemlich sicher, G aber nur unsicher bestimmt wird. Man stellt hierauf den Meßtisch über G, orientirt ihn nach GA und controlirt die Orientirung durch die Linie GB, woraus sich sogleich ergiebt, ob der Winkel bei G richtig ist. Nun lege man das Lineal an den Durchschnitt bei F und visire nach dem Signale, womit dieser Punct auf dem Felde bezeichnet ist. Geht die Visirlinie auch genau durch den Durchschnitt bei G, so sind beide Puncte richtig bestimmt, weil jeder als Winkelpunct eines vortheilhaften Dreiecks erscheint und außerdem durch eine dritte Visirlinie controlirt ist. Man kann nun die Puncte F und G durch Nadelstiche bezeichnen und von ihnen aus so viele Puncte anvisiren, als man will.

Einem Anfänger wird diese Operation nicht leicht bei'm ersten Male glücken, weil er Fehler der Orientirung und Horizontalstellung des Meßtisches oder Unebenheiten der Platte zu bemerken und zu vermeiden noch nicht Er-

fahrung genug hat. Deßhalb wird er wohlthun, wenn er, ohne um andere Netzpuncte sich zu bekümmern, zuerst die Hauptpuncte F und G zu bestimmen sucht, damit er nicht so viele Visirlinien ziehe, die er nachher nicht brauchen kann. Er wird am schicklichsten die Visirlinien anfangs nicht mit der Nadelspitze, sondern mit einem harten und guten Bleistifte so leise und fein, als möglich, ziehen, damit er dieselben, wenn die Arbeit nicht gelingen sollte, wieder auslöschen könne und nicht genöthigt sei, das Blatt gar wegzuwerfen.

Nicht immer wird die Aufnahme der Puncte F und G in der hier beschriebenen Weise geschehen können; aber man hat doch noch viele andere Mittel, um zu seinem Zwecke zu gelangen. Kann man, z. B., den Punct F von den drei Puncten A, C, B der Standlinie, den Punct G aber nur von B aus sehen, so würde man folgendermaßen verfahren. Man stelle den Meßtisch über A und ziehe eine Visirlinie nach F. Sodann bringe man den Meßtisch über F, bestimme diesen Punct von B aus durch Rückwärtseinschneiden und controlire ihn durch den Punct C. Gehen die drei Visirlinien nicht zusammen, so kann man den richtigen Punct leicht nach §. 91 und zwar sehr sicher finden, wenn der Winkel A F B nicht unter 60° ist. Ist F gut bestimmt, so ziehe man eine Visirlinie nach G, stelle sodann den Meßtisch über G auf und bestimme diesen Punct durch Rückwärtseinschneiden mittelst des Punctes B. Es fehlt dann nur noch eine Controle für G, und um diese zu erhalten, wird man vorher, ehe man den Meßtisch über F und G aufstellt, von der Standlinie aus einen Punct I oder U bestimmen, den man zugleich auch in G sehen kann.

Wenn man wohl von A nach F und von B nach G, nicht aber von A nach G und von B nach F sehen könnte, so wird man ebenfalls die nöthige Verbindung durch einen oder zwei Puncte herstellen, die von der Standlinie aus sich gut bestimmen lassen, und die man zugleich in F und G sehen kann. Man wird aber keinesweges über U und I den Meßtisch aufstellen, sondern diese Puncte nur dazu benutzen, um F und G durch Rückwärtseinschneiten zu bestimmen oder zu controliren.

Man begreift hieraus die Wichtigkeit solcher Puncte, die, wie größtentheils die Kirchthürme, aus allen Theilen der Flur sichtbar sind. Denn sie geben nicht nur für die

Bei der Anlage eines Netzes hat man auf folgende zwei Bedingungen hauptsächlich zu achten: 1) daß es sich mit Leichtigkeit und Sicherheit aufnehmen läßt, und 2) daß es bequeme Anhaltepuncte für die Detailmessung abgiebt. In Bezug darauf wollen wir Folgendes bemerken:

2) Die Standlinie AB (Taf. VIII., Fig. 4) muß so lang genommen werden, daß auf ihr ein nahe gleichseitiges Dreieck ABF construirt werden kann, womit man über einen sehr großen Theil der Flur wegkommt. Liegt sie nahe in der Mitte der Flur, so wird man auch auf ihrer andern Seite ein ähnliches Dreieck ABD construiren. Man wird deßhalb bei der Wahl der Standlinie darauf bedacht sein müssen, daß man von ihr aus bis in sehr entfernte Stellen der Flur dringen kann, und aus diesem Grunde wird man sie oft außer der Mitte der Flur, ja oft in einer benachbarten Flur legen müssen. An das Dreieck ABF wird man ein anderes von ohngefähr gleicher Größe BFG setzen, wenn die Größe der Flur es erheischen sollte.

Die genaue Bestimmung dieser Dreieckspuncte, welche gleichsam die Grundlage der ganzen Netzaufnahme ausmachen, muß nun die erste Sorge sein. Man kann hierbei etwa auf folgende Weise verfahren: Nachdem man die Standlinie AB im geeigneten Maßstabe aufgetragen hat, stellt man den Meßtisch über A auf und visirt nach F und G, und ebenso verfährt man über B, wodurch der Punct F ziemlich sicher, G aber nur unsicher bestimmt wird. Man stellt hierauf den Meßtisch über G, orientirt ihn nach GA und controlirt die Orientirung durch die Linie GB, woraus sich sogleich ergiebt, ob der Winkel bei G richtig ist. Nun lege man das Lineal an den Durchschnitt bei F und visire nach dem Signale, womit dieser Punct auf dem Felde bezeichnet ist. Geht die Visirlinie auch genau durch den Durchschnitt bei G, so sind beide Puncte richtig bestimmt, weil jeder als Winkelpunct eines vortheilhaften Dreiecks erscheint und außerdem durch eine dritte Visirlinie controlirt ist. Man kann nun die Puncte F und G durch Nadelstiche bezeichnen und von ihnen aus so viele Puncte anvisiren, als man will.

Einem Anfänger wird diese Operation nicht leicht bei'm ersten Male glücken, weil er Fehler der Orientirung und Horizontalstellung des Meßtisches oder Unebenheiten der Platte zu bemerken und zu vermeiden noch nicht Er-

fahrung genug hat. Deßhalb wird er wohlthun, wenn er, ohne um andere Netzpuncte sich zu bekümmern, zuerst die Hauptpuncte F und G zu bestimmen sucht, damit er nicht so viele Visirlinien ziehe, die er nachher nicht brauchen kann. Er wird am schicklichsten die Visirlinien anfangs nicht mit der Nadelspitze, sondern mit einem harten und guten Bleistifte so leise und fein, als möglich, ziehen, damit er dieselben, wenn die Arbeit nicht gelingen sollte, wieder auslöschen könne und nicht genöthigt sei, das Blatt gar wegzuwerfen.

Nicht immer wird die Aufnahme der Puncte F und G in der hier beschriebenen Weise geschehen können; aber man hat doch noch viele andere Mittel, um zu seinem Zwecke zu gelangen. Kann man, z. B., den Punct F von den drei Puncten A, C, B der Standlinie, den Punct G aber nur von B aus sehen, so würde man folgendermaßen verfahren. Man stelle den Meßtisch über A und ziehe eine Visirlinie nach F. Sodann bringe man den Meßtisch über F, bestimme diesen Punct von B aus durch Rückwärtseinschneiden und controlire ihn durch den Punct C. Gehen die drei Visirlinien nicht zusammen, so kann man den richtigen Punct leicht nach §. 91 und zwar sehr sicher finden, wenn der Winkel A F B nicht unter 60° ist. Ist F gut bestimmt, so ziehe man eine Visirlinie nach G, stelle sodann den Meßtisch über G auf und bestimme diesen Punct durch Rückwärtseinschneiden mittelst des Punctes B. Es fehlt dann nur noch eine Controle für G, und um diese zu erhalten, wird man vorher, ehe man den Meßtisch über F und G aufstellt, von der Standlinie aus einen Punct I oder U bestimmen, den man zugleich auch in G sehen kann.

Wenn man wohl von A nach F und von B nach G, nicht aber von A nach G und von B nach F sehen könnte, so wird man ebenfalls die nöthige Verbindung durch einen oder zwei Puncte herstellen, die von der Standlinie aus sich gut bestimmen lassen, und die man zugleich in F und G sehen kann. Man wird aber keineswegs über U und I den Meßtisch aufstellen, sondern diese Puncte nur dazu benutzen, um F und G durch Rückwärtseinschneiten zu bestimmen oder zu controliren.

Man begreift hieraus die Wichtigkeit solcher Puncte, die, wie größtentheils die Kirchthürme, aus allen Theilen der Flur sichtbar sind. Denn sie geben nicht nur für die

meisten Puncte des Netzes die Controle, sondern sind auch mitunter zur vollständigen Verbindung aller Netzpuncte das einzige Mittel.

Nachdem nun die Flur mit einigen Hauptnetzpuncten besetzt und ihre Aufnahme bewirkt worden, wird zur Bestimmung aller übrigen Puncte geschritten. Diese müssen, wo möglich, alle so gelegen sein, daß sie von den wenigen Hauptpuncten aus durch Schnitte dreier Visirlinien mit Schärfe bestimmt werden können. Indem man nämlich den Meßtisch nur über den Hauptpuncten aufstellt, orientirt man ihn immer nur nach den wenigen Linien, wodurch diese Puncte verbunden werden, und man vermeidet daher die Anhäufung von Winkelfehlern, die bei'm Gebrauche des Meßtisches nur zu leicht begangen werden und, z. B., bei der Aufnahme einer Figur aus dem Umfange oft so nachtheilige Folgen haben. Wenn man aber auch genöthigt wäre, den Meßtisch noch über anderen Puncten aufzustellen, so kann man ihn doch immer wieder auf die Hauptpuncte zurückorientiren, woraus noch keine bedeutende Häufung der Fehler entstehen kann.

In Hinsicht auf die Vertheilung der Netzpuncte in der Flur kann man als Grundsatz annehmen, daß auf jede Detailplatte im Allgemeinen drei Puncte fallen sollen; man wird sich aber auch mitunter mit zweien, ja vielleicht nur mit einem einzigen Netzpuncte und einer Orientirungslinie begnügen müssen, weil es die Localität nicht erlaubt, mehr Netzpuncte auf die Platte zu bringen. In den Fällen aber, wo die Vermessung Schwierigkeiten bietet, wie, z. B., in coupirtem Terrain und waldigen Gegenden der Fall ist, wird man die Detailblätter, wenn es angeht, auch mit mehr als drei Netzpuncten besetzen, weil man keine Mittel unbenutzt lassen darf, die Schwierigkeiten zu umgehen oder zu beseitigen.

Man muß auch Sorge dafür tragen, daß die Netzpuncte nicht verloren gehen, wenn etwa die Signalstangen entwendet werden sollten.

§. 99.

Da das Netz dazu dienen soll, die Sectionen der Detailvermessung richtig zu verbinden, das Netzblatt aber nicht größer als ein Detailblatt ist, so muß die Netzaufnahme nach einem kleineren Maßstabe, als die Detailaufnahme bewirkt werden. Wenn nicht durch die Anlage

einer zusammenhängenden Landesvermessung ein bestimmter Maßstab für die Aufnahme des graphischen Netzes ausschließlich erfordert wird, kann man ihn nach Belieben wählen und ihn nach der Anzahl der zu verbindenden Sectionen einrichten, nur wird man ihn immer einem bestimmten Theile von dem der Detailaufnahme gleich machen müssen. Bei mittelmäßigen Fluren, welche wenig mehr als vier Detailblätter erfordern, reicht es hin, den Maßstab der Netzaufnahme halb so groß, als den der Detailaufnahme zu nehmen; jener wird also 4000theilig sein, wenn dieser 2000theilig ist. Man halbirt dann die Seiten des Quadrates eines Detailblattes und verbindet die Halbirungspuncte durch gerade Linien, wodurch man 4 Quadrate erhält, von denen jedes ein Detailblatt im halben Maße der Detailaufnahme vorstellt. Wird nun nach diesem Maßstabe das Netz aufgenommen, so ergiebt sich daraus die Verbindung aller vier Meßtischblätter. In Fig. 4 (Taf. VIII.) ist ein Netz vorgestellt, dessen Maßstab $\frac{1}{4}$ von dem der Detailaufnahme ist, wornach also auf dem Netzblatte 16 Detailblätter Raum haben.

Sind die Fluren größer, so wird man auch, weil auf einem Netzblatte mehr Detailblätter Raum haben müssen, das Netz nach einem kleineren Maßstabe aufzunehmen genöthigt sein. Man kann nun nach Befinden den Maßstab des Netzes $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{5}$ von dem der Detailaufnahme nehmen, wodurch 9, 16 oder 25 Detailblätter auf dem Netzblatte vorgestellt werden. Doch darf man hierin nicht zu weit gehen, damit die Fehler der Netzaufnahme und diejenigen, welche bei'm Abnehmen der Dimensionen des Netzes nicht zu vermeiden sind, durch Uebertragung in einen weit größeren Maßstab nicht zu sehr vergrößert werden.

Eine höchst wichtige Rücksicht bei einer jeden Flurvermessung ist die, daß man eine möglichst geringe Anzahl von Meßtischblättern nöthig habe, was man auf folgende Weise erreichen kann. Man legt die Standlinie auf das Netzblatt so, daß man nach dem Maßstabe der Netzaufnahme die ganze Flur darauf zu bringen glaubt, und nimmt das Netz sammt dem ganzen Umfange der Flur auf. Dann legt man einen Rahmen auf die Zeichnung, dessen Weite im Lichten genau dem Quadrat eines Detailblattes gleich ist und durch Fäden in eben so viel Felder getheilt wird, als in Folge des Netzmaßstabes De-

tailblätter auf dem Netzblatte vorgestellt werden, z. B. in 16 Felder, wenn der Netzmaßstab $\frac{1}{4}$ von dem der Detailaufnahme ist. Durch Verschiebung des Rahmens erfährt man bald, wie die Flur auf die geringste Anzahl von Meßtischblättern gebracht werden kann, und wenn man die rechte Lage des Rahmens gefunden hat, bezeichnet man seine vier Ecken (im Lichten) durch Bleistiftpuncte. Nach Anleitung dieser Puncte wird sodann das Meßtischquadrat genau aufgezeichnet und auf die erforderliche Weise eingetheilt. Man wird freilich noch sicherer gehen, wenn man zu allererst eine Generalaufnahme in einem solchen Maßstabe unternimmt, daß die ganze Flur auf einer Platte Raum hat; denn häufig wird auch die Netzplatte nicht die ganze Flur fassen können. Mittelst des besagten Rahmens kann man dann die vortheilhafteste Lage der Standlinie ausmitteln und diese auf die Netzplatte auftragen.

Man könnte auch, wenn der Maßstab der Netzaufnahme sehr klein, z. B. $\frac{1}{4}$ von dem der Detailaufnahme, ist, zuerst nur einige Hauptpuncte und zwar so viele aufnehmen, daß deren drei auf je vier Detailblätter in schicklicher Vertheilung zu liegen kämen, wie **I**, **H**, **G** (Tafel **VIII.**, Fig. 4). Diese würde man dann nach dem doppelten Maßstabe auf ein anderes Blatt tragen und von ihnen aus noch so viele Netzpuncte aufnehmen, als zur Vermessung des Details erforderlich sind. Bei'm Uebertragen dieser secundären Netzpuncte auf die Detailblätter wäre dann der Maßstab nochmals zu verdoppeln. Ob dieses Verfahren zweckmäßig sei, muß ich dahin gestellt sein lassen, denn ich kann keinen gewichtigen Grund dafür auffinden.

§. 100.

Die Netzpuncte müssen nun in derjenigen Lage auf die Detailblätter übergetragen werden, wie es die Netzaufnahme ausweis't. Da hierbei ein Uebergang in einen weit größeren Maßstab Statt findet, so muß diese Arbeit mit der äußersten Sorgfalt und den besten Instrumenten verrichtet werden. Es gehört hierzu ein vorzüglicher Stangenzirkel mit einer Micrometerschraube und ein hinreichend langer, gut getheilter Transversalmaßstab nebst einer sehr geschickten Hand. Das Uebertragen der Netzpuncte geschieht mittelst ihrer senkrechten Abstände von zwei einen

Winkel einschließenden Seiten des Quadrates. Soll, z. B., der Punct F (Taf. VIII., Fig. 4) in den doppelten Maßstab (Fig. 5) übergetragen werden, so mißt man die Abstände Fr und Fp, was dadurch bewirkt wird, daß man den Stangenzirkel so weit öffnet, bis ein aus F beschriebener Kreisbogen die Quadratseiten xv und vw genau berührt. Man darf aber hierbei die Zirkelspitze nicht eigentlich in den Punct F eindrücken, damit derselbe nicht vergrößert und zu einem Loche werde. Zur Controle muß man auch die entgegengesetzten Abstände Fq und Fs messen, da dann die Summen Fr + Fs und Fp + Fq genau einer Quadratseite gleich sein müssen. Man muß bei diesen Messungen bis zu den kleinsten noch wahrnehmbaren Theilchen des Maßstabes herabgehen.

Die Doppelten der gefundenen Maße geben die Abstände des Punctes F von den Seiten des Quadrates von doppelter Dimension. Man macht also in Fig. 5 (Tafel VIII.) vr' = w's' = 2 . Fp oder überhaupt einem so Vielfachen von Fp gleich, als die Vergrößerung des Maßstabes mit sich bringt, und zieht die Linie r' s', auf welcher der abzutragende Punct liegen muß. Macht man dann noch r'F' = 2 . rF, so ist F' der übergetragene Punct F. Man wird aber noch außerdem den Punct F' durch die Abstände Fs' = 2 . Fs und r' x' = s'z' = 2 . Fq prüfen und nöthigenfalls berichtigen.

Außer den Netzpuncten werden aber auch noch geeignete Visirlinien übergetragen, besonders solche, welche auf die oben beschriebenen Hauptnetzpuncte gerichtet sind, um sie zur sichern Orientirung der Detailblätter zu benutzen. Die Uebertragung der Visirlinien geschieht mit Hülfe ihrer Durchschnitte mit den Quadratseiten. Um, z. B., die Linie tu überzutragen, braucht man bloß v't' = 2 . vt und x'u' = 2 . xu zu machen, aber man wird die Maße auf dieselbe Weise controliren, wie vorhin, indem, z. B., vt + tw genau = vw gefunden werden muß. — Die Linie t'u' muß genau durch den Punct F' gehen, und hierin hat man also ein wichtiges Prüfungsmittel für die Richtigkeit der übergetragenen Puncte.

Da man die Netzpuncte im Verlaufe der Messung nur nach und nach braucht und die hölzernen Tischplatten sich mit der Zeit werfen, wodurch auch die Lage der Netzpuncte und besonders der Visirlinien fehlerhaft wird, so soll man nicht unterlassen, die zum Uebertragen aller

Puncte erforderlichen Maße sogleich nach Beendigung der Netzaufnahme abzunehmen und aufzuschreiben. Diese Maße dienen auch in der Folge den schon übergetragenen Netzpuncten zur Prüfung und Berichtigung, wenn sich die Meßtischplatten etwa verzogen haben sollten.

Anmerkung. Wenn eine Linie mit großer Genauigkeit in mehre gleiche Theile getheilt werden soll, so ist es am besten, sie auf dem Transversalmaßstabe zu messen und das gefundene Maß durch die Zahl der Theile zu dividiren. Hieraus findet sich das Maß des gesuchten Theiles, das man auf das Genaueste auf dem Maßstabe zwischen die Spitzen des Stangenzirkels faßt und dann auf die zu theilende Linie von ihrem einen Endpuncte an so vielmal neben einander setzt, als die Anzahl der Theile es mit sich bringt, jedoch mit der Vorsicht, die Theilpuncte nur äußerst leise zu bemerken. Gewöhnlich wird man die Theilung noch unrichtig finden, aber man kann nun die Weite der Zirkelspitzen mittelst der Micrometerschraube leicht nach dem Augenmaße corrigiren und so die genaue Theilung finden.

§. 101.

Es wird sich oft ereignen, daß die Anzahl der Meßtischblätter, für welche die Netzverbindung berechnet ist, zur Aufnahme der ganzen Flur noch nicht hinreicht, obschon sie größtentheils darauf Platz hat. So wird sich, z. B., eine Flur sehr häufig größtentheils auf 4 Blätter bringen lassen; allein es werden außerdem gewisse Theile über diese vier Blätter hinausreichen und noch den Anschluß einer fünften und sechsten Platte erheischen. Man hat aber in diesem Falle dennoch nicht nöthig, das Netz in einem kleineren Maßstabe zu entwerfen, als in dem halben der Detailaufnahme, weil sich jene fünfte und sechste Platte auch hinreichend sicher anschließen läßt, ohne mit im Netze begriffen zu sein, wenn nur für die Verbindung der vier Platten gesorgt ist, welche den Haupttheil der Flur aufnehmen. Ja selbst bei größeren Fluren braucht man den Maßstab des Netzes nicht kleiner zu nehmen, als den eben bezeichneten, weil auch mehre Netzblätter sich nach dem sogleich zu erläuternden Verfahren aneinander anschließen und verbinden lassen, ohne daß ein

Netz in kleinerem Maßstabe vorausgegangen ist. Dieses Verfahren ist sogar vortheilhafter, als ein Netz in kleinerem Maßstabe, das alle Detailblätter umfaßt, weil die Fehler, die bei'm Uebertragen in den Maßstab der Detailaufnahme entstehen, begreiflich nicht so groß werden können.

Das beste Mittel, eine Platte an eine andere ohne Netz anzuschließen, sind Puncte nahe an den Seiten des Sectionsquadrates, welche auf zwei Platten zugleich liegen können, sofern der um das Sectionsquadrat befindliche Rand breit genug ist. Wie dieses zu verstehen sei, ergiebt sich ohne Weiteres aus Fig. 6 (Taf. VIII.), woraus zugleich ersichtlich ist, wie die Puncte **A**, **B**, **C** mittelst ihrer Abstände von den Quadratseiten von einer Platte auf die andere überzutragen sind. Da hierbei der Maßstab nicht vergrößert wird, so kann die Uebertragung der Puncte mit großer Richtigkeit geschehen. — Aber außerdem muß noch für eine gute Orientirung des angeschlossenen Meßtischblattes gesorgt werden, welche durch die übertragenen Puncte A', B', C' nicht immer gegeben ist, und die man auf folgende Weise erhalten kann. In dem Theile des Feldes, welcher auf die anzuschließende Platte zu liegen kommt, wählt man einen geeigneten Punct **D'** und visirt ihn von einem Netzpuncte **D** der vorangehenden Platte an. Die Visirlinie **EF**, welche die Quadratseiten nicht unter sehr spitzem Winkel schneiden darf, muß nun über die anzuschließende Platte verlängert werden, und zu dem Behufe muß man die Puncte **F'** und **G** kennen, wo sie die Quadratseiten dieser Platte schneidet. Nun ist aber offenbar, weil **XY** und **X'Y'** zusammenfallen, $Y'F' = YF$, und hierdurch ist der Punct **F'** bestimmt. Um aber **G** zu finden, darf man nur überlegen, daß **HG** um eben so viel größer ist, als **YF**, wie der Unterschied zwischen **YF** und **KE**; man hat nämlich $HG = YF + YF - KE = 2 \cdot YF - KE$, wie man aus Fig. 7 (Taf. VIII.) unmittelbar sieht, wenn **Em** und **Fn** mit **KH** parallel gezogen werden. Dann ist nämlich wegen der Congruenz der Dreiecke **EmF** und **FnG**, $Gn = Fm = YF - EK$, und daher $HG = Hn + Fm = YF + Fm = YF + YF - KE$. — Ist die Orientirungslinie **F'G** aufgetragen, so bringt man den Meßtisch über **D'**, orientirt ihn nach **D** mittelst der Linie **F'G** und bestimmt den Punct **D'** durch Rückwärtseinschneiden von den Puncten

A′, B′, C′. — Will man indessen keine Orientirungslinie auf die anzuschließende Platte übertragen, so würde man des Verfahrens in §. 91 oder auch desjenigen in §. 92 sich zu bedienen haben, um von den übertragenen Randpuncten A′, B′, C′ auf Puncte zu kommen, die, wie D′, mitten auf der Platte oder am entgegengesetzten Rande liegen.

Man kann aber auch ohne Uebertragung von bloßen Randpuncten eine Platte an eine vorhergehende anschließen, und zwar auf folgende Weise: In dem Theile des Feldes, welcher auf die anzuschließende Platte zu liegen kommt, wähle man einen Punct D (Taf. VIII., Fig. 9), der sich von drei Puncten A, B, C der vorangehenden Platte gut bestimmen und controliren läßt. Man stelle den Meßtisch über den Puncten A, B, C auf (versteht sich, mit der Platte, worauf diese Puncte liegen) und visire den Punct D an. Eine von den Visirlinien, und zwar allemal die, welche, wie CD, zwei gegenüberliegende Seiten des Meßtischquadrates unmittelbar schneidet, verlängert man nach dem vorher beschriebenen Verfahren über die anzuschließende Platte; von den beiden anderen brauchen bloß die Durchschnitte a und b mit der gemeinschaftlichen Quadratseite X Y bemerkt zu werden. Man trägt die Durchschnittspuncte a und b auch auf die anzuschließende Platte, stellt den Meßtisch über D auf und orientirt ihn nach D C. Man legt sodann das Lineal an a, richtet den Visirfaden auf das Signal bei A und zieht die Visirlinie a D, deren Durchschnitt mit C D den gesuchten Punct D giebt, den man noch auf gleiche Weise durch b controlirt.

Wird bloß ein Punct auf der anzuschließenden Platte bestimmt, so muß man außerdem, wenn der Meßtisch nach D C orientirt ist, noch eine Visirlinie nach einem zweiten Puncte E ziehen, die Linie D E messen und auftragen, damit man an die zwei Puncte D und E die Detailmessung anschließen könne. Auf gleiche Weise muß man auch in dem Falle verfahren, wenn man auf einem Blatte nur einen Netzpunct und von ihm aus eine Orientirungslinie nach einem anderen Netzpuncte hätte. Indessen ist nur ein einziger übergetragener Punct ohne wesentlichen Nutzen, denn man könnte hier auch wohl den Punct D auf der übergetragenen Visirlinie C F nach Belieben, etwa in D′, nehmen und dann durch ihn die neue

Standlinie D′ E′ ganz wie vorhin legen, nämlich den Tisch nach D′ C orientiren, nach E′ die Visirlinie D′E′ ziehen und das Maß der D′ E′ auftragen, um hernach von den Puncten D′ und E′ die Messung weiter fortzusetzen. Hierdurch wird die Sache nicht anders, als wenn D statt D′ genommen worden wäre, nur hat die Sectionslinie X Y nicht mehr die richtige Lage, sondern es muß dieselbe mit sich parallel nach X′Y′ gerückt werden, wenn zugleich beide Platten, sowohl hinsichtlich ihrer Sectionslinien, als auch hinsichtlich des aufgenommenen Landes, aneinander schließen sollen. Wohin man die Sectionslinie X Y zu rücken habe, ergiebt sich leicht, wenn auf die Platte D diejenigen Puncte aufgenommen sind, welche am Rande der Platte C liegen. Immer wird man D′ so genau treffen können, daß man die Sectionslinie X Y nicht weit zu verrücken hat.

Man sieht hieraus, daß überall kein Netz erforderlich ist, wenn eine Flur auf zwei Meßtischblättern Raum hat. Ja, selbst wenn sie vier und mehr Blätter erforderte, würde man das Netz entbehren können, wenn nicht zu besorgen wäre, daß eine Tischplatte während der Bearbeitung sich werfen möchte, wo dann das folgende Blatt nicht mehr richtig angeschlossen werden könnte. Auf gleiche Weise kann man auch Netze in sehr kleinem Maßstabe vermeiden, wenn man mehre Netzplatten nach dem angezeigten Verfahren aneinander schließt.

§. 102.

Wenn die Anzahl der zu verbindenden Detailblätter sehr groß wird, so muß der Maßstab der Netzaufnahme bedeutend klein genommen werden, und die Folge davon ist, daß die auf die Detailblätter übergetragenen Puncte, der mit übergetragenen und vergrößerten Fehler halber, nicht die gewünschte Genauigkeit haben. In solchen Fällen müßte man unbedingt zu einem trigonometrischen Netze seine Zuflucht nehmen, was uns wieder auf das im ersten Capitel Vorgetragene zurückführt. Wir bemerken nur, daß man solche kleine trigonometrische Messungen, wobei die sphärische Gestalt der Erde unberücksichtigt bleibt, nicht an astronomische Bestimmungen anzuknüpfen nöthig hat und auch nicht anzuknüpfen pflegt. Man zieht deßhalb auch nicht einen Meridian, sondern

statt dessen eine Linie M N (Taf. VIII. Fig. 4) unter einem beliebigen, aber der Sache angemessenen Winkel gegen die Standlinie A B durch den einen Endpunct derselben. Durch denselben Punct zieht man auch gegen die Linie M N ein Perpendikel und theilt dann durch Parallelen mit diesen beiden Linien den Landstrich in solche Quadrate, nach welchen die Vermessung des Details geordnet ist. Man hat also hier dieselbe Construction, wie in §. 25, nur mit dem Unterschiede, daß M N kein Meridian ist. Da nun der Winkel A B M, gleichsam das Azimuth des Ortes A in B, nach Willkühr genommen und folglich bekannt ist, so kann man nach §. 25, 2, die senkrechten Abstände aller Netzpuncte von der Linie M N und ihrem Perpendikel berechnen, woraus sich auch ihre Abstände von jeder in bestimmter Entfernung gezogenen Parallele ergeben. Man weiß also die Abstände jedes Punctes von den Quadratseiten des Detailblattes, worauf er fällt, und kann ihn folglich darauf auftragen. Man kann nun die Specialvermessung entweder unmittelbar an die trigonometrischen Puncte knüpfen, oder, wenn man deren noch nicht genug haben sollte, durch ein graphisches, mehre Blätter umfassendes Netz die nöthige Verbindung herstellen.

§. 103.

1) Ganz nach der vorbeschriebenen Weise wird bei zusammenhängenden Landesvermessungen ein graphisches Netz an die trigonometrischen Puncte angeschlossen, und es hat diese Aufgabe im Allgemeinen noch weniger Schwierigkeit, weil die trigonometrischen Netzpuncte in der Regel hinreichend lange und sehr bequeme Standlinien bilden werden. Sind auf dem Netzblatte drei trigonometrische Puncte gegeben, und kann man auf keinem derselben den Meßtisch aufstellen, so bestimmt man den ersten graphischen Punct nach §. 91; wären aber von ihnen, unter übrigens gleichen Umständen, nur zwei zugleich sichtbar, so müßte man das in §. 92 erklärte Verfahren in Anwendung bringen, wobei übrigens der dritte Punct nach Umständen zur Controle benutzt werden kann. — Wie bei bloß zwei trigonometrischen Puncten zu verfahren ist, ergiebt sich von selbst.

2) Aber oft gestattet die Localität nicht, mehr als einen trigonometrischen Punct auf eine Section zu bringen, in welchem Falle man Mittel anwenden muß, die freilich nicht immer die gewünschte Genauigkeit geben.

Kann man, z. B., wenn auf einer Section II (Taf. VIII. Fig. 8) nur der einzige Punct P gegeben ist, in den zwei angrenzenden Sectionen die Puncte A und B sehen, so reicht dieses schon hin, einen zweiten Punct auf jener Section zu bestimmen, wenn man die Lage der Linie A B bezeichnet und sie als Orientirungslinie benutzt. Für die Puncte A und B kennt man nämlich aus der vorhergegangenen trigonometrischen Berechnung die senkrechten Abstände A H und H C, B E und D E von den Seiten der Sectionen, und hieraus auch die Länge H E, da die Seite C D ebenfalls bekannt ist. Zieht man also A L mit H E parallel, so kennt man in dem rechtwinkligen Dreieck A L B die Seiten $AL = HE$ und $LB = BE - AH$, und in den ihm ähnlichen Dreiecken A M G und A N F die Seiten $AM = HC$ und $AN = HD$; man kann daher die Linien M G und N F durch die Proportionen berechnen

$$AL : LB = AM : MG$$
$$AL : LB = AN : NF.$$

Da nun auch $CM = AH = ND$ bekannt, so ergeben sich hieraus C G und D F, und man kann folglich die Linie G F auf die Section II. auftragen Wählt man dann auf dem Felde einen Punct R in der Linie A B, stellt den Meßtisch darüber und orientirt ihn nach A B, so kann man seinen Standpunct mittelst des Punctes P durch Rückwärtseinschneiden bestimmen. Hierdurch bekommt man die zwei Puncte P und R auf die Section und kann folglich die Aufnahme des Netzes weiter fortführen. Aber man hat hier kein anderes Versicherungsmittel für die Richtigkeit des Punctes R, als die unmittelbare Messung der Linie P R, wodurch zwar die richtige Entfernung zwischen P und R, nicht aber die richtige Lage von R gegen die Sectionsseite verbürgt wird.

3) Ist gar kein trigonometrischer Punct auf der Section gegeben, so muß man graphische Netzpuncte aus den anstoßende Sectionen, welche am Rande der Platte liegen, darauf übertragen und, nachdem man die Orientirungslinie G F gezogen hat, ebenso wie vorher ver-

fahren. — Kann man keine Orientirungslinie nach trigonometrischen Puncten der angrenzenden Sectionen bestimmen, so muß man statt deren graphische wählen.

Wie das in §. 101 Gesagte hierher zu beziehen sei, ergiebt sich von selbst.

§. 104.

Nachdem die Netzpuncte auf die Detailblätter übergetragen worden, wird zur Specialvermessung geschritten. Ueber dieselbe ist das Wichtigste schon im vierten und fünften Capitel gesagt worden und daber hier nur wenig zu bemerken übrig. Die Specialvermessung wird am Besten partieenweise, wie selbige von der Natur oder durch die Feldabtheilung dargeboten werden, vorgenommen. Jede Partie wird mit zweckmäßigen Linien um- und durchzogen; dieselben werden mit der Kette gemessen und währenddem zugleich die zur Seite nahe genug gelegenen Puncte mittelst des Winkelspiegels durch ihre Coordinaten bestimmt, wie selbiges im vierten Capitel gelehrt worden. Die Endpuncte der gemessenen Hülfslinien aber werden, wenn sie nicht in andere Hülfslinien eingemessen (eingebunden) sind, auf dem Meßtische durch Schnitte von Visionslinien bestimmt, wobei man den Meßtisch über den aufgetragenen Netzpuncten aufstellt und nach anderen umher gelegenen Netzpuncten orientirt. Doch ist man oft genöthigt, außer den Netzpuncten noch andere in der Absicht zu bestimmen, um den Meßtisch darüber aufzustellen, da die ersteren nicht immer eine hinreichend günstige Lage haben, um die Aufnahme des Details zu bewirken. — Wie zu verfahren ist, wenn nur ein Netzpunct nebst einer von ihm ausgehenden Orientirung auf ein Detailblatt kommt, ist in §. 101 gesagt worden.

In coupirtem Terrain und waldigen Gegenden ist es meistens unmöglich, die Endpuncte der Hülfslinien sämmtlich durch Schnitte von Visirlinien zu bestimmen, und man muß dann das in §. 86 und 90 erklärte Verfahren des Stationirens anwenden. Daß hierbei überall nur von einem Netzpuncte ausgegangen werden kann, versteht sich von selbst, sei es nun, daß unter der Folge von Linien, deren gegenseitige Lage aufzunehmen ist, eine an einen Netzpunct sich unmittelbar anschließt, oder

daß einer ihrer Endpuncte von den Netzpuncten her durch Schnitte von Visirlinien bestimmt wird. Wo sich aber Gelegenheit darbietet, an einen Netzpunct anzuschließen, d. h., die Linienfolge auf einen Netzpunct zurückzuführen, oder auch den einen oder andern Punct durch Schnitte von Visionslinien, von den Netzpuncten her, zu bestimmen oder zu controliren, soll man dieses überall nicht unterlassen, weil es zur Richtigkeit der Arbeit wesentlich beiträgt.

Besonders schwierig sind die Vermessungen mit Wald bewachsener Flächen, wenn innerhalb derselben noch mehre Scheidungslinien aufzunehmen sind. Hier kann man oft auf keine andere Weise in das Innere hineineidringen und wieder hervorbrechen, als daß man auf mühsame Weise das im Wege stehende Gebüsch niederhauen läßt. Man muß in solchen Fällen die Zweckmäßigkeit der Hülfslinien ganz besonders darnach beurtheilen, daß den Waldbesitzern kein zu beträchtlicher Schaden verursacht wird. Immer wird es zweckmäßig sein, wenn am Umfange des Waldes solche Puncte durch Schnitte von Visionslinien bestimmt werden, von welchen aus man leicht in das Innere dringen kann.

Wenn auf steilen Bergabhängen gelegene Partieen aufzunehmen sind, so wird die Messung mit der Kette beschwerlich und auch, wo bergab gemessen werden muß, leicht unrichtig. In diesem Falle ist es am Zweckmäßigsten, nur solche Hülfslinien zu legen, welche an dem Bergabhange ziemlich horizontal laufen, und ihre Endpuncte durch Schnitte von Visionslinien zu bestimmmen. Damit man aber auf beiden Seiten der horizontalen Hülfslinien keine großen Abstände (Ordinaten) und folglich nur auf kurze Strecken bergab oder bergauf zu messen habe, wird man eine größere Anzahl solcher Hülfslinien legen müssen, als sonst auf horizontalem Boden erforderlich sein würde. Geschickte Geometer pflegen in solchen Fällen die meisten Puncte durch Schnitte von Visirlinien zu bestimmen, und nur solche Gegenstände, deren Grenzen nicht verpfählt wurden, desgleichen auch die Grenzen sehr kleiner Parcellen, mit der Kette aufzumessen, wozu sie in den durch Visirlinien bestimmten Puncten Anhalt genug haben.

Sobald die nöthigen Data einer Partie gemessen sind, darf man das Auftragen und Auszeichnen derselben

auf dem Meßtische nicht lange aufschieben, weil bei diesem Geschäfte in vielen Dingen das Gedächtniß in Anspruch genommen wird. Ueber das Auftragen ist schon das Nöthige im vierten Capitel (§. 72) beigebracht worden; das Auszeichnen versparen wir am Besten bis dahin, wo von dem Zeichnen der Charten die Rede ist.

§. 105.

Für die Zwecke der Catastralvermessung wird es auch genügen, wenn man ohne vorhergegangene Netzlegung die Flur nach gewissen Abschnitten, wie solche durch die Natur und die Vertheilung des Bodens gegeben sind, vermißt. Wenn auch diese Abschnitte, welche als unabhängige, für sich bestehende Theile anzusehen sind, zum Theil mehr als ein Tischblatt erfordern sollten, so kann die Verbindung doch ohne Netz hergestellt werden, wie in §. 101 gezeigt worden ist. Jeder Abschnitt der Art müßte auf einem besonderen, nicht mehr als einen Royal-Velinbogen umfassenden Blatte darzustellen sein und so eine Section der Flurcharte ausmachen. Daß hierdurch eine größere Genauigkeit in den kleineren Theilen erreicht wird, ist wohl ohne Weiteres klar, da die Messung dieser Theile von allen Fehlern der Netzaufnahme und der Uebertragung der Netzpuncte nach einem größeren Maßstabe ganz unabhängig ist, und diese Genauigkeit ist doch wohl der Hauptzweck einer Catastralvermessung. Immer aber wird es noch möglich sein, die einzelnen Flurchartenblätter nach einem kleineren, z. B. vier bis fünf Mal kleineren, Maßstabe zu einer Uebersichtscharte zu vereinigen. Sehr große Flurchartenblätter, wie sie zeither größtentheils üblich waren, sind wegen ihrer beschwerlichen Handhabung unzweckmäßig und überdies, da sie zusammengerollt werden müssen, sehr der Zerstörung ausgesetzt.

§. 106.

Bei Vermessung der Ortschaften, besonders der Städte, sind die Schwierigkeiten oft sehr groß. Begreiflich wird hier an eine Bestimmung der Puncte durch Schnitte von Visirlinien nur in höchst seltenen Fällen zu denken sein, sondern man ist lediglich auf die Methode des Stationi-

rens hingewiesen. Zu dem Ende findet man meistens gleichsam einen Mittelpunct, von welchem aus mehre lange Linien durch die Gassen des Ortes gelegt werden können, welche die Grundlage zur ganzen Vermessung abgeben. Die Endpuncte dieser Linien werden mit starken, tief eingeschlagenen Pfählen (auf dem Pflaster der Städte auch wohl mit großen eisernen Nägeln) an solchen Stellen bezeichnet, wo keine Beschädigung der Pfähle durch das Fuhrwerk zu befürchten ist. Man führt diese Linien mit so wenigen Brechungen, als die Biegung der Gassen gestattet, bis an das Ende des Dorfraumes heraus und legt ihre Endpuncte in die Seiten eines Polygon's, womit der ganze Dorfraum eingeschlossen ist, und das aus so wenig Seiten zusammengesetzt sein muß, als es nur die Localität erlaubt. Auf diese Weise ist gleichsam das Netz zur Ortsaufnahme gelegt, und es wird dasselbe auf die zweckmäßigste Art nach der Methode des Stationirens mit dem Meßtische aufgenommen, so zwar, daß der Aufstellungspuncte, sofern sie zur Construction der Figur unumgänglich erfordert werden, möglichst wenige sind, und auf andern Puncten der Meßtisch nur der Controle halber aufgestellt wird.

An die Linien des so bestimmten Netzes werden nun die Details, die Wohnhäuser, Nebengebäude, Hofräume und Gärten mittelst des Winkelspiegels angemessen. Man wird aber außerdem noch viele andere Linien legen müssen, die theils mit beiden Endpuncten in die soeben beschriebenen Hauptlinien eingebunden, theils aber auch wegen der vielen Hindernisse nur mit einem Endpuncte in eine Hauptlinie eingemessen sind, und deren Richtung sodann mit Hülfe des Meßtisches bestimmt wird. So muß man öfters von einem Puncte einer Hauptlinie aus eine Visirlinie in eine Hofraithe legen und vielleicht wieder auf einem Puncte innerhalb derselben den Meßtisch aufstellen, weil kein anderes Mittel zur Aufnahme des Details vorhanden ist. Ueberall aber muß man Gelegenheit nehmen, in die Hauptlinien andere zur Aufnahme des Details dienende Linien einzumessen, welche zu den abgelegensten Stellen führen, und in dieser Absicht wird man manchmal mitten durch die Ein- und Ausgänge von Gebäuden hindurch gehen, auch manches Hinderniß aus dem Wege räumen müssen, wenn es ohne großen Schaden der Besitzer geschehen kann. Oft

kann man, ohne der Richtigkeit der Aufnahme zu schaden, auf eine Hauptlinie mit Hülfe des Winkelspiegels eine Senkrechte setzen, die in eine Hofraithe führt, und an welche sich dann die nöthigen Puncte anmessen lassen. Ein denkender Feldmesser wird immer leicht die geeigneten Mittel finden, durch welche er die entgegenstehenden Hindernisse theils umgehen, theils beseitigen kann.

Da die Gebäude meistentheils regelmäßige Vierecke bilden, so reicht es aus, zwei Ecken von ihnen mittelst Coordinaten angemessen zu haben und die beiden andern aus der (mit dem Ruthenstabe) gemessenen Länge und Breite zu construiren. Ueberhaupt wird man hier oft Gelegenheit und dieselbe zu benutzen Ursache haben, manche Gegenstände an andere angrenzende und auf dem Meßtische schon bestimmte, bloß mit Hülfe ihrer gemessenen Dimensionen anzuschließen, z. B., ein Seitengebäude an das Wohnhaus (Taf. VIII. Fig. 10) durch Messung der Linien a b, b c und b d. Auch kann man im Nothfalle Hülfslinien durch zwei solche Puncte legen, welche bereits mit Hülfe des Winkelspiegels an andere Hülfslinien angemessen sind.

Wir haben die Ortsvermessung so beschrieben, wie sie, unabhängig von der Flurvermessung, als eine für sich bestehende anzustellen ist. Wird der Ort mit zur Flur gemessen, so ist nichts weiter nöthig, als das umgebende Polygon von den Netzpuncten aus aufzunehmen und von Außen in das Innere zu dringen. Meistentheils wird dann die Aufnahme leichter, und man wird mitunter sogar manche wichtige Stützpuncte der Messung im Innern des Ortes durch Schnitte von Visirlinien von den Netzpuncten her bestimmen können.

§. 107.

Jede Messung wird nach ihrer Beendigung einer Revision unterworfen, welche von einem höheren Messungsbeamten (Obergeometer, Revisor) ausgeführt wird. Man revidirt entweder durch Nachmessen mit der Kette, oder durch Nachvisiren auf dem Meßtische. Im ersteren Falle legt man über die ganze Section ein Polygon, indem man beliebige Puncte durch Linien verbindet und auf diese Weise in sehr verschiedene Stellen der Messung eindringt. Diese Linien mißt man und vergleicht die

Maße mit denen der gleichnamigen Linien auf dem Plane; zugleich wird man aber auch mittelst des Winkelspiegels umher gelegene Puncte anmessen, besonders aber die Durchnittspuncte der Revisionslinien mit den Grundstücksgrenzen prüfen. In gleicher Absicht kann man auch beliebige Puncte seitwärts liegender Grundstücksgrenzen anmessen und zusehen, ob die aufgetragenen Maße in die gleichnamigen Grenzen des Planes führen.

Die Revision mit dem Meßtisch ist strenger, und eigentlich nur in solchem Terrain billig, wo der Messung keine bedeutenden Hindernisse im Wege stehen. Man stellt den Meßtisch über einen beliebigen aufgenommenen Punct des Feldes, orientirt ihn nach einem andern beliebigen Puncte und visirt diejenigen Puncte an, die ein Gehülfe mit einem Fähnchen bezeichnet. Gehen die Visirlinien genau durch die gleichnamigen Puncte des Planes, so hat die Messung auf vorzügliche Richtigkeit Anspruch.

Da unmöglich eine Messung mit dem gemessenen Objecte auf das Genaueste harmoniren kann, so giebt es gewisse Fehlergrenzen, innerhalb welcher die Messung noch als gut anerkannt wird. Bei langen Linien setzt man diese Grenzen in der Regel auf $\frac{1}{400}$, d. h., auf 1 Fuß bei 400 Fuß; bei kürzeren auf $\frac{1}{200}$, wenn das Terrain der Messung nicht ungünstig war. In schwierigem Terrain und zumal auf wertblosem Boden erweitert man diese Fehlergrenzen auf das Doppelte, nämlich auf $\frac{1}{200}$ bei langen und auf $\frac{1}{100}$ bei kurzen Linien.

Siebentes Capitel.

Von einigen andern geodätischen Instrumenten und deren Gebrauch.

§. 108.

Die Zollmann'sche Scheibe.

Dieses, nach seinem Erfinder so genannte Instrument gleicht in seinem Baue vollkommen dem Meßtische und bedarf daher zu seiner Erläuterung keiner Abbildung weiter. Es ist leichter gebaut, als ein Meßtisch, und hat, statt der viereckigen Tischplatte, eine hölzerne oder metallene runde Scheibe, in deren Centrum ein conischer Zapfen senkrecht befestigt ist. Die kleine Kippregel hat ein Loch, in welches jener Zapfen genau paßt, so daß man um ihn das Lineal, wie um einen festen Mittelpunct, herumdrehen kann. Doch bleibt die Kippregel nicht beständig auf der Scheibe sitzen, sondern dieselbe wird nach Bedürfniß auf den Zapfen aufgesetzt und wieder abgenommen. Die Scheibe, welche ansehnlich kleiner ist, als eine Meßtischplatte, kann mittelst dreier im Stativkopfe sitzender Schrauben horizontal gestellt werden; auch läßt sie sich, wie der Meßtisch, nach jeder Richtung hin beliebig drehen und durch eine Micrometerschraube fein einstellen. Sie wird auch mit Papier bezogen, in dessen Mitte natürlich ein Loch zum Durchstecken des Zapfens eingeschnitten sein muß. Das Aufziehen des Papiers geschieht bei manchen Exemplaren mittelst eines metallenen Reifes, welcher um den Rand der Scheibe gepaßt ist und so das eingeklemmte Papier festhält. Zum Ueberfluß ist jener Reif mitunter in Grade getheilt und der Eintheilung sogar ein am Lineale der Kippregel befestigter Nonius beigegeben.

Die Kante des Lineales, an welcher die Linien gezogen werden, sollte, streng genommen, durch das Centrum des Zapfens oder durch den Umdrehungsmittelpunct gehen. Ob dieses Statt finde, erfährt man, wenn man auf der Scheibe am Lineale eine Linie zieht, dasselbe um den Zapfen umdreht und zusieht, ob es auch von der

entgegengesetzten Seite her an die gezogene Linie paßt. Allein wir wissen aus §. 81, daß eine kleine Abweichung der Art ohne nachtheilige Folgen für gewöhnliche Vermessungen ist.

Uebrigens muß die Scheibe ganz nach denselben Grundsätzen beurtheilt werden, wie der Meßtisch, und es finden dieselben Rectificationen, wie bei der Kippregel, Statt.

§. 109.

Die Winkel werden nun auf dem Scheibenblatte graphisch dargestellt, und der Scheitel liegt begreiflich immer in der Mitte des Centralzapfens; nachdem werden sie auf die eigentliche Zeichnung übergetragen. In sofern nun der Meßtisch sogleich die fertige Figur giebt, steht ihm die Scheibe bedeutend nach; auch verspricht diese keine größere Genauigkeit der aufgenommenen Winkel, als jener, besonders da das Uebertragen der Winkel eine Quelle neuer Fehler wird. Da indessen die Scheibe leichter gebaut sein darf, als der Meßtisch, auch immer nur ihr Centrum über dem Scheitel des zu messenden Winkels eingelothet zu werden braucht, so empfiehlt sie sich allerdings einigermaßen zum Gebrauch in bergigten und waldbewachsenen Gegenden.

In der That gebraucht man auch die Scheibe meistens nur da, wo man, wegen des Terrains und sonstiger Oertlichkeiten, zur Aufnahme der Figuren durch Messung ihrer Seiten und Umfangswinkel genöthigt ist (§. 86, dritte Auflösung und §. 90, 3). Man verfährt hierbei, um z. B. die Figur **ABCDE** (Taf. **XII.**, Fig. 5) aufzunehmen, so. Man stellt die Scheibe über **A**, dreht das Lineal um seinen Zapfen, bis **B** und **E** im Fernrohr erscheinen und zieht die Visirlinien **ab** und **ae**. Hierauf bringt man die Scheibe über **B**, legt das Lineal an **ba**, dreht die Scheibe, bis **A** vom Visirfaden gedeckt wird, visirt dann nach **C** und zieht am Lineale die **bc**. Auf gleiche Weise wird auch über jedem andern Puncte der Figur verfahren und namentlich die Scheibe immer wieder nach der zuletzt gezogenen Visirlinie zurückorientirt, wodurch alle Linien auf der Scheibe eine solche Lage bekommen, daß, wenn eine von ihnen mit der gleichnamigen des Feldes, z. B., **ba** mit **BA**, parallel gerichtet ist, auch alle übrigen mit ihren gleichnamigen des Feldes,

bc mit BC, cd mit CD u. s. w. parallel sind. — Da man auf der vorletzten Station D schon die den Seiten DE und AE gleichnamigen Visirlinien de und ae bekommt, so hat man auch den Winkel bei E. Wenn man daher über E aufstellt, die Scheibe nach AE orientirt und dann das Lineal an ed anlegt, so muß der Visirfaden genau auf D treffen.

Dies ist eine Probe der Winkelmessung, aber auch die einzige, wenn nicht zugleich auch nach der Richtung der Diagonalen visirt werden kann.

Die auf das Scheibenblatt aufgenommenen Winkel sind nun auf die Zeichnung zu bringen, wozu das Abschiebezeug dient, welches aus einem langen metallenen, am besten eisernen Lineale und einem Dreiecke besteht, das aus metallenen Leisten zusammengesetzt ist. Das Scheibenblatt wird, meistens am Rande des Papieres, worauf die Zeichnung kommen soll, an einigen Stellen mit Mundleim angeklebt, mit der Vorsicht, daß es glatt ausgebreitet sei. Man legt dann das Dreieck mit einer Seite an eine der Visirlinien, etwa an ab (Taf. XII., Fig. 6), schiebt an eine andere Seite desselben das Lineal und läßt an diesem das Dreieck so weit herabgleiten, als bis wohin die der Visirlinie ab entsprechende Seite AB der Zeichnung kommen soll, worauf man die AB zieht und auf sie das mit der Kette gefundene Maß aufträgt. Begreiflich wird hierdurch AB mit ab parallel. Um ferner den Winkel ABC aufzutragen, legt man das Dreieck mit einer seiner Seiten an die der BC entsprechende Visirlinie bc, schiebt an eine andere Seite das Lineal und läßt an demselben das Dreieck wieder so weit herabgleiten, bis die Seite, welche an bc lag, durch den Punct B geht, worauf man die BC zieht und dem für diese Linien gefundenen Maße gleich macht. Hierdurch wird BC mit bc parallel und daher der Winkel bei B dem der Visirlinien ab und bc gleich. So verfährt man fort, bis die Figur zu Stande gekommen ist.

Das Abschiebedreieck ist rechtwinklich und liegt nach Bedürfniß bald mit einer Kathete, bald mit der Hypotenuse am Lineale. Auch trifft es oft, daß man, um, z. B., die cd mit sich parallel durch den Punct C zu schieben, nachdem das Dreieck eine Strecke fortgerückt worden, das Lineal an die dritte Seite desselben legen muß, um die Seite, welche an cd lag, bis an C her-

anzuschieben. Alles dieses bietet sich bei der Ausübung von selbst dar. Man muß bei'm Abschieben vor Fehlern sehr auf seiner Hut sein.

Wie man mit Hülfe der Scheibe Puncte durch Schnitte von Visirlinien bestimmen oder Figuren aus einem einzigen Standpuncte aufnehmen kann, ergiebt sich von selbst. Regel bleibt es dabei, die Winkel immer so aufzunehmen, daß jede Visirlinie mit der gleichnamigen des Feldes parallel ist, sobald bei einer von ihnen diese Bedingung Statt findet.

§. 110.

Bei der Aufnahme der Figuren aus dem Umfange mit Hülfe der Scheibe gilt übrigens in Hinsicht auf die Genauigkeit der zu erhaltenden Resultate alles das, was wir schon in §. 90 darüber vorgetragen haben. Weil man aber meistens bloß auf Messung der Seiten und der Umfangswinkel beschränkt ist, so wird auch die Schlußprobe, nämlich die Vergleichung des letzten, sich von selbst ergebenden Winkels E (Fig. 6, Taf. XII.) mit dem in der Wirklichkeit Statt findenden, desgleichen der letzten sich von selbst ergebenden Seite A E mit dem Resultate der Kettenmessung nicht immer genau zutreffen, sondern es werden sich, besonders wenn die Zahl der Winkelpuncte der Figur groß ist, oft bedeutende Differenzen zeigen. Um diese auszugleichen, hat man die sogenannten Fehlervertheilungsmethoden, mittelst welcher durch eine meistens ganz willkührliche Construction an die Stelle der fehlerhaften Figur eine andere, zwar ebenfalls fehlerhafte, aber doch schließende gesetzt wird. Allerdings lassen sich Fehler so ausgleichen oder vertheilen, daß dadurch ein der Wahrheit nahe kommendes Resultat erhalten wird; allein es gehören dazu eine ungleich größere Menge von Bedingungen, als bei der Aufnahme einer Figur durch bloßes Messen der Linien und Winkel am Umfange gegeben sind. Gesetzt, man habe, bei A anfangend, die Figur ABCDEF (Taf. XII., Fig. 7) aufgenommen, aber, anstatt daß die letzte Visirlinie, wodurch der Winkel bei F bestimmt wird, durch A gehen sollte, gehe sie vorbei nach A', und das mit der Kette gefundene Maß treffe von F nach A', so daß nun die aufgefundene Figur, hinsichtlich der Seite A B und der

Winkel bei A und B, mit der Wirklichkeit nicht übereinstimmt. Man wird also die übrigen Seiten und Winkel so abändern müssen, daß jene drei Stücke der Wahrheit wenigstens so nahe gebracht werden, daß die noch Statt findenden Abweichungen die möglichen und zulässigen Beobachtungsfehler nicht überschreiten; aber hierbei findet begreiflich eine Unendlichkeit der möglichen Fälle Statt, daß man das Wahre zu treffen wenig Hoffnung haben darf. Mit weit mehr Wahrscheinlichkeit würden sich die erforderlichen Correctionen machen lassen, wenn außer den Umfangsstücken noch mehrere Diagonalen und deren gegenseitige Winkel gemessen worden wären, weil man dann bei'm Ausbessern auch noch auf diese Stücke Rücksicht nehmen müßte; allein da eben die Unmöglichkeit solcher Messungen Bedingung ist, so haben auch alle Verbesserungen nur wenig Werth.

Eine häufig gebrauchte Construction für die Vertheilung der Fehler ist folgende, die wir an der schon erklärten Figur 7 (Taf. XII.) erläutern wollen. Man ziehe **FA** und fälle darauf die Senkel **Ba**, **Cb** u. s. w. . . . **Ed**. Hierauf ziehe man **AA′** und mit ihr parallel die **aa′**, **bb′**. . . **dd′**; sodann ziehe man die Linien **Ba′**, **Cb′**, **Ed′** und mache **a′B′** = **aB**, **b′C′** = **bC**,... **d′E′** = **dE**. Hierdurch erhält man, außer **F** und **A′**, noch die Puncte **B′**, **C′**, **D′**, **E′**, welche mit jenen die corrigirte Figur **A′B′C′D′E′F** geben. — Practiker von nur geringer theoretischer Bildung haben oft sehr großes Vertrauen zu dieser Fehlervertheilungsmethode.

§. 111.

Die Boussole oder der Feldmessercompaß.

1) Dieses Instrument wird noch häufiger gebraucht, als die vorhin beschriebene Scheibe, ob es gleich dieser in Hinsicht auf Genauigkeit, ja selbst auf bequemen Gebrauch, nachsteht. Eine einfache Einrichtung desselben ist in Fig. 8 (Taf. XII.) abgebildet, wo auf einer messingenen Platte **MN** ein rundes, etwa 1 Zoll hohes Gehäus befestigt ist, das mit einem Glasdeckel verschlossen ist. In der Mitte des Gehäuses steht ein senkrechter, oben fein zugespitzter Stift von gehärtetem Stahl, auf welchem die 5 Zoll lange Magnetnadel mittelst eines trichterförmigen Hütchens von Carneol, dessen Höhlung auf das Feinste polirt ist, frei

schwebt. Dieser Stift ist zugleich der Mittelpunct des im Gehäuse angebrachten Gradringes, welcher in Drittel- oder auch in Viertelgrade eingetheilt ist, und an welchem die Enden der Nadel in gleicher Höhe mit der Ebene der Theilung mit nur geringem Zwischenraume hinstreichen. Zwei feine Striche an den Enden der Nadel, deren Richtung durch das Centrum des Gradringes geht, dienen als Index, um den Grad der Theilung zu beurtheilen, auf welchen die Nadel gerichtet ist. An den Enden der Platte **MN** befinden sich die zum Vor- und Rückwärtsvisiren eingerichteten Diooptern **ab** und **cd**, deren Visirebene auf der Platte **MN**, oder der mit ihr parallelen Ebene des Gradringes, oder auch des Glasdeckels senkrecht stehen und nahe durch den Aufhängestift der Nadel gehen muß. Sie sind mit Charnieren versehen und können niedergelegt werden, wenn das Werkzeug nicht gebraucht wird. Bei f befindet sich ein Schieber, mittelst dessen eine den Centralstift ohne Reibung und Schlottern umgebende Hülse aufwärts geführt und dadurch die Nadel vom Stifte abgehoben und gegen den Glasdeckel gedrückt werden kann, was allemal geschehen muß, wenn man das Instrument nicht mehr gebraucht, um sowohl die Politur des Achathütchens, als auch die Stahlspitze zu schonen, auf welcher jenes aufruht.

Was das Stativ anlangt, so kann selbiges, der Hauptsache nach, wie ein gewöhnliches Meßtischstativ, nur weit leichter, gebaut sein, weil es keine so große Last zu tragen hat. Es wird erfordert, daß sich die Ebene des Gradringes, mittelst einer auf den Glasdeckel gestellten Dosenlibelle, horizontal stellen lasse, und daß man die ganze Boussole in der Horizontalebene nach jeder Richtung drehen, auch wohl den Visirfaden auf das zu pointirende Object mittelst einer Micrometerschraube fein einstellen könne. Diesen Forderungen wird genügt, wenn die Platte MN auf das Meßtischkreuz aufgeschraubt wird. Wenn sich nach einer beträchtlichen Umdrehung der Boussole ihr horizontaler Stand verlöre, wie dieses eben wohl auch bei'm Meßtische der Fall ist, so müßte man durch die Horizontalschrauben von Neuem nachhelfen.

2) Andere, besonders neuere Boussoleninstrumente, sind zusammengesetzter und oft ziemlich schwer gebaut, wodurch ein Hauptzweck, weßhalb die Boussole in gewissen Fällen andern Instrumenten vorgezogen werden könnte,

nämlich die Leichtigkeit der Aufstellung und des Transports, verfehlt wird. Bei einem mir zu Gesicht gekommenen Exemplare von Breithaupt ruhte der Compaß auf einer Art Gerüste, zwischen dessen Pfeilern ein Fernrohr in der Verticalebene auf und nieder beweglich war. Nach unten bildete das Gerüst einen Dreifuß, der mittelst dreier Stellschrauben zum Horizontalstellen, auf ähnliche Weise, wie der später beschriebene Theodolit, auf dem Kopfe des Stativs ruhte. Die Befestigung geschah mittelst eines Hakens, der in ein in der Mitte des Dreifußes befindliches Oehr eingriff und unterhalb des Stativkopfes durch eine gegen eine starke Spiralfeder wirkende Schraube angezogen wurde, wie dieses bei'm Theodoliten eben auch der Fall ist. Die blau angelaufene Nadel hat die Gestalt eines schmalen Rechtecks, auf dessen Oberfläche durch die ganze Länge der Nadel ein goldener Strich gezogen ist, der für die Gradtheilung als Index dient und also genau durch das Centrum derselben gehen muß.

3) Bei Schmalcalder's Boussole (Fig. 9, Taf. XII.) fällt die Platte, worauf das Gehäus befestigt ist, weg, weil sie bei der Beobachtung bloß in der Hand gehalten wird. Es sind daher auch die Dioptern am Gehäuse selbst befestigt, können jedoch auf dasselbe, zur bequemeren Verpackung, niedergelegt werden. Die Theilung ist von einer auf einer Theilmaschine getheilten Kupferplatte auf starkes Bristolpapier gedruckt und auf die Magnetnadel aufgeklebt, daher auch mit dieser um das gemeinschaftliche Centrum beweglich. Das Papier wurde vorher glacirt, d. h., mit stark gummirtem Kreidegrunde überzogen, so daß es bei'm Abdrucke nicht befeuchtet zu werden brauchte, sich also auch nachher, wie die Versuche zeigten, nicht im Mindesten verzog. Das Oculardiopter V hat einen Schlitz zum Durchsehen und an seiner Vorderseite ist das rechtwinkliche gläserne Prisma P so angebracht, daß die eine sphärisch geschliffene Kathetenfläche gegen die Gradtheilung gekehrt ist, während die Hypotenusenfläche einen gegen die Sehelinie des Beobachters um 45° geneigten Planspiegel bildet. Dieser erblickt also, durch die Diopterspalte in das Prisma hineinsehend, die Eintheilung vergrößert nach horizontaler Richtung, gleichzeitig aber auch über die Kante des Prisma's hinweg den Visirfaden und das pointirte Object. Er muß zu diesem Behufe die Pupille seines Auges so stellen, daß

sie von der oberen Kante des Prisma's halbirt wird. Der verticale Visirfaden dient für die Gradtheilung als Index und giebt somit genau den Winkel an, um welchen die Magnetnadel gegen die Richtung des anvisirten Objectes geneigt ist. Um das Prisma in die rechte Entfernung von der Gradtheilung bringen zu können, ist das Oculardiopter auf- und abwärts verschiebbar. Es leuchtet ein, daß hier ein Stativ entbehrt werden kann, weil ein einziger Moment der Ruhe genügt, um vom Visirfaden das Object gedeckt zu sehen und zugleich auch die abgeschnittene Gradzahl zu bemerken. — Ueber die Wirkung und den Gebrauch eines solchen Prisma's, wie das hier angewendete P, sehe man das Weitere in §. 119 nach. Die Zahlen der Gradtheilung gehen von der Linken zur Rechten und sind verkehrt gezeichnet, damit sie im Prisma wieder in rechter Stellung erscheinen.

§. 112.

1) Der Gebrauch der Boussole zu Winkelmessungen gründet sich nun auf die Eigenschaft der Magnetnadel, daß sie fortwährend dieselbe Richtung behält, wie man das Gehäus auch drehen mag. Man denke sich also in Fig. 10 (Taf. **XII**.) die Magnetnadel **SN** auf 0° der Theilung gerichtet und die Visirlinie mit dieser Richtung genau übereinstimmend. Wird dann das Gehäus so weit herumgedreht, bis das Object **A** vom Visirfaden gedeckt wird, so wird man auf dem Gradringe den Winkel **NCA**, oder das magnetische Azimuth des Objectes **A** in **C** ablesen, weil offenbar die Magnetnadel um einen ebenso großen Bogen vom Nullpuncte fortgerückt ist.

Man lies't nun den Abweichungswinkel **NCA** in Graden ab, schätzt aber kleinere Theile, als auf dem Gradringe unmittelbar verzeichnet sind, mit Zuziehung einer Loupe, nach dem Augenmaße. Wenn auf dem Gradringe Viertelgrade verzeichnet sind und die Nadel etwa 5 Zoll Durchmesser hat, so kann man wohl noch Fünftel eines Intervalls schätzen und somit den Abweichungswinkel bis auf $\frac{1}{20}$ Grad oder 3 Minuten ablesen. Die Genauigkeit der Boussole ist indessen aus anderen Gründen geringer.

Die Boussole wird jedoch das magnetische Azimuth **NCA** des Objectes **A** nur dann genau angeben, wenn,

während die Nadel SN auf den Nullpunct der Theilung einspielt, die Visirlinie eben auch die Richtung SN des magnetischen Meridians hat. Ist dieses nicht der Fall, sondern macht die Visirlinie VW, während die Nadel auf 0° steht, mit dem magnetischen Meridiane einen Winkel NCW, so werden alle Abweichungen, wie NCA, NCD, um diesen Winkel zu klein, oder zu groß gefunden, je nachdem sie mit CW auf derselben, oder auf entgegengesetzter Seite der Nadel liegen. Diesen Winkel NCW könnte man also den magnetischen Collimationsfehler nennen. Indessen hat man sich bei'm Gebrauche der Boussole zu terrestrischen Messungen nicht um den Collimationsfehler zu kümmern.

2) Um nun einen Winkel ACB zu messen, darf man nur die Abweichungswinkel NCA und NCB beobachten, indem man die Dioptern durch Umdrehung des Gehäuses erst auf A und dann auf B führt. Ihr Unterschied giebt den Winkel ACB, wenn auch statt ihrer die mit dem Collimationsfehler behafteten Abweichungen WCA und WCB beobachtet worden sind. — So ist die Sache, wenn beide Objecte auf einerlei Seite des magnetischen Meridians liegen; fallen sie aber, wie A und D, auf entgegengesetzte Seiten desselben, so muß man die beobachteten Abweichungen NCA und NCD addiren. Man wird also, um nicht in Irrungen zu gerathen, östliche und westliche Abweichungen unterscheiden müssen, und ob die Abweichungen von der Nord- oder Südseite des Meridians gerechnet werden; doch wird sich ein Jeder das Nöthige leicht selbst erfinden können.

3) Die Boussole ließe sich auch zum Multipliciren der Winkel (§. 118) einrichten, wenn man die Anordnung so träfe, daß einmal die Dioptern sammt dem Gehäuse, dann aber auch die Dioptern für sich bei ruhendem Gehäuse sich drehen ließen. Gesetzt, man wolle den Winkel ACE messen, so drehe man das Gehäuse, bis die Nadel auf 0° einspielt. Hierauf richte man die Dioptern bei ruhendem Gehäuse auf A, und sodann durch Umdrehung des Gehäuses auf E, so wird die Nadel den Winkel ACE angeben. Dreht man aber nachher die Dioptern, ohne das Gehäus zu verrücken, wieder auf A und führt sie dann durch Umdrehung des Gehäuses auf E zurück, so giebt die Nadel den doppelten Winkel an. So fort operirend, könnte man zu jedem Vielfachen des

gemessenen Winkels gelangen und hieraus durch Division mit der Vervielfachungszahl das Einfache ableiten.

§. 113.

1) Bei Aufnahmen mittels der Boussole käme es also nur darauf an, die gemessenen Winkel auf den Riß überzutragen; allein hier nimmt man noch den Satz zu Hülfe, daß die magnetischen Mittagslinien oder die Richtungen der Magnetnadel an nicht gar zu weit entfernten Orten als unter sich parallel angesehen werden können. Hierdurch tritt allerdings die Methode der Aufnahme mit der Boussole als eine eigenthümliche heraus und muß daher durch einige Beispiele erläutert werden.

2) Es sei also die Linienfolge ABCDE (Fig. 11, Taf. XII.) aufzunehmen. Man beobachte in A, B, C, D u. s. w. die Abweichungswinkel x, y, z, v einer jeden Linie vom magnetischen Meridiane und messe die Längen der Linien selbst, so hat man die zur Fertigung des Risses nöthigen Data. Auf dem Papiere zieht man dann eine Linie NS als magnetischen Meridian von A, trägt an sie in den willkührlich genommenen Punct A den Abweichungswinkel x und macht den Schenkel AB dem gefundenen Maße gleich. Durch B zieht man N'S' als magnetischen Meridian von B, mit NS parallel, macht den Winkel y dem Abweichungswinkel der BC gleich und trägt auf den Schenkel BC das gefundene Maß. So verfährt man fort, bis alle Puncte aufgetragen sind.

3) Aber man hat nicht nöthig, auf jedem der aufzunehmenden Puncte die Boussole zu beobachten, da man, wegen des Parallelismus der Meridiane, in jedem Puncte schon die Abweichung beider hier zusammenstoßenden Linien beobachten kann. Hat man in A den Winkel x beobachtet, so bringe man das Instrument über C und beobachte daselbst die Winkel z und y', von welchen der letztere = y ist, so daß also nun alle zum Auftragen der Puncte von A bis D erforderlichen Winkel bekannt sind. Wird die Messung weiter fortgesetzt, so übergeht man D und bringt die Boussole nach E, wo man dann wieder dieselben Beobachtungen anstellt, wie über C. Dieses ist die Aufnahme mit sogenannten Springständen. — Wie dieses zur Aufnahme einer Figur aus ihrem Umfange

angewendet werden kann, ist aus dem Gesagten von selbst klar.

4) Auch lassen sich Puncte durch Intersection der Abweichungslinien vom magnetischen Meridiane bestimmen, auf gleiche Weise, wie bei'm Meßtische die Durchschnitte der Visirlinien zu dieser Absicht benutzt werden. Man habe, z. B., eine Standlinie AB (Fig. 12, Taf. XII.) und gegen dieselbe den Punct C zu bestimmen, so wird folgendermaßen verfahren. Ueber A beobachtet man die Abweichungswinkel x und x+y der Linien AC und AB vom Meridiane NS, und dann in B den Abweichungswinkel z der BC. Ist dann die Standlinie AB schon auf das Papier getragen, so lege man an sie in A den Winkel BAN = x + y, wodurch man die Richtung NS des magnetischen Meridians NS erhält. Durch B ziehe man N″S″ mit NS parallel, lege an NS in A und an N″S″ in B die Abweichungswinkel x und z, so giebt der Durchschnitt der Schenkel AC und BC den dritten Punct C. Den Winkel u kann man zur Controle der Messung mit beobachten.

Ist die Lage der Standlinie AB gegen den magnetischen Meridian NS schon bekannt, so reicht die Aufstellung des Instrumentes über C schon hin, diesen Punct zu bestimmen. Beobachtet man nämlich hier die Winkel x′ und z′, welche die Richtung der Nadel mit den Seiten CA und CB macht, so sind, weil x′ = x und z′ = z, alle Data zum Auftragen des Punctes C auf die Zeichnung vorhanden.

5) Um eine Figur aus einem einzigen Standpuncte K (Fig. 13, Taf. XII.) aufzunehmen, braucht man nur die Abweichungswinkel NKE, NKF u. s. w. vom Meridiane NS zu beobachten. Diese Abweichungswinkel geben, nebst den Maßen der Linien KE, KF u. s. w., die zum Auftragen der Figur erforderlichen Data.

6) Das bisher Gesagte wird hinreichen, einen Begriff von der Art des Aufnehmens mit der Boussole zu geben. Man kann ein ähnliches Verfahren auch mit dem Meßtische in Anwendung bringen, wenn man ihn mittels der gewöhnlichen Orientirboussole orientirt. Soll sich aber dann einige Genauigkeit erwarten lassen, so muß die Orientirboussole größer sein, als die sonst zu dieser Absicht gebräuchliche. Auch genügt es nicht, wenn im Gehäuse bloß eine durch das Centrum des Stifts gehende

Linie gezogen ist, auf welche man die Nadel einspielen läßt, sondern es ist erforderlich, daß auf der Südseite sowohl, als auch auf der Nordseite der Nadel eine genaue Gradeintheilung sich befinde, wenn auch, um die zu große und unnütze Breite des Instrumentes zu vermeiden, nicht ein ganzer Gradring eingelegt wird.

Wir haben schon in §. 65 gezeigt, wie die Orientirung mittels der Boussole zu erhalten ist. Wir bemerken nur noch, daß die magnetische Mittagslinie nicht an der kurzen Kante der Boussole, sondern am Lineal der Kippregel gezogen werden soll. Man schiebt nämlich, wenn der Meßtisch seine ursprüngliche Orientirung, nach §. 77, erhalten hat, die Kante der Boussole an das Lineal der Kippregel und dreht beide so lange, bis die Nadel auf den Nullpunct der Theilung einspielt, worauf man am Lineale die magnetische Mittagslinie zieht.

Gesetzt nun, man wolle die Linienfolge in Fig. 11 (Taf. XII.) mit Springständen aufnehmen, und es sei die erste Linie AB schon auf dem Meßtische gegeben, so wird man, wenn die magnetische Mittagslinie noch nicht vorhanden ist, jenen über B aufstellen, ihn nach BA orientiren, die Mittagslinie nach der vorigen Anleitung ziehen, zugleich aber auch nach C eine Visur nehmen und das Maß der BC auftragen. Man überspringt dann den Punct C, bringt den Meßtisch über D, legt das Lineal der Kippregel an den gezogenen Meridian, schiebt die Boussole daran und dreht den Tisch, bis die Nadel einspielt, worauf jener richtig orientirt sein wird. Man legt hierauf das Lineal an C, richtet den Visirfaden gegen das am gleichnamigen Puncte des Feldes stehende Signal und zieht die Visirlinie CD. Auf dieselbe trägt man das Maß der CD, wodurch man den Punct D bekommt und in den Stand gesetzt wird, eine Visirlinie nach E zu nehmen, auf welche man das Maß der DE auftragen wird, um auch den Punct E zu erhalten. Mit Uebergehung von E, wird man sodann auf dem folgenden Puncte aufstellen und wieder ebenso verfahren, bis die Aufnahme vollendet ist. —

Ist die magnetische Orientirung auf dem Meßtische schon vorhanden, so kann man durch zwei schon gegebene Puncte A und B (Fig. 12, Taf. XII.) sogleich einen dritten, C, bestimmen, wenn man den Meßtisch darüber aufstellt, ihn nach der vorhandenen Mittagslinie orientirt

und die Visirlinien A C und B C, nach dem schon bekannten Verfahren, rückwärts zieht, deren Durchschnitt dann den Punct C giebt. Immer aber wird es nothwendig sein, den Durchschnitt bei C noch durch eine dritte Visirlinie zu prüfen.

§. 114.

1) Die Anwendung der Boussole macht es also nothwendig, jeden nach Graden und Gradtheilen gegebenen Winkel auf das Papier zu zeichnen. Man bedient sich hierzu des Transporteurs, aber nicht des gewöhnlichen, wie er sich in den gemeinen Reißzeugen findet, und der bekanntlich aus einem in Grade getheilten Halbkreise besteht, mit einer linealförmigen Basis, in der sich der Nullpunct der Theilung befindet, und worin eine Zunge eingeschnitten ist, deren Spitze das Centrum bezeichnet. Soll dieses Werkzeug brauchbar sein, so muß es einen Halbmesser von mehren Zollen haben und accurat getheilt sein. Die besseren Transporteurs haben eine Alhidade mit einem, und wenn statt des Halbkreises ein ganzer gebraucht wird, mit zwei diametral entgegengesetzten Nonien, welche Minuten unmittelbar angeben. Doch ist es nicht nöthig, diese Instrumente näher zu beschreiben oder abzubilden, da sie schon aus der bloßen Ansicht verständlich werden.

2) Den besten Transporteurs steht das Auftragen der Winkel mittels der Sehnentafeln und eines gut getheilten Transversalmaßstabes nicht nach. Das Verfahren ist folgendes. Es sei **ca** (Taf. VI., Fig. 10) der eine Schenkel und **c** der Scheitel des aufzutragenden Winkels, welcher 20° 16′ betragen mag. Mit einem bestimmten Halbmesser, z. B. = 1000, beschreibe man einen Kreisbogen und trage in denselben die Sehne **ab** des darzustellenden Winkels für den gewählten Halbmesser ein, so ist **acb** der verlangte Winkel. Statt einer Sehnentafel kann man sich auch der Tafeln der natürlichen trigonometrischen Linien bedienen, denn man hat, wenn die Sinuse für den Halbmesser 1 berechnet sind, die Sehne $ab = 2 \cdot ca \cdot \sin \frac{1}{2} acb$. Da man den Halbmesser **ca** nicht zu kurz nehmen darf, so wird man sich zur Construction des Bogens **ab**, der übrigens nur in der Nähe von **a** und **b** sichtbar zu sein braucht, eines kleinen Stangenzirkels bedienen.

3) Um bei'm Auftragen der Winkel mit Hülfe ihrer Sehnen das Aufschlagen der Tafeln und jedwede Rechnung zu ersparen, construirt man, wiewohl mit einigem Verluste an Genauigkeit, die Sehnenmaßstäbe oder geradlinigen Transporteurs. Dieselben kommen, rücksichtlich ihrer Construction, mit den Transversalmaßstäben sehr nahe überein. Man trägt auf eine gerade Linie **BA** (Fig. 15, Taf. XII.) von demselben Puncte **B** aus die Sehnen aller Winkel von Grad zu Grad, von 1° bis 90°, für einen bestimmten Halbmesser, wobei also die Sehne **BE** für 60° dem Halbmesser selbst gleich wird. Ueber **BA** construirt man dann ein Rechteck **ABDC** von beliebiger Höhe, trägt auf **DC** von **D** aus ebenfalls die Sehnen, wie auf **AB**, und zieht die Transversalen, wie 53 — 54, nämlich von dem Endpuncte jeder Sehne auf **DC**, nach dem Endpuncte der um 1° größeren Sehne auf **AB**. Die Höhen **AC** und **BD** theilt man in so viele Theile, als man den Grad zu theilen gedenkt, z. B. in 5 Theile, wenn man die Sehnen bis auf $\frac{1}{5}$ eines Grades haben wollte, und die correspondirenden Theilpuncte verbindet man durch gerade Linien, die dem zufolge mit **AB** und **CD** parallel werden und auf welchen von den gedachten Transversalen die Sehnen der Winkel abgeschnitten werden, welche noch Unterabtheilungen von Graden enthalten. So wäre, z. B., mn die Sehne von $53\frac{3}{5}$°, oder 53°36', weil sie auf der dritten Parallele von **CD** liegt. — Man nimmt also hier an, daß die Sehnen innerhalb der Grenze von 1° gleichförmig wachsen, was auch, wenn man eine Genauigkeit bis nur auf 1 Minute verlangt, zutrifft. Zwischen 53° und 54° ist also dann das Stück bei a der Zuwachs der Sehne für $\frac{1}{5}$°, das bei b für $\frac{2}{5}$° u. s. w., wenn man nämlich die Endpuncte der Sehnen von 53° verbindet.

Man sieht also, daß man mittels des geradlinigen Transporteurs ebensowohl aufgetragene Winkel nach Graden messen, als nach Graden gegebene auftragen kann.

§. 115.

1) Wir haben nun noch die Eigenschaften der Magnetnadel, sofern sie auf gewöhnliche terristrische Messungen Einfluß haben, und die Erfordernisse einer guten Boussole näher anzugeben. — Bekanntlich besteht die Nadel aus dem besten Stahl, und der Magnetismus wird ihr

durch Bestreichen mit einem anderen natürlichen oder künstlichen Magnet mitgetheilt. Hierfür giebt es zweierlei Verfahrungsarten, den einfachen und den Doppelstrich. Im ersten Falle setzt man den einen Pol, z. B. den Nordpol des Magneten, in der Mitte der Nadel auf und führt ihn bis an das eine Ende, wodurch dieses zum Südpol, das entgegengesetzte Ende aber zum Nordpol wird. Man darf nun vom Ende nicht wieder rückwärts streichen, weil man hierdurch den erregten Magnetismus wieder zerstören würde, sondern man muß den Magnet vom Ende der Nadel abheben, nunmehr seinen andern Pol in der Mitte der Nadel aufsetzen und nach der entgegengesetzten Richtung streichen. Hiermit fährt man in beständigem Wechsel fort, bis die Kraft der Nadel nicht mehr wächs't.

Gemeiniglich ist aber der durch den einfachen Strich hervorgebrachte Magnetismus an beiden Enden der Nadel ungleich. Man wendet daher lieber den Doppelstrich an, indem man nämlich mit zwei Magneten zugleich, von denen der eine mit dem Süd-, der andere mit dem Nordpol in der Mitte der Nadel aufgesetzt wird, nach den Enden streicht. Doch läßt sich der Doppelstrich auf mancherlei Weise anders ausführen, z. B., indem man die beiden Pole eines Hufeisenmagneten in der Mitte aufsetzt, bis an das eine Ende streicht, von da bis zum entgegengesetzten Ende zurückzieht, zuletzt aber immer wieder in der Mitte aufhört und da den Magneten abnimmt. An den Enden der Nadel ist bekanntlich der Magnetismus am stärksten; nach der Mitte zu nimmt er ab und verschwindet hier ganz und gar. — Nähere Belehrung hierüber muß man jedoch in den Lehrbüchern der Physik suchen.

2) Ueber die beste Form der Nadel und ihre Härtung ist bis jetzt zwar mancherlei versucht, aber noch kein genügendes Resultat gefunden worden. Nadeln mit scharfen, hervorstehenden Verzierungen, z. B., mit pfeilförmigen Spitzen, taugen nichts, weil dadurch die regelmäßige Vertheilung des Magnetismus gestört wird. Im Uebrigen sind mancherlei Formen versucht worden, als prismatische Stäbchen, die man theils auf die hohe, theils auf die schmale Kante legte; vorzüglich aber sind es zwei Gestalten, die sich für die Feldmesserboussole eignen; das aus einem dünnen Blech geschnittene schmale Rechteck, und

dann die Raute mit sehr stumpfen Winkeln am Aufhängepuncte, welche, rücksichtlich der Stärke des Magnetismus, vor dem Rechtecke noch Vorzüge zu haben scheint. Die Breite der Nadel soll etwa $\frac{1}{40}$ ihrer Länge, und die Dicke $\frac{1}{4}$ der Breite betragen. — Was die Härtung anlangt, so weiß man, daß der härtere Stahl den Magnetismus zwar unwilliger annimmt, als der weichere, ihn dagegen aber auch länger festhält. Die strohgelbe Härte wird für die beste gehalten, aber noch vorzüglicher soll es sein, den Stahl aus der Weißglühhitze in siedendem Oele abzulöschen. Uebrigens muß der Stahl fein und von gleichförmigem Korne sein, weil sonst die Nadel leicht mehre Pole bekommt.

3) Bekanntlich fallen die magnetischen Pole der Erde nicht mit den astronomischen zusammen, oder die Nadel zeigt nicht den wahren Meridian und den wahren Norden, sondern sie weicht davon, nach der Verschiedenheit der geographischen Lage, theils östlich, theils westlich, an manchen Stellen auch gar nicht ab. In ganz Europa ist die Abweichung westlich, und sie beträgt zu Paris etwa 20°. Sie ist jedoch gegenwärtig im Abnehmen begriffen, was ziemlich langsam vor sich geht und jährlich nur wenige Minuten beträgt, so daß hieraus bei Messungen, die nur einen Zeitraum von einigen Tagen umfassen, kein merklicher Irrthum entstehen kann. Beträchtlicher aber sind die täglichen Schwankungen, welche zwar, nach Verschiedenheit der Jahreszeiten, ungleich sind, aber doch in unseren Gegenden in Maximo $\frac{1}{4}$ Grad betragen und darin eine gewisse Gesetzmäßigkeit beobachten, daß sie im Sommer größer sind, als im Winter, und daß die Tageszeiten der größte Abweichung von der mittleren Richtung an allen Orten der Erde die nämlichen sind. Um $1^h\ 15'$ Nachmittags nämlich hat die Nadel die größte westliche, des Morgens zwischen 6 und 9 Uhr die größte östliche Abweichung; doch ist diese kleiner, als jene.

Man begreift nun, daß die tägliche Variation der Nadel Fehler in die Messungen bringen kann, die mit den heutigen Anforderungen an Genauigkeit durchaus nicht zu vereinbaren sind. Man könnte diese Fehler einigermaßen beseitigen, wenn man vorher und auch während der Messung zu gewissen Tagesstunden, namentlich da, wo die größten Abweichungen Statt finden, die Stellung der Magnetnadel beobachtete und hiernach alle übrigen

Beobachtungen corrigirte. Es kann dieses leicht dadurch geschehen, daß man das magnetische Azimuth desselben Objectes aus demselben Orte zu verschiedenen Tageszeiten beobachtet und die Unterschiede aufzeichnet. Indessen steht diese Weitläufigkeit der Zeitersparniß entgegen, die man durch die Boussole gewinnen möchte.

Die Magnetnadel ist übrigens auch unregelmäßigen, temporären Störungen durch atmosphärische Einflüsse unterworfen.

Eine Magnetnadel, welche im unmagnetischen Zustande auf ihrer Spitze im Gleichgewichte schwebte, verliert das Gleichgewicht, wenn sie magnetisirt ist: das Nordende wird sich nämlich in unserer nördlichen Erdhälfte unter den Horizont herabsenken, oder neigen, weßhalb man diese Eigenschaft die Neigung oder Inclination der Nadel nennt. Um also die Horizontalität der Nadel zu erhalten, muß das Südende schwerer, als das Nordende gemacht werden, was durch Hinzufügung eines kleinen Körperchens, z. B., von etwas Wachs, oder eines messingenen Laufgewichtes geschehen kann. — Verliert dann die Nadel mit der Zeit ihren Magnetismus, so wird sich das Südende unter den Horizont neigen.

Im Uebrigen müssen wir rathen, die Erscheinungen des Magnetismus aus physikalischen Lehrbüchern gründlicher zu studiren, als uns, wegen Mangel an Raum, dieselben hier darzustellen erlaubt ist.

4) In eisenhaltigen Gegenden erleidet die Nadel örtliche Ablenkungen durch die Gebirgsmassen, und es kann daher zu großen Fehlern führen, wenn man an verschiedenen Stellen ihre Richtungen als unter sich parallel betrachten wollte. Man kann jedoch unmöglich aus diesem Grunde die Boussole verwerfen, ebensowenig, wie man von einem nicht richtig orientirten Meßtische eine richtige Messung erwarten kann. Weil die Nadel, je nach ihrer Stellung gegen die anziehenden Massen, eine verschiedene Ablenkung erleidet und sich nicht parallel bleibt, so muß man eben die Vermessungsmethode, welche den Parallelismus der magnetischen Meridiane zur Bedingung macht, verlassen und sich begnügen, die Winkel der Richtobjecte selbst, nicht ihre Abweichungen von der Richtung der Magnetnadel, zu messen, was offenbar möglich ist, da, trotz aller anziehenden Massen, die Richtung der Nadel an demselben Puncte doch immrr dieselbe bleiben muß. Mi

Hülfe der gemessenen Winkel wird dann die aufzunehmende Figur, ohne alle Rücksicht auf den magnetischen Meridian, zu Stande gebracht werden können. Aber freilich steht dann auch die Boussole jedem anderen Winkelmesser nach, da der Vortheil, welchen der Parallelismus der Meridiane für die Aufnahme gewährt, weggefallen ist.

5) Die Bedingungen oder Eigenschaften, welche eine gute Boussole von den Händen des Künstlers erhalten muß, sind nnn folgende:

A) daß außer der Nadel und dem Centralstifte alles eisenfrei sei. Messing hält oft Eisentheilchen bei sich, die dann die Nadel ablenken und ihr nach ihrer verschiedenen Lage im Gehäuse eine verschiedene Stellung gegen den magnetischen Meridian geben, so daß auffallende Unrichtigkeiten in den Winkelmessungen Statt finden können. Der Künstler muß also das zu verwendende Messing dadurch prüfen, daß er es einer anderen Magnetnadel nähert und zusieht, ob diese dadurch aus ihrer Stellung gebracht wird. Dieselbe Probe läßt sich auch mit dem fertigen Gehäuse anstellen, aus welchem man die Nadel und den Centralstift entfernt hat;

B) daß die Nadel auf ihrem Stifte genau balancirt sei und in der Ebene des Gradringes liege. Dieß erfährt man, wenn man die Boussole horizontal stellt.

C) daß die durch Striche an ihren Enden bezeichnete Axe der Nadel genau durch die Spitze des Centralstiftes gehe, und daß diese zugleich der Mittelpunct der Theilung sei. Dieses erfährt man dadurch, daß man die Boussole dreht, bis das eine Ende der Nadel auf einen Theilstrich des Gradringes einspielt, wo dann das andere Ende genau auf dem um 180° entfernten Theilstriche stehen muß. Indessen hindert eine kleine Excentricität der Nadel doch nicht, die Abweichungswinkel vom Meridiane richtig zu messen, wenn man nur dieselben aus den Angaben beider Nadelenden ableitet und aus beiden Resultaten das Mittel nimmt. Die Richtigkeit dieser Behauptung geht zwar aus der später folgenden Betrachtung über excentrische Nonien hervor, allein da dort die Construction zusammengesetzter ist, so wollen wir diesen einfachen Fall noch besonders erörtern. Es seien also A

und B (Fig. 14, Taf. XII.) die von der Nordspitze der Nadel angezeigten Puncte des Gradringes in beiden Lagen der Boussole und K der Aufhängepunct, so wird die Südspitze die Puncte A′ und B′ bezeichnen, die mit A, B und K in gerader Linie liegen, und es ist $AKB = A'KB'$ der zu messende Winkel. Ist nun C der Mittelpunct des Gradringes, so giebt die Nordspitze den Winkel ACB, die Südspitze den Winkel $A'CB'$ für den wahren AKB an. Es ist aber

$$AKB + A = ACB + B$$

und $A'KB' + B' = A'CB' + A'$ hierzu addirt, giebt, weil $A = A'$, $B = B'$ und $AKB = A'KB'$:

$$2AKB + A + B = ACB + A'CB' + B + A,$$

daher $AKB = \frac{ACB + A'CB'}{2}$.

Dieses setzt jedoch voraus, daß der Aufhängepunct genau in der mit Strichen bezeichneten Axe der Nadel liegt. Auch wenn dieses nicht der Fall ist, gilt noch dieselbe Behauptung, denn wenn AA′ und BB′ die wahre Axe bezeichnen, so kann man die Sache so ansehen, als sei ihr Durchschnitt K der Aufhängepunct.

D) Endlich ist erforderlich, daß die Nadel nicht träge sei, sondern, wenn sie aus ihrer Richtung gebracht worden, sich immer wieder genau in dieselbe einstelle. Diese Trägheit der Nadel rührt aus zwei Ursachen her, nämlich entweder aus ihrer zu geringen magnetischen Kraft, welche die Reibung am Aufhängepuncte nicht zu überwinden vermag, oder aus zu großer Reibung, die auch durch die volle Kraft der Nadel nicht zu wältigen ist. Daher muß das Achathütchen möglichst polirt und mehr flach gerundet, auch die Spitze des Centralstiftes gut gehärtet und zugespitzt sein. Um die Politur und die Stahlspitze zu schonen, darf man daher die Nadel nicht heftig fallen lassen, wenn man sie aus ihrer Arretirung befreien und spielen lassen will.

Um nun die Empfindlichkeit und die freie Bewegung der Nadel gehörig zu prüfen, richtet man die Dioptern auf einen beliebigen Gegenstand und bemerkt auf dem Gradringe den Strich, worauf die Nadel einspielt. Alsdann dreht man das Gehäuse um einige Grade rückwärts oder vorwärts, so daß die Nadel in Schwingungen geräth, und visirt abermals nach dem vorigen Ge-

genstande. Kommt nun die Nadel wieder auf demselben Theilstriche zur Ruhe, so kann man sie für brauchbar halten; im entgegengesetzten Falle aber ist sie gänzlich unbrauchbar. Man kann auch die Nadel durch ein genähertes Stück Eisen aus ihrer Richtung ablenken und in Schwingungen versetzen. Stellt sie sich dann immer wieder auf demselben Theilstrich in Ruhe, wie man auch das Gehäus gestellt haben mag, so kann sie für brauchbar gelten.

§. 116.

Der Reichenbach'sche Distanzmesser.

Unter Distanzmessern versteht man solche Vorrichtungen, mittelst welcher man die Größe einer beliebigen Entfernung bloß durch Beobachtung an einem ihrer Endpuncte finden kann, ohne deßhalb eine andere als Basis dienende Länge unmittelbar abzumessen. Man hat sich vielfach mit diesem Problem beschäftigt und mancherlei zu diesem Zwecke dienende Instrumente in Vorschlag gebracht; doch soll hier nur der Reichenbach'sche Distanzmesser beschrieben werden. Die Theorie desselben ist äußerst einfach. Man denke sich eine in gleiche Theile getheile Latte, welche an dem einen Endpuncte der zu messenden Distanz ausgestellt wird, während man sie am andern Ende unter einem für alle Entfernungen sich gleichbleibenden Sehewinkel betrachtet, so ist klar, daß der Sehewinkel um so mehr Abtheilungen der Latte zwischen seine Schenkel fassen wird, je weiter diese entfernt ist. Aus der Zahl der vom Sehewinkel gefaßten Abtheilungen läßt sich aber auf die Entfernung schließen, und die Latte giebt folglich die Standlinie ab. Weil diese nur klein sein kann, wird die Abmessung sich nicht auf sehr große Entfernungen erstrecken können.

Das Instrument ist, wie das Kippfernrohr eines Meßtisches gebaut und dient auch zugleich als solches. Doch ist das Fernrohr mit einem Gradbogen verbunden, an welchem man seine Elevations- oder Depressionswinkel mit Hülfe eines Nonius gewöhnlich bis auf einzelne Minuten ablesen kann, zu welchem Behufe auch noch eine Feinstellung desselben mit Hülfe einer Micrometerschraube erforderlich wird. Zugleich befindet sich am Instrumente eine Libelle, so vorgerichtet, daß die Axe

des Fernrohres horizontal ist, wenn die Libelle richtig einspielt und der Index des Nonius auf 0° des Höhenkreises steht.

Was aber das Instrument zum eigentlichen Distanzmesser macht, ist die besondere Einrichtung des Fernrohres, welches auf alle Fälle achromatisch sein muß und auch nicht gar zu klein sein darf, um das Sehvermögen mit hinreichender Kraft zu unterstützen. Es hat aber statt eines Oculares deren zwei, von denen das eine, A (Taf. X. Fig. 6), genau in der Axe des Rohres sich befindet (daß seine Axe nämlich mit der des Objectives zusammenfällt); das andere Ocular, B, befindet sich außer der Axe des Rohres in einem unveränderlichen Abstande von A. Im Brennpuncte eines jeden Oculares befindet sich ein Fadenkreuz, von welchem Behufs des Distanzmessens nur der horizontale Faden gebraucht wird. Der Abstand dieser horizontalen Fäden ist es nun eigentlich, welcher keiner Veränderung unterworfen sein darf, wenn das Instrument in der Folge richtige Resultate liefern soll. — Man könnte zwar auch sich bloß des Oculares A bedienen, wenn in seinem Sehefelde zwei parallele Fäden horizontal ausgespannt würden; allein mit zwei Ocularen kann man für's Erste einen größern Abstand jener Fäden erhalten, und dann werden die Fäden auch deutlicher gesehen, weil jeder in der Axe seines Oculares liegt, während bei einem Oculare der eine Faden am Rande des Gesichtsfeldes sich befinden und daher undeutlicher erscheinen würde.

Soll nun diese Vorrichtung als Distanzmesser gebraucht werden, so gehört dazu noch eine hohe Latte K E, welche an dem einen Endpuncte K der zu messenden Länge I K senkrecht aufgestellt ist, während das Instrument über dem andern Endpuncte I (auf einem Meßtische stehend) sich befindet, so zwar, daß die Axe des Rohres A O horizontal gerichtet ist und das Objectivglas senkrecht über I steht. Die Latte ist ihrer Länge nach in gewisse Theile getheilt, und aus der Anzahl der Theile, welche man im Fernrohre durch die Oculare A und B zwischen den beiden horizontalen Visirfäden enthalten sieht, weiß man sogleich die Zahl der Fuße, die auf I K gehen.

Es ist daher nur zu zeigen, auf welche Weise die Latte zu theilen ist. Zu dem Ende stelle man das In-

strument und die Latte auf möglichst horizontalem Boden in einer abgemessenen Entfernung, z. B. von 600 Fuß, auf, richte die Axe des Rohres horizontal gegen die senkrechte Latte **K E** und bemerke auf ihr (mit Zuziehung eines Gehülfen) die Puncte **D** und **E**, welche man in den Ocularen **A** und **B** von den Visirfäden gedeckt sieht. Da auf das Intervall **D E** angenommenermaßen eine Entfernung von 600 Fuß kommt, so theile man es in 600 Theile und trage diese Theile auch von **E** aufwärts auf die Latte, wo dann diese zum Gebrauch richtig getheilt ist. Die Theilstriche werden mit Ziffern bezeichnet, die aber, wegen des astronomischen Fernrohres, verkehrt geschrieben sein müssen. Bei **D**, wo die horizontale Visirlinie die Latte trifft, setzt man 0, und so oft dann die horizontale Visirlinie **A D** auf 0 gerichtet ist, giebt die andere **B E** auf der Latte unmittelbar die Zahl der Fuße an, die auf die Entfernung **I K** gehen. Doch kann man auch an den untersten Theilstrich am Boden 0 setzen, wo man dann die bei **D** stehende Zahl von der bei **E** abziehen muß, um die Theile im Intervall **D E** zu haben.

Der Grund hiervon ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, daß die von den Fäden bei **A** und **B** durch die Mitte des Objectivs gezogenen Visirstrahlen gar keine Brechung im Objectiv erleiden, und daß der Winkel **B O A = E O D** wegen des unveränderlichen Abstandes **A B** ebenfalls unveränderlich ist, wenn anders die Ocularröhre ihre Stelle beibehält und daher auch die Entfernung des Bildes **A B** oder der Fäden bei **A** und **B** vom Objectivglase **O** dieselbe bleibt. Von den beiden Visirlinien **O E** und **O D** werden daher in eben dem Verhältnisse mehr oder weniger Theile der Latte abgeschnitten, als diese mehr oder weniger entfernt ist. Wenn also 600 Theile eine Entfernung von 600 Fuß geben, so kommt, z. B., auf 495 Theile eine Entfernung von 495 Fuß u. s. w.*)

---

*) Streng genommen giebt eine so eingetheilte Latte nicht ihre richtigen Entfernungen vom Objectivglase an, weil die Theorie voraussetzt, daß der Abstand der Fäden vom Objective bei allen Entfernungen der Latte derselbe bleiben soll, während doch, wenn die Latte näher steht, ihr Bild weiter vom Objective wegfällt und daher auch die Ocularröhre sammt den Kreuzfäden wei-

Die Größe der Theilstriche auf der Latte kann man ohngefähr auch vor dem Versuche und hieraus die Länge der Latte für eine gewisse Entfernung bestimmen. Wäre nämlich, z. B., A B = $\frac{1}{2}$ Zoll, O A = 2 Fuß, und O D = 600 Fuß, so ergiebt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke O A B und D O E, D E = 150 Zoll und folglich jeder Theil von D E = $\frac{150}{600}$ = $\frac{1}{4}$ Zoll. Eine Latte zur Abmessung 1000 Fuß großer Entfernungen müßte also über D hinaus noch gegen 11 Fuß hoch sein.

Doch ist das bisher beschriebene Verfahren nur auf horizontalem Boden anwendbar, indem auf stark steigenden Flächen die horizontale Visirlinie A D allzubald den Boden treffen, oder bei starkem Abfall des Bodens die Visirlinie B E über der Latte leicht weggehen könnte. Deshalb wird, z. B., auf steigendem Boden (Fig. 7, Taf. X.) die geneigte Linie I K′ gemessen und dieselbe

---

ter herausgezogen werden muß, damit das Bild der Latte genau wieder in die Ebene der Fäden falle. Hierdurch ändern sich aber nothwendig auch die Winkel A O B und D O E. Obgleich die Unterschiede nur klein sind, so können sie doch auf 1 bis 2 Fuß gehen, und daher verdient bemerkt zu werden, daß der Fehler ganz gehoben wird, wenn man das Instrument so weit hinter den einen Endpunct I′ setzt, daß I I′ der Länge des Fernrohres gleich wird, vorausgesetzt, daß das Objectivglas senkrecht über I sich befindet. — Dieses beweis't sich so: Man setze die Entfernung I′K = D, den Abstand der Fäden A B = h, ihre Entfernung vom Objective O A = I I′ = d, den Winkel A O B = α und das Latteninterval D E = H. Dann ist zuerst I. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{h}{d}$. Wegen der Dicke des Objectives kann man nicht eigentlich annehmen, daß der Strahl B O ungebrochen durch das Objectiv gehe; gewiß wird er aber nur sehr wenig gebrochen, so daß E O D nur wenig von α unterschieden ist und man setzen kann tg E O D = m tg α, wo m eine von den Dimensionen des Fernrohres, den Krümmungshalbmessern seines Objectives und der Dicke der Linsen abhängige Zahl und nur wenig von 1 verschieden sein wird. Hieraus folgt nun II. $ED = OD \,.\, \operatorname{tg} EOD = (D + d)\, m \,.\, \operatorname{tg} \alpha = H$. Wenn dann für eine andere Distanz D′ der Latte h′, α', d′, m′, H′ dieselbe Bedeutung haben, so hat man III. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h'}{\alpha'}$ und IV. $H' = (D' + d')\, m' \operatorname{tg} \alpha'$, folglich wenn man II. mit IV. dividirt: V. $\frac{H}{H'} = \frac{(D + d)\, m \operatorname{tg} \alpha}{(D' + d')\, m' \operatorname{tg} \alpha'}$, oder wenn man statt tg α und tg α' ihre Werthe aus aus I. und III. setzt, $\frac{H}{H'} = \frac{(D + d)\, m\, d' h}{(D' + d')\, m' d h'}$.

mittelst des Neigungswinkels K′IK″ auf die horizontale Entfernung IK″ durch die Formel $IK'' = IK' \times \cos K'IK''$ reducirt. — In der Latte befindet sich nämlich in 5 bis 6 Fuß Höhe über dem Boden eine Durchlochung D und an der Hinterseite ein röhrenförmiger Ansatz mit einem Visir, gleich dem eines Diopterlineals, so zwar, daß die Visirlinie gegen die Länge der Latte senkrecht ist. Der Gehülfe begiebt sich nun mit der Latte nach dem andern Endpuncte K und visirt durch das Diopter nach dem Objectivglase des Instrumentes, während der Beobachter bei I das Fernrohr so lange hebt, bis er zugleich in der in die Axe des Rohres fallenden Visirlinie A O das Visir bei D erblickt. Hat das Visir D mit dem Instrumente gleiche Höhe über dem Boden, so steht die Visirlinie A D auf der Latte senkrecht, und das beobachtete Latteninterval D E giebt die geneigte Entfernung O D. Da das Objectiv O sich loth-

---

Hier ist nun aber $h = h' = AB$, und dann wird auch m′ von m nicht merklich unterschieden sein können, weil doch d und d′ und folglich α und α' nicht viel unterschieden sind. Man hat daher VI. $\frac{H}{H'} = \frac{(D + d)\,d'}{(D' + d)\,d}$. Nach §. 35 ist, wenn p die Brennweite des Objectivs bedeutet, $d = \frac{p\,(D + d)}{D + d - p}$ und $d' = \frac{p\,(D' + d')}{D' + d' - p}$, und obgleich diese Formeln nur für den Fall gelten, daß die Dicke der Linse = 0 ist, so sind sie doch zu unserer Absicht genau genug. Hieraus folgt nun $\frac{H}{H'} = \frac{D + d - p}{D' + d' - p}$, wofür man $\frac{H}{H'} = \frac{D}{D'}$ setzen kann, da d — p und d′ — p äußerst kleine Differenzen sind. Wenn also das Instrument auf die oben bezeichnete Weise gestellt wird, so sind die beobachteten Lattenintervalle den Distanzen der Latte proportional. Für eine solche Stellung des Instrumentes muß daher auch die Latte getheilt werden. Stellt man dann in der Folge das Instrument mit seinem Objective senkrecht über den Endpunct I, so giebt die Beobachtung des Latteninterválles nicht den Abstand IK, sondern I′K, wo II′ der Länge des Fernrohres gleich ist, und diese Länge muß man also noch zur beobachteten Entfernung I′K addiren, um die wahre IK zu erhalten.

Um jedoch diese kleine Weitläufigkeit zu vermeiden, wird man den Punct E, wo der nicht horizontale Visirstrahl die Latte trifft, für Entfernungen von 50 zu 50 Fuß empirisch bestimmen und dann jeden Zwischenraum in 50 Theile theilen.

recht über I befindet, so wird, wenn man von D ein Loth auf den Boden herabläßt, I K' = O D sein, weil auch O D mit I K' parallel ist. Da man ferner am Gradbogen den Höhenwinkel des Fernrohres oder die Neigung der Visirlinie A D gegen den Horizont ablesen kann, so kann man die horizontale Entfernung I K'' leicht nach obiger Formel finden. Zu I K'' muß aber noch das Stück K'' L = L' K hinzukommen, um die horizontale Entfernung zwischen I und K zu erhalten, und dieses Stück ist = D K · sin K D L', wo K D L' dem beobachteten Neigungswinkel der O D gegen den Horizont gleich ist. Um die Addition des Stückes K'' L zu ersparen, hat man bei D ein Loth angebracht, und die Latte wird dann so weit zurückgesetzt, daß das Loth über dem Endpuncte K der zu messenden Distanz einspielt.

Man wird hieraus sich leicht das Verfahren in dem Falle, wo die Latte tiefer steht, als das Instrument, entwickeln können. Es ist aber nicht zu leugnen, daß hierdurch die Anwendung des Distanzmessers beschwerlich und unsicher wird; besonders muß es dem Gehülfen sehr schwer fallen, eine so lange Latte in schräger Richtung festzuhalten.

§. 117.

Von dem Distanzmesser ließe sich ein sehr bequemer Gebrauch machen, um mit Hülfe des Meßtisches Figuren aus einem einzigen Standpuncte aufzunehmen. Da nämlich der Distanzmesser zugleich eine Kippregel mit Fernrohr abgiebt, so kann man auf den Meßtisch von dem Standpuncte K aus (Fig. 10, Taf. VII.) nach den Puncten A, B, C, D, wo die Distanzlatte aufgestellt wird, die Visirlinien K A, K B, K C u. s. w. ziehen und auf dieselben sogleich ihre Maße auftragen, da sich die Abstände K A, K B, K C u. s. w. bei'm Visiren nach der Distanzlatte zugleich mit ergeben. In solcher Weise ist der Distanzmesser wirklich gebraucht worden; doch scheint es, daß man ihn, theils weil er nicht die erforderliche Genauigkeit gewährte, theils weil sein Gebrauch mit vielen Unbequemlichkeiten verbunden war, zeitig wieder bei Seite legte.

Zum Auftragen der mit dem Distanzmesser gemessenen Linien kann man sich eines Stangenzirkels bedienen, auf dessen Stange ein Maßstab sich befindet, der durch

einen an dem verschiebbaren Fuße befindlichen Nonius die kleineren Theile in den Entfernungen seiner Spitzen giebt.

§. 118.

Der Theodolit.

Seinen Hauptbestandtheilen nach besteht dieses Instrument aus einem horizontalen Kreise zur Messung von Azimuthalwinkeln und einem darauf senkrechten zweiten Kreise zur Messung von Höhenwinkeln. Es läßt sich somit ganz mit dem Meßtische vergleichen, denn wenn man statt der Meßtischplatte einen eingetheilten Kreis sich denkt, um dessen Mittelpunct das Lineal der Kippregel (die Albidade) beweglich ist und auf diese Weise den durchlaufenden Winkel auf dem Limbus in Graden nachweis't, so hat man den Theodoliten in seiner rohesten Gestalt. Hierin kommen also auch alle von verschiedenen Künstlern gebauten Exemplare überein, obschon mancherlei noch sonst zu berücksichtigende Erfordernisse durch verschiedene Mittel und auf verschiedene Weise bezweckt worden sind.

Die von dem Mechanicus Breithaupt in Cassel verfertigten und zum Multipliciren oder Repetiren der Horizontalwinkel bestimmten Theodoliten haben die in Fig. 1 (Taf. XI.) ersichtliche Einrichtung. Ehe wir aber zur Beschreibung der einzelnen Theile des Instrumentes übergehen, wird es gut sein, vorher einen Begriff von der Multiplication der Winkel zu geben. Es sei also ACB (Taf. X., Fig. 8) der zu messende Winkel, über dessen Scheitel der Mittelpunct des eingetheilten Kreises **MN** aufgestellt ist. Die Alhidade **CD** sei, während sie auf dem Nullpuncte der Theilung steht, nach dem Objecte **A** gerichtet und werde dann, ohne daß der Kreis **MN** verrückt wird, um den Mittelpunct **C** in die Richtung **CB** gedreht, so wird sie bei **D'** auf dem Limbus die Zahl der Grade des Winkels **ACB** nachweisen. Man drehe nun, ohne die Alhidade zu verrücken, den Kreis **MN** so weit zurück, daß die Alhidade wieder in die Richtung **CA** kommt, führe aber diese alsdann, ohne die Stellung des Kreises zu ändern, wieder auf das Object **B**, so wird man begreiflich auf der Theilung den doppelten Winkel **ACB** ablesen. Durch Wiederholung dieses Verfahrens

wird man nun jedwedes Vielfache eines zu messenden Winkels finden und hieraus auch durch Division den Winkel selbst ableiten können. Der Zweck und die Vortrefflichkeit dieses Verfahrens in Hinsicht auf die Genauigkeit der Resultate ist nicht schwer einzusehen. Wegen der Unvollkommenheit unserer Instrumente werden nämlich die gemessenen Winkel immer mit Fehlern behaftet sein; aber der Fehler des nach dem obigen Verfahren gefundenen zehnfachen Winkels ist nicht gerade auch zehnmal so groß, als der des unmittelbar vom Instrumente abgelesenen einfachen Winkels. Wenn daher aus dem zehnfachen Resultate durch Division mit 10 der einfache Winkel abgeleitet wird, so muß derselbe weit richtiger und schärfer gefunden werden. Welche Fehler des Instrumentes aber durch das Repetiren beseitigt werden können, wird in der Folge gezeigt werden.

§. 119.

Wir kommen nun zur Beschreibung des in Fig. 1 (Taf. **XI.**) vorgestellten Theodoliten. Das ganze Instrument ruht mittelst eines Dreifußes auf drei Stellschrauben **II**, welche aufgeschlitzte Muttern haben, die durch die Schrauben **XX** mehr oder minder zusammengezogen werden können, um den mit der Zeit entstehenden todten Gang der Stellschrauben zu beseitigen. Die Stellschrauben haben unten conische Spitzen von Stahl, und um diese vor Abnutzung zu sichern, werden sie auf messingene Tellerchen **YY** mit ebenfalls conischen Vertiefungen gesetzt. Mittelst der Stellschrauben **II** kann man nun jedesmal die Umdrehungsaxe des Horizontalkreises genau senkrecht, also diesen Kreis selbst genau horizontal richten.

Auf dem Dreifuß ist senkrecht die cylindrische Büchse **K** befestigt, in welcher sich die glockenmetallene Axe des Horizontalkreises **HH** dreht. Diese Axe ist wiederum conisch ausgehöhlt, und in der Höhlung bewegt sich die stählerne Axe der scheibenförmigen Alhidade **N**. Hierdurch werden die beiden zum Multipliciren der Winkel nothwendigen Drehungen erzielt; man kann nämlich nicht nur den Horizontalkreis **HH** sammt der Alhidade beliebig drehen, sondern auch die Alhidade selbst in dem ruhenden Horizontalkreise rings herumführen. Dadurch, daß die

Büchse K und die beiden Axen aus verschiedenem Metall gearbeitet sind, wird die Reibung möglichst vermindert.

Die Micrometervorrichtung Q P dient zur feinen Drehung des Horizontalkreises sammt der Alhidade und dem darauf ruhenden Verticalkreise. An der Hülse K ist ein Arm und an diesem die Klemme Q befestigt, in welcher die kugelförmige Mutter v der Micrometerschraube in polirten Lagern von Stahl festgehalten wird. Zwei Plättchen R nehmen einen am Horizontalkreise festsitzenden Reif zwischen sich, und so lange diese Plättchen gelüftet sind, kann man den Horizontalkreis nach Gefallen mit der Hand drehen; wenn man sie aber mittelst der Schraube S zusammenklemmt, wird jene grobe Drehung aufgehoben und es ist nur noch ein kleiner Spielraum zur feinen Drehung des Horizontalkreises mittelst der Micrometerschraube P übrig. An dem untern der beiden Plättchen R ist nämlich die Klemme für die zweite Mutter w der Micrometerschraube befestigt, welche ebenfalls kugelförmig gestaltet ist und in polirten Stahllagern ruht. Die Schraube P hat aber bei v und w verschiedene Gewinde und würde daher gar nicht umgedreht werden können, wenn beide Muttern unbeweglich fest wären, denn sie würde bei v und w durch ungleiche Räume sich bewegen müssen, was unmöglich ist. Wenn aber eine der Muttern noch beweglich ist, so wird sie bei der Umdrehung der Schraube ihre Bewegung äußern. Dieses ist nun die Mutter w, welche bei ihrer Bewegung den Horizontalkreis mit fortführt. Die Feinheit der Fortrückung ist hier nicht sowohl durch die Feinheit der Schraubengänge, als vielmehr durch den Unterschied ihrer Weite bei v und w bedingt. Weil die Muttern polirte Stahllager haben, so sind sie sehr leicht darin beweglich und fügen sich willig nach der Richtung der Micrometerschraube, was zur Vermeidung des todten Ganges viel beiträgt. Zu dem Ende sind sie auch an der einen Seite aufgeschlitzt und können durch Hebung des unteren Stahllagers so viel zusammengeklemmt werden, daß aller todte Gang beseitigt wird. Das untere Lager besteht nämlich aus einem in den Theil u der Klemme eingesetzten Cylinder, der durch eine starke Feder aufwärts gedrückt wird, deren Spannkraft durch Anziehen von ein Paar Schräubchen sich erhöhen läßt.

Die scheibenförmige Alhidade **N** bedeckt mit ihrer Fläche den ganzen Horizontalkreis und seinen Limbus, ohne jedoch an ihm irgendwo anzustreifen. Mit einem auf ihrer Fläche senkrecht befestigten Reife greift sie selbst über den Rand des Horizontalkreises herunter, und damit hier (von unten her) kein Staub eindringen könne, ist in den Rand des Horizontalkreises ringsum eine Nuth eingearbeitet, in welche eine Schnur eingelegt ist, an welcher jener Reif der Alhidade anstreift. Da wo, die Theilung aufgetragen ist, hat der Kreis die Form eines abgestumpften Kegels, damit man die Theilung besser sehen könne und bei'm Ablesen die oberen Theile des Instrumentes nicht mit dem Kopfe anstoße. An den Stellen, wo die Nonien p p sich befinden, ist die Alhidade durchbrochen, und die Oeffnungen sind mit Gläsern verschlossen, deren Flächen genau nach der Gestalt des Limbus conisch geschliffen und einander parallel sind, weßhalb sie nur als Plangläser wirken. Die Nonien p p sind in die Oeffnungen von unten her an die Alhidade angeschraubt und können mittelst besonderer Schräubchen immer wieder in die Fläche des Limbus gebracht werden, wenn sich mit der Zeit die Axe der Alhidade tiefer in die des Limbus eingeschliffen haben sollte. Ihrer sind 4 um 90 Grad gegenseitig abstehende, wenigstens aber zwei genau entgegengesetzte, wovon der Zweck später einleuchten wird. Die Theilung des Horizontalkreises, welcher 8 Zoll Durchmesser hat, ist auf Silber getragen, und geht mittelst des Nonius unmittelbar bis zu 10 Secunden.

Die Micrometerschraube **O** dient zur feinen Stellung der Albidade. Ihre Einrichtung ist dieselbe wie bei **P**, auch sind hier dieselben Theile mit denselben Buchstaben bezeichnet, wie dort. Die Klemme **t** ist an der Alhidade befestigt; die beiden Plättchen **R** sitzen an einem am Horizontalkreise befindlichen Reife.

Um den Stand der Nonien genau beobachten zu können, sind die Loupen **U** angebracht, welche sich um den Centralzapfen der Alhidade **V** drehen. Sie werden durch die Kopfschraube **V** so gehalten, daß jede beliebige Stellung leicht möglich ist. Sie haben eine etwas geneigtere Lage mit der Fläche des Limbus, wie dieses eben wohl bei einer horizontal liegenden (Limbusfläche) der Fall ist. Damit nun aber bei'm Ablesen der Theilung

der kleine Zwischenraum, welchen die Nonien mit dem innern Rande des Limbus streng genommen haben müssen, doch unbemerkbar bleibe, brauchen die Nonien nur ein Geringes gegen die Fläche des Limbus tiefer gelegt zu werden.

Um nun die Loupen mit mehr Sicherheit stellen zu können, was bei dem bereits erwähnten Umstande, daß die Nonien stets etwas unter der Fläche des Limbus liegen müssen, von vorzüglicher Wichtigkeit ist, sind Zeiger **W** an denselben angebracht, deren Endspitzen so nahe als möglich über der Theilung des Limbus hinwegstreichen und genau in die Sehlinie (Axe) der Loupe gerichtet sind. Werden nun bei'm Ablesen eines Nonius die Loupen so gestellt, daß die Spitze des Zeigers **W** über den Limbustheil zu stehen kommt, welcher mit einem Theilstrich des Nonius deckt, so ist man versichert, daß man stets den richtigen Noniustheil ablesen wird. Man bemerkt übrigens noch an der Rückseite der Loupen die Blendrähmchen, welche dazu dienen, eine passende Beleuchtung auf den Limbus zu bringen.

Auf der Alhidade **N** sind die Träger **A A** befestigt, auf denen die cylindrischen Stahlzapfen des Höhenkreises **B** und des damit verbundenen Fernrohrs aufruhen. Die Axenlager sind so ausgefeilt, daß sie von den gedachten Zapfen nur in vier Puncten berührt werden; auch können sie mit Leichtigkeit durch ein Paar oben aufgeschraubte Plättchen geöffnet oder geschlossen werden.

Der Nonius des Verticalkreises ist bei **L** an den Trägern befestigt, und zur genauen Beobachtung desselben ist ebenfalls eine Loupe (von der nur der Arm **E** sichtbar ist) angebracht; zur feinen Bewegung aber dient eine Micrometervorrichtung von eben der Beschaffenheit, wie die oben beschriebenen. Die eine Mutter der Micrometerschraube wird in der Klemme **d**, die an der Noniusplatte befestigt ist, festgehalten; die Klemme der andern Mutter befindet sich an einer der beiden Platten, zwischen welchen der Rand des Verticalkreises hinstreicht. Werden diese Platten durch die hindurchgehende Schraube zusammengeklemmt, so ist die Drehung des Verticalkreises um seine Axe aufgehoben; derselbe kann aber noch mittelst der Micrometerschraube langsam durch einen kleinen Raum fortgeführt werden. Man begreift übrigens,

daß bei dieser Einrichtung der Verticalkreis sich aus seinen Lagern leicht ausheben und umlegen läßt.

Das eine Axenlager läßt sich erhöhen oder erniedrigen, um die Verticalbewegung des Fernrohrs zu berichtigen. Bei'm Erhöhen desselben werden die zwei Schrauben m m zurückgeschraubt und n angezogen; im andern Falle zieht man n zurück und m m an.

Das Fernrohr ist achromatisch und 17 Zoll lang, mit 18 Linien Oeffnung und 30facher Vergrößerung, während bei den bisherigen Theodoliten von dieser Größe nur 12zöllige Fernröhre im Gebrauch waren. Der Künstler bezweckt durch das längere Fernrohr eine größere Genauigkeit im Pointiren. Die Schraube f dient, das Ocularrohr gehörig ein= oder auszuschieben, um das Bild deutlich zu sehen. Das Fadenkreuz besteht aus zwei parallelen Verticalfäden und einem dritten horizontalen. Mittelst der vier Schräubchen b kann es sowohl in der horizontalen als in der verticalen Richtung von Außen her verschoben und berichtigt werden.

Die Libelle F hat zwei gabelförmige Füße Z Z, welche auf die Zapfen der Fernrohraxe aufgesetzt werden. Hierdurch wird, wie wir später sehen werden, der horizontale Stand des Azimuthalkreises und die horizontale Lage der Fernrohraxe hergestellt. Die Glasröhre ruht in dem messingenen Mantel auf einer Feder, wodurch sie nach oben gedrückt wird. Durch das Schräubchen a, welches von oben her auf die Glasröhre wirkt, kann die Libelle dann gehörig berichtigt werden.

Bei diesem Theodoliten ist das Versicherungsfernrohr weggelassen, welches sonst gewöhnlich an den multiplicirenden Instrumenten angebracht ist und dazu dient, den Beobachter vom unverrückten Stande des Instrumentes während der Operation des Winkelmessens zu überzeugen. Es wird unter dem Horizontalkreise an der Büchse K angebracht, hat eine Vorrichtung zur horizontalen und verticalen Drehung und eine Micrometerschraube, mittelst welcher es auf einen bestimmten Gegenstand genau eingestellt werden kann. Bleibt dieser während der Beobachtung immer vom Visirfaden des Versicherungsfernrohres gedeckt, so kann sich das Instrument auf seinen Füßen nicht verrückt haben.

Entweder setzt man den Theodoliten auf ein steinernes Postament oder in Ermangelung dessen auf ein Sta-

tiv, das dem Meßtischstativ ähnlich ist, und dessen Füße sich erforderlichen Falls verkürzen lassen. Durch ein Loth, welches vom Mittelpuncte des Dreifußes durch ein im Stativkopfe befindliches Loch herabhängt, kann man das Centrum des Instrumentes genau über den Scheitel des zu messenden Winkels bringen. Hier wird dem Instrumente noch ein festerer Stand dadurch gegeben, daß durch den Stativkopf ein Haken hindurchgeht und in ein unten am Dreifuß befindliches Oehr greift. Mittelst einer Schraube G, die gegen eine Spiralfeder wirkt, kann dieser Haken angezogen und dadurch das Instrument fest gegen den Stativkopf gedrückt werden. Die Einrichtung ist der bei'm Meßtisch beschriebenen ganz ähnlich.

§. 120.

1) Der soeben beschriebene Theodolit multiplicirt zwar die Horizontalwinkel, nicht aber auch die Höhenwinkel. Zu letzterem Behufe müßte der Verticalkreis ebenfalls aus zwei concentrischen Kreisen zusammengesetzt sein, so daß man nach Bedürfniß beide mit einander oder auch nur den innern drehen könnte, während der äußere ruht; das Fernrohr müßte dann mit dem innern Kreise fest verbunden sein, so daß die Zusammenordnung dem multiplicirenden Horizontalkreise ganz analog wird. Die Multiplication eines Höhenwinkels ist aber wesentlich von der eines Azimuthalwinkels verschieden, weil die Richtung des einen horizontalen Schenkels nicht durch ein bestimmtes Object bezeichnet ist. Wir werden jedoch das Nöthige hierüber weiter unten vorbringen. — Es können allerdings Höhenwinkel auch mit einem Kreise, der, wie es bei dem im vorigen §. beschriebenen Theodoliten der Fall ist, an einem festen Nonius oder an einer unbeweglichen Alhidade hinstreicht, multiplicirt werden, nur muß dann das Fernrohr um die horizontale Axe allein sich drehen lassen, ohne daß der Verticalkreis verrückt wird, und muß man auch beide zugleich um ihre gemeinschaftliche Axe bewegen können.

2) Solche Theodoliten, welche zu secundären geodätischen Arbeiten und überhaupt zu solchen Messungen gebraucht werden, bei denen es auf eine Genauigkeit bis auf einige Secunden nicht ankommt, repetiren die Winkel nicht und sind dann begreiflich auch beträchtlich wohlfeiler.

Instrumente der Art stimmen in ihrem Baue ganz mit dem beschriebenen überein, nur ist der Horizontalkreis auf der Büchse K (Taf. XI., Fig. 1) fest und in dieser dreht sich unmittelbar die Alhidadenaxe. Das Versicherungsfernrohr bleibt ebenfalls weg, weil es keinen Nutzen gewähren würde.

3) Wenn das Fernrohr des Verticalkreises sehr hoch gehoben werden muß, so wird das Hineinsehen sehr unbequem. In diesem Falle bedient man sich statt des gewöhnlichen Oculares eines sogenannten prismatischen *), wodurch man in den Stand gesetzt wird, von oben herein, senkrecht gegen seine Länge, in das Fernrohr zu sehen, was bei großen Erhebungswinkeln von besonderem Vortheil ist. Ja der Bequemlichkeit des Visirens halber bricht man das Fernrohr da, wo es auf der Axe des Verticalkreises aufsitzt, unter einem rechten Winkel, so daß der Theil, in welchem das Ocular befestigt ist, in die Richtung dieser Axe zu liegen kommt, die zu dem

---

*) Weil die prismatischen Oculare, die auch catoptrische Prismen heißen, neuerdings häufiger in Gebrauch gekommen sind, so wird es angemessen sein, hiervon eine Beschreibung zu geben. Man denke sich also ein Stück Glas von drei Ebenen AB, AC, BC (Taf. X., Fig. 9) so begrenzt, daß ein dreiseitiges Prisma gebildet wird, von welchem jeder senkrechte Durchschnitt ein gleichschenklich rechtwinkliches Dreieck ABC bildet, unter A den rechten Winkel verstanden. Es falle dann ein Lichtstrahl HD senkrecht auf die Kathetenfläche AC, so gelangt derselbe ohne Brechung bis an die Hypotenusenfläche BC bei E. Weil er schief (unter 45° Neigung) gegen die Fläche auffällt, so müßte er beim Austritt aus dem Glase eine Brechung erleiden; allein da der Brechungssinus hier größer als 1 und folglich die Brechung unmöglich wird, so wird der Strahl bei E wie von einem Spiegel reflectirt (§. 33 am Ende) und tritt in der Richtung EO wieder aus dem Prisma heraus. Diese Vorrichtung wirkt also gerade so, als wenn die Hypotenusenfläche CB ein Planspiegel, im Uebrigen aber die Glasmasse ABC gar nicht da wäre, und ein Auge bei O sieht den Gegenstand H in H'. Wenn aber noch überdies die beiden Kathetenflächen AB und AC sphärische Krümmungen erhalten, so wirken sie gerade so, wie eine gewöhnliche Linse, ohne daß jedoch die Spiegelung an der Hypotenusenfläche aufgehoben würde. Bringt man also ein so gestaltetes Prisma an die Stelle des Oculares so in ein Fernrohr, daß die Hypotenusenfläche mit der Axe einen Winkel von 45° macht, so werden von dieser die Strahlen nach der Seite des Rohrs reflectirt, auf dieselbe Weise, wie wenn man hinter das gewöhnliche Fernrohr einen unter 45° geneigten Planspiegel stellte.

Ende hohl ist. Die durch das Objectivglas in das Rohr gelangenden Strahlen werden durch einen im Knie befindlichen und gegen die Axe des Rohres unter 45° geneigten Planspiegel nach vorn geführt. Hierdurch bezweckt man also, daß man immer in horizontaler Richtung in das Fernrohr hineinsieht, welche Neigung gegen den Horizont dieses auch haben mag.

§. 121.

Ehe man aber zur Beobachtung mit einem Theodoliten schreiten kann, muß derselbe gehörig rectificirt werden, wozu Folgendes gehört:

1) Berichtigung der Libelle **F** (Fig. 1, Taf. **XI**.). Man setze, nachdem man das Instrument auf seinen Fußschrauben beiläufig in eine horizontale Lage gebracht hat, die Libelle mit ihren gabelförmigen Füßen auf die Zapfen des Verticalkreises **B**, drehe bei angezogener Bremsschraube **S** des Limbus die Alhidade so, daß die Libelle mit der Richtung zweier Fußschrauben **I I** parallel wird und bringe mittels einer derselben die Blase in die Mitte. Hierauf hebe man die Libelle von den Zapfen ab und setze sie in umgedrehter Lage wieder auf, und wenn dann die Blase abweicht, so bessere man die Hälfte der Abweichung durch eine Fußschraube, die andere Hälfte durch die Correctionsschraube **a** der Libelle. Dieß muß so lange wiederholt werden, bis keine Abweichung mehr bemerkt wird, wo dann die Libellenaxe und die Linie durch ihre Unterstützungspuncte parallel und beide horizontal sein werden.

2) Daß die Umdrehungsaxe des Verticalkreises **B** mit der Ebene des Limbus parallel oder gegen die Alhidadenaxe senkrecht sei. Wenn die Libelle so justirt worden ist und ihre Blase auf den Zapfen des Verticalkreises richtig einspielt, dreht man die Alhidade genau um 180° herum, daß also die Libelle zu ihrer vorigen Lage immer noch parallel bleibt. Weicht dann die Blase aus der Mitte ab, so corrigirt man die eine Hälfte durch eine der beiden Fußschrauben, die andere durch Hebung oder Senkung des Axenlagers mittels der Schräubchen **mm** und **n**. Auch diesen Versuch wird man so lange wiederholen müssen, bis keine Abweichung mehr bemerkt wird.

3) Daß die Ebene des Limbi horizontal, oder daß seine Axe sammt der der Alhidade ge-

nau vertical sind. Wie vorhin, wird auch bei der Horizontallegung des Limbus die (corrigirte) Libelle mit zwei Fußschrauben parallel gestellt und durch eine derselben zum Einspielen gebracht, wodurch der Limbus nach dieser Richtung horizontal wird. Um ihn dann nach allen Richtungen horizontal zu stellen, führt man die Libelle durch Drehen der Alhidade über die dritte Fußschraube, daß sie also gegen ihre vorige Richtung senkrecht zu stehen kommt, und bringt mittelst dieser Fußschraube die Libelle abermals zum Einspielen, und diesen Versuch wiederholt man so oft, bis alle Abweichung in beiden Lagen der Libelle verschwunden ist.

Eigentlich wird hierdurch die Axe der Alhidade vertical gestellt. Da aber auch die Axe des Limbus vertical sein muß, so sieht man, daß der Künstler dafür Sorge zu tragen hat, daß beide Axen (in der Büchse K die des Limbus und in dieser die der Alhidade) sich concentrisch, d. h., um dieselbe geometrische Linie drehen. Ob dieses der Fall ist, erfährt man, wenn man, nach Verticalstellung der Alhidadenaxe, auch den Limbus sammt der Alhidade umdreht und zusieht, ob die Blase in jeder Lage richtig einspielt.

Wenn die Alhidadenaxe nach Nro. 3 vertical gestellt worden, so liegt die des Verticalkreises genau horizontal. Es wird aber rathsam sein, nach erhaltener Verticalität der Alhidadenaxe, die Versuche in 1 und 2 nochmals zu wiederholen, um eine etwa noch vorhandene kleine Abweichung vollends zu verbessern.

Genau genommen, wird nicht die Horizontalität der Umdrehungsaxe des Verticalkreises, sondern der Linie, welche durch die Stützpuncte der Libellenfüße geht, erhalten. Wenn zugleich auch jene Axe mit horizontal werden soll, so müssen die Durchmesser der Zapfen genau gleich sein. — Wenn bei'm Auf- und Niederbeugen des Fernrohres die Blase Schwankungen macht, so sind die Zapfen des Verticalkreises nicht rund.

4) Daß die Visirlinie gegen die Umdrehungsaxe des Verticalkreises senkrecht sei. Wenn der Limbus horizontal gestellt, und überhaupt die vorigen Berichtigungen ausgeführt worden sind, richte man das Fernrohr, nach Beseitigung der optischen Parallaxe (§. 44 und 64, 2 a) auf einen fernen und wohlbegrenzten Gegenstand und lese den Stand des einen Nonius

ab. Es wird am Besten sein, das Fernrohr erst nahe auf das Object zu drehen, dann die Preßschraube der Alhidade zu schließen, den Index des Nonius genau auf den nächsten Theilstrich des Limbus mittels der Micrometerschraube einzustellen und hierauf den Visirfaden mit Hülfe der Micrometerschraube des Limbus auf das Object zu führen. Zeigt nun, z. B., der Nonius gerade 36° 20', so führe man ihn um 180° weiter, nämlich auf 216° 20', und stelle die Alhidade wieder fest. Alsdann drehe man das Fernrohr, welches die entgegengesetzte Lage angenommen hat, um seinen Zapfen wieder dem vorigen Gegenstande zu, oder wenn es sich nicht umschlagen läßt, so hebe man es aus seinen Pfannen und lege es in der erforderlichen Lage wieder ein. Weicht hier der Visirfaden vom Objecte ab, so muß man die Hälfte der Abweichung durch Verstellen des Fadenkreuzes mittelst der Schräubchen bb corrigiren, wobei man am zweckmäßigsten so verfährt: Man bringe mittels der Micrometerschraube der Alhidade das Fernrohr wieder auf seinen Gegenstand zurück und lese den Stand des Nonius ab, durch dessen Vergleichung mit der vorigen Lesung sich der Bogen ergiebt, durch welchen das Fernrohr geführt wurde. Stellt man hierauf das Fernrohr um die Hälfte dieses Bogens wieder zurück und führt dann den Visirfaden mittels der Schräubchen bb auf das Object, so ist die Visirlinie berichtigt.

Sehr wesentlich ist es hierbei, ein solches Object zu wählen, wobei das Fernrohr sehr nahe in horizontale Lage kommt. Es verschwindet dadurch der Einfluß der nicht genauen Horizontalität der Drehungsaxe (§. 64), und wenn man alsdann den Versuch auf dieselbe Weise mit einem Objecte wiederholt, welches eine sehr große Hebung oder Senkung des Fernrohres erfordert, so kann man auch die Abweichung der Drehungsaxe von der Horizontallinie erfahren und dieselbe durch die Schräubchen mm und n verbessern.

5) Die Senkrechtstellung der verticalen Visirfäden setzt die Horizontalität der Drehungsaxe des Verticalkreises voraus. Wenn diese erhalten ist, so braucht man bloß das Fernrohr nach einem scharf begrenzten Objecte zu richten und zuzusehen, ob dasselbe beständig vom Faden gedeckt wird, oder genau

in der Mitte der Parallelfäden bleibt, wenn man das Fernrohr hebt oder senkt.

Hauptregel bleibt es bei diesen Berichtigungen, sowie bei'm Gebrauche des Instrumentes überhaupt, daß der todte Gang der Micrometer- oder Stellschrauben gehörig corrigirt sei.

§. 122.

1) Das Verfahren, mit Hülfe des Theodoliten Winkel durch Multiplication zu messen, ist nun Folgendes: Nachdem man das Instrument horizontal gestellt und überhaupt von seinen Fehlern befreit hat, richtet man das Prüfungsrohr (wenn eins vorhanden) nach einem wohlbegrenzten und gut beleuchteten Gegenstande, von dem zu erwarten steht, daß er während der Beobachtung sein Licht nicht ändert. Den einen Nonius stellt man, in der Regel, auf 0° der Theilung. Nach dieser Vorbereitung lös't man, während die Bewegung der Alhidade gehemmt bleibt, die Preßschraube des Limbus, dreht diesen mit der Hand, bis das Signal des linken Richtpunctes (A) im Fernrohre erscheint, wenn die Theilung des Limbus von der Rechten nach der Linken gezählt wird; hingegen wird mit dem Signale rechter Hand der Anfang gemacht, wenn die Zahlen von der Linken zur Rechten gestochen sind. Hierauf schließt man wieder die Preßschraube des Limbus, stellt mittels dessen Micrometerschraube das Fernrohr genau auf das Signal A ein und lies't die Angabe des Nonius genau ab.

Nun lös't man die Preßschraube der Alhidade, dreht diese, bis der andere Richtpunct B im Fernrohre erscheint, zieht die Preßschraube wieder zu und führt das Fernrohr mittels der Micrometerschraube der Alhidade genau auf das Signal B, worauf abermals der Stand des Nonius abgelesen wird. Zieht man die erste Angabe von der zweiten ab, so hat man den gesuchten Winkel; doch wollen wir, der Einfachheit wegen, annehmen, daß die erste Angabe des Nonius 0° sei, so daß die zweite den Winkel unmittelbar giebt.

Da jedoch diese erste Ablesung mit den Fehlern der Theilung und der Excentricität behaftet ist, so wiederholt man die Beobachtung auf folgende Weise: Man lös't wieder die Preßschraube des Limbus, dreht diesen, bis das Signal A im Fernrohre erscheint, zieht die Preß-

schraube wieder zu und bringt mittelst der Micrometerschraube das Fernrohr genau auf das Signal. Hierauf lüftet man den Halter der Alhidade, dreht diese, bis das Signal B im Fernrohre erscheint, zieht die Presse wieder zu und stellt das Fernrohr mittelst der Micrometerschraube der Alhidade genau auf das Signal B. Wird jetzt die Angabe des Nonius abgelesen, so hat man den doppelten Winkel, und so kann man allmählig zu jedem Vielfachen des Winkels fortschreiten, immer zugleich im Versicherungsfernrohre nachsehend, ob sich der Stand des Instrumentes nicht geändert hat.

2) Gewöhnlich lies't man nur die 5=, 10=, 15=, 20fachen des Winkels auf dem Limbus ab und ermittelt hieraus die Einfachen, die anfangs um einige Secunden differiren, später aber bis auf die Secunde übereinstimmen werden, wenn bei der Messung kein grober Fehler vorgegangen und das Instrument sonst gut gebaut ist. Daher der Ausdruck, der Winkel sei bis auf die stehende Secunde gemessen worden. — Da aber die Vielfachen bald über die Peripherie hinausgehen und der Kreis nur den Ueberschuß über die volle Anzahl von Peripherieen angeben kann, so muß man zu der Angabe des Nonius die verlorenen Peripherieen addiren, ehe man durch Division den einfachen Winkel ableiten kann. Man habe, z. B., abgelesen

bei'm	Vfachen	Winkel	275°	4'	25''
=	X	=	190	9	0
=	XV	=	105	14	5
=	XX	=	20	19	0
=	XXV	=	295	23	25
=	XXX	=	210	27	50.

Hat man nun bei'm einfachen Winkel bemerkt, daß derselbe 55° 1' beträgt, so sieht man, daß der 5fache noch nicht über die Peripherie geht. Das 10fache aber ist größer als 1, das 15fache größer als 2, das 20fache größer als 3 Peripherieen, und man muß also zur Ablesung des 10=, 15= und 20fachen Winkels bezüglich 360°, 720°, 1080° addiren, um die wahren Werthe dieser Vielfachen zu haben. Man hat daher

den Vfachen Winkel = 275° 4' 25'', also den einfachen = 55° 0' 53'',00;

den Xfachen Winkel = 550° 9′ 0″, also den einfachen = 55° 0′ 54″,00;
den XVfachen Winkel = 825° 14′ 5″, also den einfachen = 55° 0′ 56″,33;
den XXfachen Winkel = 1100° 19′ 0″, also den einfachen = 55° 0′ 57″,00;
den XXVfachen Winkel = 1375° 23′ 25″, also den einfachen = 55° 0′ 56″,20;
den XXXfachen Winkel = 1650° 27′ 50″, also den einfachen = 55° 0′ 55″,67.

Solche Beobachtungen, welche, wie hier die erste und zweite, beträchtlich von den übrigen abweichen, schließt man wohl ganz aus. Nimmt man dann aus den übrigen das Mittel, so erhält man 55° 0′ 56″,3. Nimmt man alle Beobachtungen zusammen, so erhält man den 105fachen Winkel = 5776° 37′ 45″ und hieraus den einfachen 55° 0′ 55″,86.

3) Da aber der Kreis nicht einen Nonius, sondern deren vier (wenigstens zwei genau gegenüberstehende) hat, die gegenseitig um einen Viertelkreis von einander abstehen, so werden auch bei jedem Ablesen die Angaben aller vier Nonien aufgezeichnet, wodurch die Fehler der Theilung, und besonders der Excentricität, viel sicherer und gründlicher eliminirt werden, als bei einem Nonius. Wenn der eine Nonius auf 0° steht, so müßten die anderen auf 90°, 180° und 270° stehen, was jedoch, wegen der noch übrigen Mangelhaftigkeit des Instrumentes, selten der Fall ist. Man addirt daher zur Ausgleichung des Fehlers die Angaben der Nonien bei jeder Ablesung und zieht von der Summe die Summe der bei der ersten Ablesung gefundenen Angaben ab. Der Rest ist, wenn die erforderliche Anzahl von Peripherieen addirt wird, immer das 4nfache des Winkels, wenn n die Zahl der Multiplicationen bedeutet, z. B., das 20fache bei 5maliger Wiederholung. Folgendes Beispiel wird die Sache deutlicher machen.

Stand des Kreises im Anfange.

		°	′	″
1ster	Nonius	0°	0′	0″
2ter	"	269	59	40
3ter	"	179	59	45
4ter	"	89	59	40
	Summe	539	59	5.

Stand des Kreises bei der fünfmaligen Wiederholung.

1ster	Nonius	275°	4′	25″	(einfacher Winkel beiläufig 55° 1′)
2ter	„	185	4	13	
3ter	„	95	4	25	
4ter	„	5	4	38	
	Summe	560	17	41	
	abgezogen	539	59	5	
	Rest	20	18	36	
	addirt	1080			
20facher	Winkel	1100	18	36	
1facher	„	55	0	55″,80.	

Stand des Kreises bei der zehnfachen Wiederholung.

1ster	Nonius	190°	9′	0″
2ter	„	100	8	58
3ter	„	10	9	23
4ter	„	280	9	8
	Summe	580	36	29
	subtrahirt	539	59	5
	Rest	40	37	24
	addirt	2160		
40facher	Winkel	2200	37	24
1facher	„	55	0	56″,10.

Stand des Kreises bei der fünfzehnfachen Wiederholung

1ster	Nonius	105°	14′	5″
2ter	„	15	14	20
3ter	„	285	14	10
4ter	„	195	14	0
	Summe	600	56	35
	subtrahirt	539	59	5
	Rest	60	57	30
	addirt	3240		
60facher	Winkel	3300	57	30
1facher	Winkel	55	0	57″,5

u. s. w.

4) Die Data einer Winkelmessung werden am Besten in eine Tabelle getragen, um die Uebersicht möglichst zu erleichtern. Es werden darin alle Umstände bemerkt, welche auf die Winkelmessung Bezug oder Einfluß haben, der Name des Standpunctes und der Richtobjecte, der Tag der Messung, die zum Centriren erforderlichen Data, wenn der Winkel excentrisch gemessen worden (§. 23, 8), besonders aber auch die Witterung und vorzüglich der Grad der Beleuchtung der Richtobjecte, weil hiernach ganz besonders die Genauigkeit der Winkelmessung beurtheilt werden muß. Ein fernes Object läßt sich um so weniger sicher pointiren, je schwächer es beleuchtet ist, und wenn die Beleuchtung sich ändert, so visirt man leicht auch einen andern Punct an. — Wenn runde Objecte von der Sonne schief beleuchtet sind, so hält man leicht einen Punct für ihre Mitte, der es nicht ist, indem man durch die Abgrenzung zwischen Schatten und Licht irre geführt wird. Man hat zwar Rechnungen, um diesen Fehler nach dem Stande der Sonne zu verbessern, indem man die Abweichung der Scheidungslinie zwischen Licht und Schatten von der Mitte berechnet; allein unter solchen Umständen scheint es angemessener, die Messung Vor- und Nachmittags bei gleicher von entgegengesetzten Seiten her Statt findender Beleuchtung anzustellen und aus den zwei verschiedenen Resultaten das Mittel zu nehmen.

Ueberhaupt gehört zu vorzüglichen Messungen eine Geschicklichkeit, Umsicht und Berücksichtigung aller Umstände, die man nur durch längere Erfahrung und Uebung sich zu eigen machen und nicht aus Büchern erlernen kann. Wir wollen nur noch bemerken, daß man das Instrument nicht von der Sonne bescheinen lassen, sondern mit Hülfe eines Regenschirmes fortwährend beschatten soll.

5) Wie mit einem nicht repetirenden Theodoliten Winkel zu messen sind, ergiebt sich schon von selbst; es soll nur bemerkt werden, daß man hierbei unbekümmert ist, wo im Anfange der Messung der Nonius steht; man lies't die Angaben desselben in beiden Stellungen des Fernrohres ab, deren Unterschied den gesuchten Winkel giebt. Nur muß man diesen aus den beiden gegenüberstehenden Nonien herzuleiten nicht versäumen, und falls beide Resultate verschieden sein sollten, aus ihnen das

Mittel nehmen. Bei der großen Genauigkeit, mit welcher heutzutage winkelmessende Instrumente getheilt und centrirt werden, sind auch solche Winkelmessungen selbst bei größeren geodätischen Arbeiten hinreichend genau.

Bei'm Ablesen der Nonien muß man vorzüglich auf eine vortheilhafte Beleuchtung sehen und dafür Sorge tragen, daß die Loupen genau mit ihrer Axe über den coincidirenden Theilstrichen stehen. Wie man zu verfahren habe, wenn die Theilstriche nicht genau coincidiren, ist aus §. 48 zu ersehen.

§. 123.

Wegen der Unvollkommenheit selbst der vorzüglichsten Werkzeuge werden die Winkelmessungen immer gewissen Fehlern unterworfen sein. Die Fehlerquellen, welche wir bei'm Meßtische haben kennen lernen, müssen nothwendig auch bei'm Theodoliten vorhanden sein, da beide Instrumente auf einerlei Principien beruhen; hier kommen jedoch noch die Fehler der Eintheilung des Limbus und des Nonius und der excentrischen Bewegung der Alhidade hinzu, von welchen der letztere der gefährlichste ist, und dem wir daher einige Aufmerksamkeit zu schenken haben.

1) Wir wollen daher zuerst untersuchen, welchen Einfluß die excentrische Bewegung der Alhidade auf das Resultat einer Winkelmessung haben kann. Es sei also C der Mittelpunct des Limbus und K der der Alhidade (Taf. IX. Fig. 6), die Excentricität $KC = e$ und ihr Winkel KCA mit dem durch den Nullpunct des Limbus gehenden Halbmesser $CA = \varphi$, so ist hierdurch die Lage beider Centra bestimmt. Weil die Theilstriche des Limbus mit denen des Nonius nicht unmittelbar zusammenstoßen können, so wird man die einen oder die andern in der Einbildung verlängern, bis sie wirklich zusammentreffen, und hiernach ihre Coincidenz beurtheilen. In unserer Figur haben wir die Theilstriche des Limbi verlängert, so daß, wenn man den Index des Nonius mit dem Nullstriche des Limbus zusammengepaßt hat, die Richtungen beider um den Winkel CBK verschieden sind.

Wird dann der Index des Nonius bis F fortgeführt, so hat er sich um den Winkel BKF gedreht,

welches der wahre ist, den wir messen wollten. Trifft aber ein verlängerter Theilstrich H F des Limbi gerade auf F, so lesen wir statt B K F den Winkel A C H ab und begehen daher einen Fehler, der dem Unterschiede dieser Winkel gleich ist. Meistens indeß wird kein Theilstrich des Limbi auf F treffen; wir suchen dann den coincidirenden Theilstrich E des Nonius und setzen den Winkel B K F aus B K E und E K F zusammen, von denen wir E K F auf dem Nonius und also richtig ablesen; den Theil B K E aber lesen wir am Limbus und nehmen folglich dafür den falschen Winkel A C G. Demnach haben wir A C G + E K F statt B K E + E K F gelesen, und also einen Fehler = A C G — B K E begangen, den wir jetzt bestimmen wollen.

Es ist $BKE + B = ACG + E$, also $ACG - BKE = B - E$. Setzen wir aber $BK = r$, so ist im Dreiecke BKC, $\sin B = \frac{e}{r} \sin \varphi$, wofür wir, wegen der Kleinheit von B und e, nahe genug $B = 206265 \cdot \frac{e}{r} \sin \varphi$ Secunden setzen können. Ist der Winkel $ACH = C$ und $ECF = d$, so ist $KCE = \varphi + C - d$, und daher im Dreiecke EKC, wie vorhin, $E = 206265 \times \frac{e}{r} \sin (\varphi + C - d)$. Also haben wird den Fehler

$$ACG - BKE = B - E = 206265 \frac{e}{r} \left[\sin \varphi - \sin (\varphi + C - d)\right]$$

d. i.

$$B - E = -206265 \cdot \frac{e}{r} \cdot 2 \cos \left(\varphi + \frac{C-d}{2}\right) \sin \tfrac{1}{2}(C-d).$$

Statt des Winkels d kann hier ohne practische Fehler E K F oder der Bogen E F genommen werden, um welchen der coincidirende Noniusstrich vom Index absteht, und wenn derselbe auf der entgegengesetzten Seite von F läge, so müßte man ihn negativ in die Rechnung einführen.

Man kann mittelst dieser Formel die Correction des abgelesenen Winkels berechnen, wenn man die Argumente φ und e der Excentricität kennt.

Um aber einen Begriff von ihrer Größe zu geben, wollen wir eine numerische Rechnung dafür anstellen. Es

sei also $r = 1$ Fuß, $e = \frac{1}{5000}$ Fuß, $\varphi = 10^\circ$, der abgelesene Winkel $C = 60^\circ$ und $d = 6^\circ$, so findet sich $B - E = - 82'',5 \cos 37^\circ \sin 27^\circ = - 29'',9$. Nach der Verschiedenheit des Winkel $\varphi + \frac{1}{2}(C - d)$ wird der Fehler bald positiv, bald negativ, bald 0, bald ein Größtes.

2) Wenn daher ein Winkelmesser aus einem Vollkreise besteht, so giebt man ihm wenigstens zwei genau gegenüberstehende Nonien, wodurch die schädliche Wirkung der Excentricität ganz aufgehoben wird, wenn man den Winkel aus den Angaben beider Nonien durch das arithmetische Mittel ableitet. Der Drehungswinkel $B'KF'$ des zweiten Nonius ist nämlich dem BKF, den der erste Nonius durchläuft, vollkommen gleich, und es liegen nach der Voraussetzung die Indices B' und B, F' und F in beiden Stellungen in gerader Linie. Der Einfachheit halber nehme man an, daß der Index B' des zweiten Nonius in seiner ersten Stellung gerade auf einen Theilstrich des Limbi passe. Trifft dann in der zweiten Stellung des Nonius der Strich E' auf einen Limbusstrich, so zerfällt der wahre Winkel $F'KB'$ abermals in zwei Theile, von denen $F'KE'$ auf dem Nonius und also richtig gelesen wird; der andere aber $E'KB'$ wird vom Limbus abgelesen und dafür der falsche Winkel $E'CB'$ genommen, so daß der begangene Fehler $B'CE' - B'KE' = E' - B'$ ist, während er vorhin $B - E$ war. Werden also die Ablesungen beider Nonien addirt, so ist die Summe um $B - E + E' - B'$ vom doppelten Winkel verschieden, oder weil $B' = B$ ist, um $E' - E$. Wären die auf den Nonien gelesenen Bögen EF und $E'F'$ gleich, so wäre EKE' eine gerade Linie, und daher $E' = E$. Genau genommen wird indessen KE' mit KE nicht in gerader Linie liegen, weil $E'F'$ nicht $= EF$ ist; allein da, wegen der immer nur geringen Excentricität, der Nonius an den ihm gleichen Limbusbogen sich an allen Stellen mit nur geringen Unterschieden anschließt, so sind die Richtungen KE' und KE nur um wenige Secunden unterschieden, weßhalb auch die Differenz zwischen E und E' bei Weitem noch keine Secunde betragen kann. Deßhalb aber heben sich die Fehler in der Summe bei-

der Lesungen auf, und es ist diese der richtige doppelte Winkel.

Man sieht hieraus zur Genüge, mit welchen Vortheilen der Gebrauch zweier Nonien verbunden ist, und welchen Vorzug also ein ganzer Kreis vor einem Sector, einem Quadranten, Sextanten oder einem Halbkreise hat. Es versteht sich übrigens, daß die Excentricität während der Manipulation, wegen der Wandelbarkeit des Instrumentes nicht veränderlich sein darf, auch beide Nonien nicht eine verschiedene Excentricität haben dürfen.

3) Wie genau ein excentrischer Nonius sich an den ihm gleichen Limbusbogen an verschiedenen Stellen des Limbus anschließt, ergiebt sich aus folgender Betrachtung. Es sei E F der ganze Noniusbogen, so schließt sich derselbe genau an den Bogen G H des Limbus an, dessen Halbmesser durch die Endpuncte des Nonius gehen, und der Unterschied beider, oder der Unterschied der Winkel E K F und G C H ist die Abweichung des Noniusbogens von dem gleich großen Limbusbogen. Es ist aber E K F — G C H = F — E, und im Dreiecke E C K, mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnung:

$E = 206265 \cdot \frac{e}{r} \sin(\varphi + C - d)$, im Dreiecke K C F, $F = 206265 \frac{e}{r} \sin(\varphi + C)$, daher $F - E$ $= 206265 \times \frac{e}{r} \cdot \left(\sin(\varphi + C) - \sin(\varphi + C - d)\right)$ $= 206265 \cdot \frac{e}{r} \cdot 2 \cos(\varphi + C - \frac{1}{2} d) \sin \frac{1}{2} d$, wo man statt d die Weite E K F des Noniusbogens setzen kann. Dieser Unterschied wird nun ein Größtes $= 412530 \cdot \frac{e}{r} \sin \frac{1}{2} d$, wenn $\cos(\varphi + C - \frac{1}{2} d) = \pm 1$, also $\varphi + C - \frac{1}{2} d = 0$ oder 180° ist, d. h., wenn die Mitte des Nonius in die Richtung der Excentricität K C fällt. Wäre, z. B., ein Limbus unmittelbar in $\frac{1}{6}$ Grade getheilt, und sollte der Nonius noch bis zu 5″, also den $\frac{1}{6}{}^\circ = 10'$, in 120 Theile theilen, so müßte er 119 oder 121 Sechstelgrade, also im letzteren Falle $20^\circ\ 10'$, umfassen. Wäre dann $e = \frac{1}{10000}$ von r, so wäre der

größte Unterschied $F - E = \frac{412530}{10000} \sin 10^\circ 5' = 7'',22$. Uebrigens verschwindet der Unterschied, wenn $\cos(\varphi + C - \frac{1}{2} d) = 0$, also $\varphi + C - \frac{1}{2} d = 90^\circ$ oder $= 270^\circ$ ist, d. h., wenn die Mitte des Nonius mit der Excentricität K C einen rechten Winkel macht.

§. 124.

1) Wenn von den Fehlern der Excentricität und der Theilung des Limbus und Nonius der eine nicht vorhanden ist, so ist es nicht schwer, den andern zu ermitteln. Ist keine Excentricität vorhanden, so findet man die Theilungsfehler durch Vergleichung des Nonius mit dem correspondirenden Bogen des Limbus, indem man den Index des Nonius von Theilstrich zu Theilstrich fortschiebt und untersucht, ob die Endstriche des Nonius genau mit den Theilstrichen des Limbus zusammenpassen. Findet dieses allenthalben genau Statt, so ist nicht nur die Theilung und die Bogenweite des Nonius richtig, sondern es ist auch keine Excentricität vorhanden. Man prüft auf ähnliche Weise auch die Theilung des Nonius, indem man jeden Theilstrich desselben auf einen Theilstrich des Limbi genau einstellt und zusieht, ob die folgenden Theilstriche des Nonius und Limbus immer um gleiche Theile einer Strichdicke überstehen. Etwa vorhandene Fehler werden aufgezeichnet und bei künftigen Beobachtungen in Rechnung genommen. Gleicht sich innerhalb eines gewissen Bogens, z. B. von 60°, die Summe der positiven und negativen Theilungsfehler des Limbus aus, so ist dieser Bogen richtig und auch der Nonius fehlerfrei; wenn hingegen der Nonius nirgends mit den Theilstrichen des Limbi zusammenpaßt, so kann man ihn für fehlerhaft halten. Welchen Einfluß übrigens eine kleine Excentricität bei dieser Untersuchung habe, ergiebt sich aus dem vorigen §. von selbst.

Andere Mittel zur Prüfung der Eintheilung sind: Messungen desselben Winkels an verschiedenen Stellen des Limbus; oder man mißt die Winkel am Horizonte um einen Punct herum und vergleicht ihre Summe mit 360°. Auch Winkel von bestimmter Größe, die man mit Hülfe gleichschenkliger Dreiecke absteckt und nachdem

mit dem Instrumente mißt, können zu diesem Zwecke dienen, doch läßt sich aus diesem Verfahren, wegen der Nothwendigkeit äußerst genauer Linienmessungen, kein sicheres Resultat erwarten.

Wie ein feiner Stangenzirkel mit einer Micrometerschraube und angebrachten Loupen zur Prüfuug der Eintheilung angewendet werden kann, ist von selbst klar.

2) Wenn die Theilung des Limbus fehlerfrei ist, so lassen sich bei einem Vollkreise, der mit zwei genau diametral gegenüberstehenden Nonien versehen ist, die Elemente der Excentricität leicht finden. Führt man nämlich die Alhidade **B D** (Taf. **IX.** Fig. 7) so lange herum, bis beide Indices auf zwei Theilstriche **M** und **N** des Limbus zu stehen kommen, die genau um 180° von einander abstehen, so hat man die Linie, in welcher die Mittelpuncte **C** und **K** des Limbus und der Alhidade liegen, und kennt folglich auch ihren Winkel $ACN = \varphi$ (§. 123) mit dem durch den Nullpunct der Theilung gehenden Halbmesser. Alsdann stelle man den Index **B'** auf den um 90° von **M** abstehenden Theilstrich **F** und bemerke den Winkel **G C H**, um welchen der andere Index **D'** von dem Theilstriche **H** absteht, der dem **F** diametral entgegengesetzt ist. Ist dieser Winkel $= x$, so ist $KB'C = \frac{1}{2}x$ und $KC = B'K \sin \frac{1}{2}x$, wornach sich also, da der Halbmesser **B' K** bekannt ist, der Abstand **K C** beider Mittelpuncte berechnen läßt.

Weit schwerer und bei weitem nicht mit genügender Genauigkeit läßt sich die Excentricität bei solchen Instrumenten bestimmen, die keinen ganzen Kreis und daher auch nur einen Nonius haben. Ein Mittel ist die Vergleichung der Abstände des Nonius vom Theilrisse des Limbus an verschiedenen Stellen desselben, indem man diese Abstände mit einem Microscop beobachtet, das mit einem Micrometer zur Messueg feiner Längentheile versehen ist. Man erfährt hierdurch, ob eine Excentricität vorhanden ist, und wenn man irgendwo den Abstand am Größten findet, so daß beiderseits die Abstände wieder abnehmen, so geht durch diesen Punct die Richtuug der Excentricität, und man weiß folglich ihren Directionswinkel mit dem durch 0° gehenden Halbmesser des Limbus. Die Größe der Excentricität müßte man aber durch die Unterschiede zweier Abstände an verschiedenen Stellen ermitteln.

3) Ueberhaupt gehört es unter die schwersten Aufgaben der practischen Meßkunst, mit einem fehlerhaften Instrumente, das die Winkel nicht repitirt, dennoch richtige Winkelmessungen zu liefern, weil, wenn die Fehler der Theilung und der Excentricität zugleich vorhanden sind, die Ausmittelung derselben oft kaum möglich ist. Es kann natürlich hierüber auch kein genügender allgemeiner Unterricht gegeben werden, sondern der Beobachter ist lediglich auf seine Geschicklichkeit und auf seine Einsicht, als das Resultat vieler Uebung und Erfahrung, verwiesen.

§. 125.

1) Durch das Repitiren der Winkel werden die Theilungsfehler, wie schon bemerkt wurde, aus dem Resultate zur Genüge weggeschafft, wenn nur die Anzahl der Multiplicationen groß genug ist. Denn gesetzt, man könne wegen der Theilungsfehler einen Winkel höchstens bis auf 60″ falsch ablesen, so ist auch das Sechszigfache desselben höchstens nur um 60″ falsch und folglich das Einfache bis auf 1″ richtig. Daher kommt man nach gehöriger Anzahl von Repetitionen gewiß auf die stehende Secunde, und bei den Instrumenten, die aus der Werkstätte vorzüglicher Künstler (z. B. des verstorbenen königl. Baierischen Salinenrathes und Ritters v. Reichenbach, dessen Theilungsmaschine sich gegenwärtig in Wien in der Werkstätte des polytechnischen Institutes befindet) hervorgingen, schon nach wenigen Wiederholungen. Gegenwärtig ist, namentlich durch die Bemühungen des genannten Künstlers, die Kunst, mathematische Instrumente zu theilen und zu centriren, so hoch gestiegen, daß man auf Sternwarten das Princip der Repetition fast allgemein wieder aufgegeben hat, weil hier vorzüglich die Eilfertigkeit, die durch das beständige Fortrücken der beobachteten Objecte herbeigeführt wird, der Richtigkeit der Beobachtungen Eintrag thut. Aber bei terrestrischen Objecten, wo man meistentheils mit kleineren Werkzeugen beobachtet und das richtige Einstellen der Visirlinie, wegen mangelhafter Beleuchtung, meistens weit unsicherer ist, behaupten die Multiplicationen ihr Recht. Denn es ist wahrscheinlich, daß man bei'm Visiren das Rohr bald zu weit rechts, bald zu weit links richten werde, und daß sich also auch die Visirfehler durch eine große Zahl

von Repetitionen ausgleichen. Dasselbe gilt auch von den Fehlern der Excentricität, welche ebenfalls, wie die Formeln des §. 123 zeigen, nicht mit dem vielfachen Winkel in gleichem Verhältnisse wachsen, sondern theils 0, theils positiv, theils negativ sind. Zwei gegenüberstehende Nonien vernichten auch ihren Einfluß größtentheils.

Uebrigens begreift man, daß der Einfluß der Theilungsfehler dann am vollkommensten beseitigt ist, wenn bei der letzten Ablesung der Nonius nahe da sich befindet, wo er im Anfange der Beobachtung stand, er also den Kreis ein oder mehrere Male durchlaufen hat.

2) Aber die Fehler, welche daher entstehen, daß die Visirlinie nicht in einer Verticalebene auf- und niedergeht (§. 82) oder nicht senkrecht gegen die Umdrehungsaxe des Verticalkreises steht (§. 83), desgleichen auch der kleine Fehler, der darin seinen Grund hat, daß die verticale Umdrehungsebene der Visirlinie nicht durch den Mittelpunct der Alhidade und des Limbi geht (§. 81); diese drei Fehler werden durch die Repitition nicht weggebracht, sondern sie wiederholen sich bei jeder Repitition in gleichem Maße, sind daher, z. B., nach 10maliger Wiederholung auch 10fach geworden.

Um ihren Einfluß ganz zu beseitigen, schlägt man das Fernrohr um, oder hebt es aus und legt es in umgedrehter Stellung wieder ein, daß also die Alhidade um 180° gedreht werden muß, um das Fernrohr wieder gegen die Richtpuncte zu führen. Hierdurch kommen die drei erwähnten Abweichungen auf die entgegengesetzte Seite, und wenn man also eine gleiche Anzahl von Repetitionen anstellt, als vorhin, so wird dieses zweite Resultat den gleichen, aber entgegengesetzten Fehler des vorigen haben, so daß das Mittel aus beiden das richtige ist.

§. 126.

Man hat auch Winkelmesser, welche nicht horizontal gestellt werden, sondern sich in jede beliebige Ebene und auch in die Verticalebene bringen lassen. Mit solchen Instrumenten mißt man daher auch nicht den Horizontalwinkel B′ C A′ (Fig. 8, Taf. IX.), den die durch die Richtpuncte A und B und durch den Scheitel C gelegten Verticalebenen mit einander bilden, sondern statt des-

sen den geneigten Winkel ACB, indem man den Limbus in die Ebene seiner Schenkel bringt. Um hieraus aber den horizontalen Winkel A′CB′ abzuleiten, muß man noch die Erhebungswinkel ACA′ und BCB′ jedes Richtpunctes über der durch C gelegten Horizontalebene messen. Es sei ACB = e, ACA′ = h und BCB′ = h′ gefunden. Beschreibt man nun aus C eine Kugel, so entsteht das sphärische, bei A′ und B′ rechtwinkliche Viereck A′B′BA, und wenn man die Bögen A′A und B′B bis zum Durchschnitte bei F verlängert, so ist A′F = B′F = 90°, und der sphärische Winkel bei F das Maß des Bogens A′B′ oder des Winkels A′CB′, der = c′ sein mag. Da dann AA′ = h, BB′ = h′ und daher AF = 90° — h, BF = 90° — h′, und weil auch AB = c, so kennt man im sphärischen Dreieck ABF alle drei Seiten und kann folglich nach den bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie den Winkel F finden. Hiernach hat man

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}F=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c'=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(c+h-h')\sin\frac{1}{2}(c+h'-h)}{\cos\frac{1}{2}(h+h'-c)\cos\frac{1}{2}(h+h'+c)}},$$

welche Formel zur Berechnung am geeignetsten ist. Wenn einer der Winkel h und h′ ein Tiefenwinkel ist, so muß man ihn negativ in die Rechnung einführen. Dieses ist die sogenannte Reduction schiefer Winkel auf den Horizont.

Weil indessen, wenn h und h′ nur kleine Winkel sind, c′ von c nur unbeträchtlich unterschieden ist, so bedient man sich für solche Fälle einer Näherungsformel, welche man auf folgende Weise findet. Man hat

$\cos c' = \dfrac{\cos c - \sin h \sin h'}{\cos h \cdot \cos h'}$. Setzt man nun $c' = c + x$, wo x sehr klein sein wird, so hat man $\cos c' = \cos c - x \sin c$, also

$$-x\sin c = \frac{\cos c - \sin h \sin h'}{\cos h \cos h'} - \cos c = \frac{\cos c - \cos c \cos h \cos h' - \sin h \sin h'}{\cos h \cos h'}.$$

Hierin setzen wir $\frac{1}{2}\cos(h+h') + \frac{1}{2}\cos(h-h')$ statt $\cos h \cos h'$ und

$\sin h \cdot \sin h' = \frac{1}{2}\cos(h-h') - \frac{1}{2}\cos(h+h')$ und erhalten dadurch

$$-x\sin c =$$

$$\frac{\cos c + \frac{1}{2}(1 - \cos c)\cos(h + h') - \frac{1}{2}(1 + \cos c)\cos(h - h')}{\cos h \;\cos h'},$$

d. i., weil $1 - \cos c = 2 \sin \frac{1}{2} c^2$ und $1 + \cos c = 2 \cos \frac{1}{2} c^2$: $- x \sin c =$

$$\frac{\cos c + \cos(h + h') \sin \frac{1}{2} c^2 - \cos(h - h') \cos \frac{1}{2} c^2}{\cos h \;\cos h'}.$$

Setzen wir aber hierin $\cos \frac{1}{2} c^2 - \sin \frac{1}{2} c^2$ statt $\cos c$, so findet sich $- x \sin c$

$$= \frac{\left(1 - \cos(h - h')\right)\cos \frac{1}{2} c^2 - \left(1 - \cos(h + h')\right)\sin \frac{1}{2} c^2}{\cos h \;\cos h'}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2}(h - h')^2 \cos \frac{1}{2} c^2 - 2 \sin \frac{1}{2}(h + h')^2 \sin \frac{1}{2} c^2}{\cos h \;\cos h'},$$

und wenn man beiderseits mit $- \sin c = - 2 \sin \frac{1}{2} c . \cos \frac{1}{2} c$ dividirt:

$$x = \frac{- \sin \frac{1}{2}(h - h')^2 \cot \frac{1}{2} c + \sin \frac{1}{2}(h + h')^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} c}{\cos h \;\cos h'},$$

wo man noch mit 206265 multipliciren muß, um x in Secunden zu erhalten.

§. 128.

1) Wir kommen nun zur Messung der Höhenwinkel, wofür der Verticalkreis des Theodoliten bestimmt ist. Man begreift leicht, daß zu diesem Behufe der Verticalkreis auf der horizontal gestellten Umdrehungsaxe genau senkrecht sein müsse, ein Erforderniß, für welches schon der Künstler sorgt, indem er jenen Kreis gegen die Axe senkrecht abdreht. Auch muß die Axe des Fernrohrs mit der Ebene des Verticalkreises parallel sein, welches schon dadurch erreicht wird, daß diese Axe gegen die Axe des Verticalkreises senkrecht gestellt wird (§. 121). Endlich ist einleuchtend, daß man zur Beobachtung von Höhenwinkeln den horizontalen Visirfaden gebrauchen müsse.

2) Die Verticalkreise messen meist nicht sowohl die Höhen- oder Tiefenwinkel, sondern vielmehr die Neigung der Richtungslinie KA (Fig. 12, Taf. X.) eines Objectes gegen die Verticallinie ZN, d. h. die Zenithdistanz AKZ; allein da die Verticale KZ mit der Horizontale KH einen rechten Winkel macht, so ergiebt sich hieraus auch der Höhenwinkel $HKA = 90^0 - AKZ$. Indessen ist es auch gebräuchlich, die Kreise so einzurichten, daß sie die Höhenwinkel unmittelbar angeben, wenn näm-

lich bei horizontaler Lage des Fernrohrs der Index des Nonius auf 0° steht.

Gesetzt nun, der Nonius N stehe gerade auf dem Nullpuncte der Theilung, wenn die Axe des Fernrohrs die Richtung der Verticale **NZ** hat, und es werde dann das Fernrohr sammt dem Kreise in die Richtung **KA** gedreht, so hat der Kreis an dem feststehenden Nonius einen Bogen **BN** durchlaufen, welcher der gesuchten Zenithdistanz **ZKA** = **BKN** gleich ist. Der Nonius giebt also in jeder Lage des Fernrohrs dessen Abweichung von der Horizontal- oder Verticallinie an.

3) Hierbei wird vorausgesetzt, daß bei horizontaler oder verticaler Lage des Fernrohrs der Index des Nonius genau auf 0° der Theilung stehe, was in der Regel nicht der Fall ist, sondern wenn man den Index auf 0° eingestellt hat, so wird das Fernrohr mit der Verticale **ZN** den Winkel **ZKD** bilden. Wird es dann aus der Lage **KD** gegen das Object **A** gekehrt, so hat es, statt des wahren Verticalwinkels **ZKA**, nur den Winkel **DKA** beschrieben, und da der Kreis um eben so viel gedreht wird, so giebt auch der Nonius nur den Winkel **DKA** an, der gegen den wahren um **DKZ** zu klein oder zu groß ist, je nachdem **D** auf die eine oder die andere Seite von **ZN** fällt. Diesen Winkel **ZKD**, um welchen alle beobachteten Zenithdistanzen corrigirt werden müssen, nennt man den Collimationsfehler.

Um den Collimationsfehler zu finden, lies't man die Zenithdistanz **DKA** irgend eines Objectes **A** am Nonius ab, die aber nach der Zeichnung um den Winkel **DKZ** zu klein ist. Dreht man dann die Alhidade des Horizontalkreises um 180° herum, so kommt **D** nach **D'** zu liegen, und wenn man daher das Fernrohr durchschlägt (was bei manchen Theodoliten durch Abheben der Axe von ihren Sätteln geschehen muß) und wieder auf den Gegenstand **A** zurückführt, so lies't man die Zenithdistanz **D'KA** ab, die um den Collimationsfehler **D'KZ** — **DKZ** zu groß ist. Das Mittel aus beiden Lesungen ist also die wahre Zenithdistanz, die halbe Differenz der Lesungen aber der Collimationsfehler.

4) An manchen Instrumenten, z. B. an den Kippregeln der Meßtische, sind Halbkreise mit Nonien angebracht, um Höhen- oder Tiefenwinkel für solche Zwecke zu messen, bei denen es auf eine große Genauigkeit nicht

ankommt. Die Visirlinie des Fernrohrs soll dann horizontal sein, wenn das Instrument auf dem horizontalen Meßtische steht und der Index des Nonius mit dem Nullpuncte der Theilung zusammenfällt, so daß der Nonius in jeder Lage des Fernrohrs dessen Neigung gegen den Horizont angiebt. Allein begreiflich wird es auch hier einen constanten Collimationsfehler geben, um welchen bei horizontaler Lage des Fernrohrs der Nonius vom Nullpuncte abweicht; es kann aber derselbe nicht nach Nr. 3 gefunden werden, sondern man wird am zweckmäßigsten so verfahren. Man stecke auf dem Felde eine lange Linie ab, bringe das Instrument über den einen Endpunct derselben und richte das Fernrohr nach einem am andern Endpuncte senkrecht aufgestellten Stabe, an welchem sich ein Zeichen befindet, das mit der Visirlinie des Fernrohrs an dessen Umdrehungsaxe gleiche Höhe hat, und auf welches man den horizontalen Visirfaden genau einstellt. Jetzt lese man den Stand des Nonius ab. Man bringt hierauf das Instrument über den andern Endpunct der Linie und verfährt wieder eben so. Findet sich, daß der beobachtete Elevationswinkel dem Depressionswinkel, welche beide die Neigung der abgesteckten Linie gegen den Horizont abgeben, gleich ist, so ist kein Collimationsfehler vorhanden; findet sich aber ein Unterschied, so ist dessen Hälfte der Collimationsfehler.

5) Die Multiplication der Höhenwinkel erfordert, wie schon in §. 120 bemerkt worden, eine solche Zusammenordnung des Fernrohrs und des Höhenkreises, daß beide zugleich um ihre gemeinschaftliche Axe beweglich sind, das Fernrohr aber auch allein gedreht werden kann, während der Kreis feststeht. Sind die Nonien mit dem Fernrohre zugleich beweglich, wie, z. B., wenn die Alhidade ein mit dem Limbus concentrischer Kreis ist, an welchem das Fernrohr festsitzt, so ist das Verfahren folgendes. Man stellt den einen Nonius genau auf 0° der Theilung, dreht den Limbus sammt der Alhidade so lange, bis das Object A (Fig. 12, Taf. X.) im Fernrohr erscheint und stellt den Visirfaden mittelst der Micrometerschraube des Limbi genau ein. Hierauf verwendet man die Ebene des Limbi um 180°, indem man sie um ihre verticale Axe (bei'm Theodoliten die Alhidadenaxe des Horizontalkreises) herumdreht, wodurch das Fernrohr aus der Lage **KA** in die Lage **KA′** kommt und daher vom

Objecte A um einen Winkel AKA' abweicht, welcher der doppelten Zenithdistanz AKZ gleich ist. Löſ't man also nunmehr die Alhidade und dreht das Fernrohr, ohne daß der Limbus verrückt wird, wieder genau auf das Object A, so hat der Nonius die doppelte Zenithdistanz AKA' durchlaufen. Um aber die Beobachtung zu wiederholen, verwendet man die Ebene des Limbus abermals um 180°, so daß sie wieder gegen dieselbe Weltgegend gerichtet ist, wie im Anfange. Das Fernrohr weicht jetzt wieder um die doppelte Zenithdistanz vom Objecte A ab; allein wenn man es durch Umdrehung der Alhidade darauf zurückführen wollte, so würde man nur den Nonius auf seinen ersten Stand 0° bringen. Man muß daher nunmehr wieder den Limbus sammt der Alhidade um ihre gemeinschaftliche Horizontalaxe drehen, bis das Object im Fernrohr erscheint, dann die Ebene des Limbus um 180° verwenden und das Fernrohr bloß durch Drehung der Alhidade auf den beobachteten Gegenstand zurückführen, wodurch der Nonius abermals um die doppelte Zenithdistanz weiter rückt und folglich im Ganzen die vierfache Zenithdistanz durchlaufen hat. Durch Wiederholung dieser Operation bekommt man also das 2, 4, 6, 8fache des zu messenden Winkels, nämlich bei $n$maliger Wiederholung das $2n$fache.

Wäre nur ein einfacher Verticalkreis mit festem Nonius vorhanden, wie dieses bei manchen Theodoliten der Fall ist, so wird erfordert, daß das Fernrohr nicht nur gemeinschaftlich mit dem Kreise, sondern auch allein um seine horizontale Axe gedreht und durch eine eigne Micrometerschraube fein eingestellt werden kann. Man löſ't nun den Halter des Kreises, dreht diesen, bis der Nonius nahe auf 0° der Theilung zu stehen kommt, schließt den Halter wieder und bringt den Kreis mittelst seiner Micrometerschraube genau auf 0°. Dann lüftet man den Halter des Fernrohrs, dreht dieses nach dem zu beobachtenden Gegenstande A, schließt den Halter wieder und stellt den Visirfaden mittelst der Micrometerschraube des Fernrohrs genau auf den Gegenstand A. Nun verwendet man den Kreis um 180°, daß das Fernrohr KA in die Lage KA' kommt, und führt hierauf das Fernrohr durch bloßes Drehen des Kreises um seine Axe wieder auf den Gegenstand A zurück, wodurch der Inder des Nonius um die doppelte Zenithdistanz vom Nullpuncte

der Theilung entfernt wird. Um die Beobachtung fortzusetzen, wird der Verticalkreis wieder verwendet, daß die Theilung wieder nach derselben Weltgegend gerichtet ist, wie im Anfange, und das Fernrohr ohne Verrückung des Kreises auf den Gegenstand A zurückgeführt, worauf sich das ganze Verfahren von Neuem wiederholt. Man sieht also, daß dieses Verfahren dem Vorigen ganz analog ist.

§. 129.

Der Spiegelsextant.

Dieses Instrument hat seinen Namen daher, weil nicht ein ganzer Kreis, sondern nur dessen sechster Theil zum Winkelmessen benutzt wird. Man hat auf gleiche Weise auch Quadranten, Octanten und noch kleinere Sectoren, von welchen jedoch nur ehedem in der Astronomie Gebrauch gemacht wurde.

Ehe wir zur Beschreibung des an sich sehr einfachen Instrumentes kommen, wollen wir erst die Gründe mittheilen, auf welchen sein Bau beruht. Man denke sich also zwei Objecte A und B (Taf. X., Fig. 3), welche an einem dritten Puncte C den Winkel ACB mit einander bilden. Auf der Ebene dieses Winkels im Scheitel C stehe ein Planspiegel DE senkrecht, und mit ihm parallel sei ein zweiter Planspiegel FG aufgestellt. Endlich sei bei O ein Fernrohr, durch welches man über den Spiegel FG hinweg den Gegenstand A und zugleich auch das Bild eines im Spiegel FG gespiegelten Gegenstandes sehen kann.

Man denke sich nun in der bezeichneten Stellung der Spiegel DE und FG das Fernrohr O gerade nach dem Gegenstande A gerichtet, so wird man darin diesen Gegenstand eigentlich doppelt sehen, einmal nämlich mittelst desjenigen Lichtes, welches von A über den Spiegel FG hinweg unmittelbar in's Fernrohr kommt, dann aber auch mittelst der von A auf den Spiegel DE gelangenden, von hier nach dem Spiegel FG gewiesenen und von diesem wieder in das Fernrohr reflectirten Strahlen. Denn denkt man sich den Winkel GIC = FIO gemacht und durch C die CA′ mit OA parallel gezogen, so ist auch Winkel A′CE = AIG = FIH = GIC = ICD, und es wird folglich ein Strahl, der in der Linie A′C

auf den Spiegel DE gelangt, von C nach I und von da wieder in der Richtung IO zurückgeworfen, wodurch beide Gegenstände A und A′ im Fernrohre sichtbar werden. Wenn man aber den Punct A in eine so große Entfernung versetzt, daß der Abstand der Spiegel FG und DE dagegen verschwindet, so ist auch AC als mit AO oder CA′ parallel zu betrachten, und man sieht folglich den Gegenstand A im Fernrohre doppelt; beide Bilder decken sich aber oder fallen genau auf einander.

Man drehe nun den Spiegel DE um C in die Lage D′E′, so nämlich, daß man den Gegenstand B in der Richtung AO erblickt, oder bis der unmittelbar gesehene Gegenstand A und der doppelt gespiegelte B sich im Fernrohr zu decken scheinen, so wird der Drehungswinkel D′CD halb so groß sein, als der Winkel AHB, den die von A und B durch die Einfallspuncte I und C gezogenen Strahlen mit einander bilden. Denn vermöge des Gesetzes der Spiegelung sind die Winkel BCE′ und ICD′, GIC und FIO gleich, und im Dreieck HCI ist

$$H + ICH = AIC,$$
d. h. $H + ICH = AIG + GIC$
oder $H + ICH = FIH + GIC$
oder $H + ICH = 2.\ GIC.$

Weil aber auch $GIC = ICD$, so haben wir
$$H + ICH = 2.\ ICD.$$

Ferner ist
$$ICH = ICD' + D'CH = ICD' + BCE' = 2.\ ICD',$$
daher $H + 2.\ ICD' = 2.\ ICD$
und davon $2.\ ICD' = 2.\ ICD'$ subtrahirt,
giebt $H = 2.\ DCD'$,
folglich $DCD' = \frac{1}{2}H.$

Dieses ist die vorhin ausgesprochene Behauptung. Wenn nun aber die Entfernungen der Puncte A und B so groß sind, daß der Abstand der Spiegel FG und DE dagegen verschwindet, so kann H von C nicht weit abstehen und daher der Winkel H für den wahren ACB genommen werden. Folglich ist dann der Drehungswinkel DCD′ des Spiegels DE der Hälfte des Winkels ACB gleich.

§. 130.

Nach dieser theoretischen Vorbereitung gehen wir zur technischen Beschreibung des Spiegelsextanten über. AB (Fig. 4, Taf. X.) ist ein messingener Bogen, der etwas mehr als den sechsten Theil des Kreises faßt und da, wo die Gradabtheilungen aufgerissen sind, mit Silber ausgelegt ist. Er ist mit zwei messingenen Halbmessern AC und BC verbunden, die im Centro zu einer der Scheibe ab an Größe gleichen Scheibe sich vereinigen, auf welcher eine conisch ausgehöhlte Büchse von Glockenmetall befestigt ist. Der Theil ACB, welcher der Körper des Sextanten genannt wird, ist aus einem einzigen Stück geschlagenen Messings gearbeitet, und damit er größere Festigkeit ohne zu große Schwere erhalte, sind der Bogen und seine Halbmesser noch durch die in der Zeichnung ersichtlichen Riegel verbunden.

In der vorhin gedachten glockenmetallenen Büchse bewegt sich die conische Stahlaxe der Alhidade CD sammt der mit ihr fest verbundenen Scheibe ab, so zwar, daß der Drehungsmittelpunct zugleich der Mittelpunct des Theilrisses AB ist. Auf der Scheibe ab ist der größere gläserne Planspiegel ef senkrecht befestigt und wird mit der Alhidade zugleich mit umgedreht. Dieses ist dann der drehbare Spiegel DE in Fig. 3. Ihm gegenüber ist auf dem Körper des Sextanten der kleine gläserne Planspiegel gh (FG in Fig. 3) angebracht, so zwar, daß beide Spiegel parallel sind, wenn die Alhidade auf den Nullpunct der Theilung geführt ist. Der Spiegel ef hat keine Correctionsschraube, sondern ist nur an seiner Hinterfläche mit derjenigen Schraube versehen, welche zur Feststellung seines Rahmens dient; seine senkrechte Lage gegen die Ebene des Limbus wird schon vom Künstler hergestellt. Der Spiegel gh aber hat außer der von der Mitte der Hinterfläche wirkenden Schraube, womit der Rahmen an die vordere Fläche des Spiegelglases gedrückt wird, noch zwei andere, welche vor und hinter demselben gegen die Ebene, worauf er steht, senkrecht gerichtet sind, und wodurch seine senkrechte Lage gegen die Ebene des Limbus hergestellt werden kann. Dieser kleine Spiegel gh ist nur zur Hälfte mit Folie belegt, damit durch die obere durchsichtige Seite unmittelbar von einem Gegenstande Licht in das Fernrohr H kommen könne, während zugleich

auch die untere das vom Spiegel ef reflectirte Licht aufnimmt und in das Fernrohr sendet. Ein Haupterforderniß beider Spiegel ist, daß ihre Gläser genau eben sind und parallele Flächen haben.

Das Fernrohr H ruht in einem Ringe mit einem auf der Ebene des Sextanten senkrechten Fortsatze und kann durch eine von unten her in den Fortsatz greifende Schraube der Ebene des Sextanten mehr oder minder genähert werden, so zwar, daß die Axe des Fernrohres immer mit der Ebene des Limbus parallel bleibt. Durch diese Bewegung des Fernrohres erzielt man, daß sowohl durch die unbelegte Seite des Spiegels gh, als auch von dessen Belegung gerade das rechte Maß von Licht in's Rohr gelangt, um beide Gegenstände, den unmittelbar gesehenen und den doppelt gespiegelten, deutlich und mit gleicher Lichtstärke wahrzunehmen.

Die Alhidade hat bei D einen Nonius mit der Vorrichtung, um durch die Bremsschraube q die grobe Drehung der Alhidade zu hemmen und hernach mittelst der Micrometerschraube d eine feine Bewegung zu bewirken. Der Nullpunct der Theilung des Limbus ist bei B auf der dem kleinen Spiegel gh entgegengesetzten Seite, und es sind noch einige Theile rückwärts aufgetragen, was man übertheilt nennt und, wie wir in der Folge sehen werden, von wesentlichem Nutzen ist. Weil aber der Sextant, nach dem im vorigen §. Mitgetheilten, nur den halben Winkel mißt, so sind auf demselben halbe Grade für ganze gezählt, um die Multiplication mit 2 zu ersparen.

t ist eine an einem Stiele befestigte und um den Mittelpunct r bewegliche Loupe, mittelst welcher man die Angabe des Nonius bequemer beobachtet. Unten bildet die Fassung dieser Loupe einen silbernen Hohlspiegel, um dem Nonius und Limbus die gehörige Beleuchtung zu geben.

Bei m und n befinden sich sechs farbige Plangläser, rother, grüner und blauer Farbe, welche um Charniere beweglich sind und, nach Bedürfniß, vor den großen oder kleinen Spiegel gesetzt werden können, um das Licht sehr blendender Objecte, z. B. der Sonne, zu dämpfen.

Das Werkzeug wird bei E an eine Handhabe geschraubt und bei der Beobachtung in der rechten Hand gehalten.

Die Sextanten werden von verschiedener Größe gefertigt. Die kleinsten heißen Dosensextanten, die größten haben 10 bis 12 Zoll Halbmesser. Das darauf befindliche Fernrohr vergrößert, wegen seiner geringen Länge, nie sehr stark.

§. 131.

Mittelst des Spiegelsextanten werden nun auf folgende Weise Winkel gemessen. Nachdem man die Handhabe an das Werkzeug angeschraubt hat, nimmt man es in die rechte Hand und stellt sich so, daß der Drehungsmittelpunct C gerade über den Scheitel des zu messenden Winkels zu liegen kommt. Durch das Fernrohr H (Fig. 4, Taf. X.) sieht man zuerst (durch die unbelegte Seite des Spiegels g h hindurch) nach dem zur Linken gelegenen Richtpuncte, dreht alsdann die Alhidade von B nach A, bis auch der rechts gelegene Richtpunct mittelst der Reflexion an den Spiegeln e f und g h im Fernrohre erscheint, stellt die Alhidade mittelst der Schraube q fest und bringt endlich mittelst der Micrometerschraube beide Bilder in der Mitte des Sehefeldes (zwischen den beiden Horizontalfäden, die mitunter eingespannt sind, aber auch wegbleiben können) zur genauen Deckung. Vorausgesetzt, daß am Instrumente Alles in Ordnung ist, giebt dann der Nonius auf der Scala den gesuchten Winkel an. Hierbei wird also vorausgesetzt, daß der unmittelbar im Fernrohre gesehene Richtpunct zur Linken sich befinde. Ist man aber genöthigt, das Fernrohr nach dem rechts gelegenen Richtpuncte zu richten, so muß man den Sextanten umwenden, so daß seine eingetheilte Fläche nach unten gekehrt ist.

Wenn es sich ereignet, daß eins der beiden Bilder im Fernrohre nicht recht deutlich erscheint, so muß man dieses heben oder senken, je nachdem das unmittelbar gesehene oder das reflectirte Bild deutlicher werden soll.

Man hat also bei'm Gebrauche des Sextanten gar kein Stativ nöthig, weil es nur darauf ankommt, die beiden Bilder zur Deckung zu bringen, wozu ein einziger Moment der Ruhe hinreicht. Deßhalb kann man sich damit an Orten aufstellen, wo kein Stativ angebracht werden kann, auf Bäumen, Thürmen, in Fensterbrüstungen; deßhalb ist dieses Instrument auch auf Reisen so bequem

und das einzige, womit man zur See auf schwankendem Schiffe Beobachtungen anstellen kann.

Indessen hat ein Stativ, wenn man ein solches aufstellen kann, doch nicht geringe Vorzüge, weil dann das Schwanken des Instrumentes wegfällt und folglich die Deckung der Bilder weit sicherer sich beobachten läßt. Ein solches Stativ muß möglichst leicht und mit einer Nuß versehen sein, um den Sextanten jedesmal in die Ebene des zu messenden Winkels richten zu können.

Der Spiegelsextant giebt nicht, wie der Theodolit, unmittelbar den horizontalen Winkel, sondern einen geneigten, nämlich denjenigen, welcher in der Ebene liegt, die durch den Scheitelpunct und die beiden zur Deckung gebrachten Richtpuncte gelegt wird. Will man diesen Winkel auf den Horizont reduciren, so muß man zugleich nach die Höhen- oder Tiefenwinkel der beiden Richtpuncte im Scheitel messen und dann so rechnen, wie wir es in §. 126 nachgewiesen haben.

Der Sextant ist zur Messung der Winkel großer (primärer) Dreiecke nicht geeignet, weil er theils auf seinem Limbus die Winkel nicht genau genug giebt, theils auch für irdische Gegenstände zur scharfen Pointirung derselben zu lichtschwach ist, da die Beleuchtung des reflectirten Objects, wegen der Reflexion an den beiden Spiegeln, bedeutend herabgebracht wird. Zur Messung der Winkel kleinerer Dreiecke ist indessen der Sextant sehr wohl geeignet, und wenn dann die drei Richtpuncte nahe in horizontaler Ebene liegen, so ist auch eine Reduction der Winkel auf den Horizont nicht weiter erforderlich.

§. 132.

Nach §. 129 giebt der Sextant den zu messenden Winkel nur dann genau an, wenn der durch's Fernrohr unmittelbar gesehene Richtpunct A (Fig. 3, Taf. X.) sehr weit entfernt ist, da man dann den Winkel H, d. h., den doppelten Drehungswinkel DCD′, für den wahren ACB nehmen kann. Ist aber der Gegenstand A ziemlich nahe, so ist der Winkel H gegen den wahren ACB um den Winkel A zu klein, weil $ACB = H + A$ ist. Diesen Winkel nennt man die Parallaxe des Sextanten, und es hängt derselbe von der Entfernung des Objects A und vom senkrechten Abstande CN des Drehungsmittelpunctes C von der Achse OA des Fernrohres ab. Man

hat aber $\sin A = \frac{CN}{AC}$, oder, weil A nur klein ist, $A = 206265 \frac{CN}{CA}$ Secunden, und diesen Winkel muß man also zu dem beobachteten addiren, um den wahren zu erhalten. Die Größe CN läßt sich am Instrumente messen, der Abstand CA aber muß irgendwoher, vielleicht durch vorläufige Schätzung oder Berechnung, näherungsweise bekannt sein.

§. 133.

Ehe man aber mit einem Spiegelsextanten beobachten kann, muß derselbe in allen seinen Theilen gehörig rectificirt sein. Hierzu gehört nun:

1) Daß die Oberflächen beider Spiegelgläser genau eben sind. Man erkennt dieses daran, wenn die im Spiegel gesehenen entfernten Objecte nicht verzerrt erscheinen, besonders, wenn man das Auge in einige Entfernung vom Spiegel hält. Man muß auch darauf achten, daß die in ihren Rahmen befindlichen Spiegel durch allzugroßen Druck der Schrauben nicht cylinderförmig oder sphärisch gebogen werden;

2) daß die Flächen der Gläser genau parallel sind. Eigentlich ist es doch die Belegung selber, welche den Spiegel bildet, das Glas dient nur, die Existenz dieses Spiegels möglich zu machen. Es darf also das Glas auf das darauf fallende Licht in keiner Weise eine Wirkung äußern, und dieses findet nur statt, wenn beide Flächen genau parallel sind, weil dann die Brechung, die ein Strahl bei'm Eintritte an der Vorderfläche erleidet, durch eine zweite Brechung bei'm Austritte wieder aufgehoben wird, gleichsam als ob die spiegelnde Belegung allein wirkte. Nicht so ist dieses der Fall bei keilförmigen Gläsern, wie man sich durch eine, nach den Gesetzen der Dioptrik ausgeführte Zeichnung leicht überzeugen kann. — Wäre der unbelegte Theil des kleinen Spiegels keilförmig gestaltet, so würde ein hindurchgehender Lichtstrahl bei'm Austritte eine andere Richtung haben, als bei'm Eintritte, während doch die Theorie eine unveränderte Richtung voraussetzt.

Um nun jeden Spiegel in Hinsicht auf den Parallelismus seiner Flächen zu prüfen, lasse man ein helles

und scharf begrenztes, sehr entferntes Object, am besten einen Fixstern, sich darin spiegeln, so zwar, daß der Spiegel dabei eine sehr geneigte Lage gegen das Auge hat. Wird das Object doppelt oder mehrfach gesehen, so sind die Flächen des Spiegels nicht parallel. Die doppelten Bilder rühren nämlich daher, daß auch Spiegelungen an der unbelegten Fläche entstehen, wenn gleich minder lebhaft. Bei'm Eintritte des Lichtes entsteht schon ein an der Vorderfläche gespiegeltes Bild; dann entsteht auf der belegten Fläche das Hauptbild, und wenn dessen Strahlen aus der Vorderfläche austreten wollen, so wird ein Theil derselben wieder auf die Belegung zurückgeworfen, und es entsteht ein drittes Bild. Auf solche Weise entsteht durch wiederholte Rückspiegelungen eine unendliche Menge immer schwächer werdender Bilder. Sind nun beide Flächen parallel, so sind auch die Srahlen aller Bilder, welche von demselben Puncte des gespiegelten Objectes kommen, unter sich parallel, weßhalb alle zu einem einzigen Bilde sich mischen, wenn das Object, und folglich auch sein Bild, unendlich weit entfernt ist. Nur bei sehr nahen Objecten, wie, z. B., wenn man ein Licht vor einen Zimmerspiegel hält, können die vielfachen Bilder, deren Abstand durch die Dicke des Glases bedingt wird, merklich werden. — Sind aber die Flächen des Glases nicht parallel, so bleiben auch die Strahlen der verschiedenen Bilder nicht parallel, und diese kommen daher zur Wahrnehmung.

Bei dem unbelegten Theile des kleinen Spiegels kann man den Parallelismus der beiden Glasflächen auch so prüfen: Man richte ein mit einem Fadenkreuze versehenes Fernrohr auf einen beliebigen Gegenstand und bringe dann das Spiegelglas vor das Objectiv des Fernrohres. Bleibt hierbei der beobachtete Gegenstand vom Visirfaden fortwährend geschnitten, so sind die Flächen des Glases parallel; weicht aber der Visirfaden vom Objecte ab, so hat das Glas eine keilförmige Gestalt. Denn wenn die Flächen parallel sind, so wird das hindurchgehende Licht von seiner Richtung nicht abgelenkt, und der Visirfaden muß folglich immer noch denselben Gegenstand decken.

Die keilförmige Gestalt der Spiegelgläser hat auch auf die Deutlichkeit der Bilder nachtheiligen Einfluß.

3) Die beiden Spiegel müssen auf der Ebene des Limbi, oder auf der Umdrehungs-

ebene der Alhidade senkrecht stehen. Der große Spiegel ef (Fig. 4, Taf. X.) wird gewöhnlich schon vom Künstler in die erforderliche Stellung gebracht und bedarf daher keiner Correction weiter; wo indessen die erforderlichen Stellschrauben vorhanden sind, kann man auf folgende Weise verfahren, nach welcher auch der Künstler verfährt. Man lasse sich zwei messingene Diopteren A und B (Fig. 5, Taf. X.) machen, welche unten einen rechtwinklich umgebogenen Fuß haben und daher auf jeder Ebene genau senkrecht stehen. Das eine Diopter hat, wie gewöhnlich, bei m ein feines Visirloch, das andere einen feinen mit der Grundfläche parallelen Visirfaden n, beide in genau gleicher Höhe von der Grundfläche. Man prüft die Richtigkeit der Diopteren dadurch, daß man sie auf einer ebenen Spiegelplatte mit ihren Rückenseiten aneinander setzt und zusieht, ob diese Seiten genau aufeinander zu liegen kommen, und ob der Visirfaden genau durch die Mitte des Visirlochs geht.

Man nimmt nun das Fernrohr ab, legt das Instrument auf einen Tisch und dreht die Alhidade vom Limbus herab, bis dieselbe, oder vielmehr der große Spiegel, senkrecht auf dem durch den Nullpunct der Theilung gehenden Halbmesser steht. Man setzt dann das Diopter mit dem Visirfaden möglichst nahe an den großen Spiegel auf den Körper des Sextanten, das Oculardiopter auf den Limbus bei dem Nullpuncte der Theilung. Steht nun der große Spiegel auf der Ebene des Limbi senkrecht, so fallen das Visirloch, der Vrsirfaden und die von beiden im Spiegel entstandenen Bilder genau in eine gerade Linie, und wenn also dem durch das Visirloch sehenden Auge die übrigen drei Merkmale sich zu decken scheinen, so steht der Spiegel richtig; wo nicht, so muß durch die Correctionsschrauben nachgeholfen werden. Man wiederholt diesen Versuch noch, indem man das Oculardiopter bei die Theilpuncte 60° und 120° setzt und hilft so lange nach, bis keine Abweichung mehr bemerkt wird.

4) Ehe man zur Correction des kleinen Spiegels schreitet, sollte streng genommen das Fernrohr insoweit berichtigt sein, daß seine Axe mit der Ebene des Limbi parallel läuft. Zu dem Zwecke sind die eben beschriebenen Diopteren so eingerichtet, daß sie mit dem Abstande der Mitte des Fernrohres von der Ebene des Limbi ungefähr gleich hoch

sind. Man legt dann den Sextanten auf ein Stativ oder irgend eine dazu sich eignende Unterlage, setzt das Objectivdiopter hart an den kleinen Spiegel, das Oculardiopter neben das Fernrohr und richtet das Ganze so, daß man einen entfernten Gegenstand vom Diopterfaden gedeckt sieht, wozu sich die horizontale Kante eines Daches sehr wohl eignet. Sieht man dann durch das Fernrohr und fällt der beobachtete Gegenstand genau zwischen beide horizontale Visirfäden, so ist die Axe des Fernrohres mit der Visirebene der Diopteru, und folglich auch mit der Ebene des Limbi, parallel: wo nicht, so muß man durch die Correctionsschrauben am Fernrohrträger nachhelfen, bis der Zweck erreicht ist.

5) Nun kommt es darauf an, auch den kleinen Spiegel auf die Ebene des Limbi senkrecht zu stellen. Zu diesem Behufe richtet man das Fernrohr auf einen scharf begrenzten und gut beleuchteten Gegenstand, z. B. einen Thurmknopf, den Mond u. s. w., und führt die Alhidade so weit fort, bis man denselben Gegenstand auch durch die doppelte Spiegelung im Fernrohre sieht, was nach der Einrichtung des Instrumentes immer nahe an 0° der Theilung Statt finden muß. Man sehe dann zu, ob man durch sanftes Drehen der Alhidade mittelst der Micrometerschraube beide Bilder zur genauen Deckung bringen kann. Geht dieses nicht an, sondern gehen nur beide Gegenstände an einander vorbei, so ist der kleine Spiegel mit dem großen nicht parallel, oder nicht senkrecht auf der Ebene des Limbi, und man muß durch die Correctionsschrauben dieses Spiegels nachhelfen, bis die genaue Deckung erfolgt. Am besten scheint es, zu diesem Behufe eine scharfe Kante, z. B. eine Feueresse, zu beobachten, wo dann die Kanten beider Bilder zusammenfallen müssen.

6) Nach der Theorie sollten beide Spiegel, wenn die Alhidade auf 0° steht, genau parallel sein, damit auf dem Limbus der Drehungswinkel des großen Spiegels richtig abgelesen werden könne. Um dieses zu untersuchen, führe man den Inder des Nonius genau auf 0° des Limbi, richte dann, damit die Parallaxe des Sextanten nicht merklich werde, das Fernrohr nach einem sehr weit entfernten Gegenstande, am besten nach dem Monde, oder auch mit Vorsetzung eines Blendglases nach der Sonne,

Decken sich beide Bilder genau, so sind beide Spiegel auch parallel; wo nicht, so muß man durch die zu diesem Behufe angebrachten Correctionsschrauben den kleinen Spiegel so lange um seine auf der Ebene des Limbi senkrechte Axe drehen, bis die Deckung genau erfolgt.

An den neueren Instrumenten sind jedoch solche Correctionsschrauben nicht angebracht, weil hierdurch die Festigkeit des Instrumentes, die ohnehin durch die Art seines Gebrauches gefährdet ist, zu sehr leidet. Nun ist klar, daß zwar immer der Drehungswinkel der Alhidade dem des großen Spiegels gleich ist; allein wenn die Alhidade im Anfange der Drehung, wo beide Spiegel parallel sein müssen, nicht zugleich auf 0° steht, so kann der richtige Drehungswinkel auf dem Limbus nicht abgelesen werden, sondern derselbe wird immer um den Theil zu groß oder zu klein gefunden, um welchen der Index des Nonius bei paralleler Stellung der Spiegel von 0° abweicht. Diesen constanten Winkel nennt man den Collimationsfehler, und man bringt denselben bei jeder Winkelmessung in Rechnung. Da der Künstler schon dafür sorgt, daß, wenn die Alhidade 0° zeigt, beide Spiegel nahe parallel sind, so kann begreiflich der Collimationsfehler nur klein sein.

Um nun den Collimationsfehler zu finden, richte man wieder das Fernrohr nach einem sehr weit entfernten Gegenstande, damit die Parallaxe des Sextanten nicht merklich werde, und bringe mittelst der Micrometerschraube seine beiden Bilder zur Deckung. Alsdann ist der Abstand des Index von 0° der Theilung der Collimationsfehler, und man muß denselben von jedem gemessenen Winkel abziehen, wenn er von 0° nach dem kleinen Spiegel hin liegt; liegt er aber auf der entgegengesetzten Seite, so muß man ihn addiren. — Hieraus begreift man denn auch die Wichtigkeit der Uebertheilung des Sextanten.

Genauer findet man den Collimationsfehler auf folgende Weise. Man richte das Fernrohr nach dem vollen Monde, oder auch, nach Vorsetzung eines Blendglases, nach der Sonne, bringe mittelst der Micrometerschraube die Ränder beider Bilder zur Berührung und lese den Stand des Nonius ab. Man bringe alsdann die entgegengesetzten Ränder beider Bilder zur Berührung und lese ebenfalls den Stand des Nonius ab. Der halbe Unterschied beider Lesungen ist der Collimationsfehler,

hingegen ihre halbe Summe der scheinbare Durchmesser (Sehewinkel) des Mondes oder der Sonne. Es sei nämlich a b (Taf. X., Fig. 10) das unmittelbar gesehene, a′ b′ das gespiegelte Bild. Wenn die gleichnamigen Ränder a und a′ zur Berührung, also die Sonnenbilder selbst zur Deckung gebracht werden, so sind beide Spiegel parallel und der Nonius zeigt den Collimationsfehler $= d$. Führt man dann die Alhidade vorwärts, bis sich b und a′ berühren, so hat sie sich sammt dem großen Spiegel durch den scheinbaren Sonnendurchmesser bewegt, und der Nonius zeigt $s - d$ oder $s + d$, je nachdem d in die Theilung des Limbi selbst, oder in die Uebertheilung fällt. Diese Lesung $s \mp d$ sei $= a$. Will man hierauf die Ränder a und b′ zur Berührung bringen, so muß man die Alhidade rückwärts durch den Bogen $a b' = 2s$ führen, so daß nun der Nonius $2s - (s \mp d) = s \pm d = b$ zeigt. Hieraus hat man aber $s = \frac{a + b}{2}$ und $\mp d = \frac{a - b}{2}$.

Man kann dieselbe Beobachtung auch mit einem irdischen Gegenstande, z. B. mit einem Thurmknopfe, machen, wenn man die Parallaxe des Sextanten in Rechnung bringt.

Weil der Collimationsfehler durch die Wandelbarkeit des Instrumentes sich mit der Zeit ändert, so muß man ihn öfters und bei jeder wichtigen Messung unmittelbar vorher suchen.

7) Bei Beobachtung stark leuchtender Gegenstände, z. B. der Sonne, werden, wie schon bemerkt, die Blendgläser vorgeschoben. Diese Gläser müssen ebenfalls genau eben sein und parallele Flächen haben, damit sie nicht die oben bemerkte Ablenkung der Lichtstrahlen bei keilförmigen Gläsern hervorbringen. Wenn man indessen immer dieselben Blendgläser vorsetzt und hiernach den Collimationsfehler bestimmt, so hat die keilförmige Gestalt der Gläser keinen Einfluß.

Auch ist der Parallelismus der Blendgläser kein nothwendiges Erforderniß, wenn sie vor das Augenglas des Fernrohres gesetzt werden, weil dann die Strahlen beider Bilder auf gleiche Weise abgelenkt werden.

8) Hiermit ist nun der Sextant, so weit es in der Gewalt des Beobachters steht, vollkom-

men rectificirt. Man begreift aber leicht, daß die Senkrechtstellung des großen Spiegels und die Parallelstellung der Axe des Fernrohres mit der Ebene des Limbi, weil sie nur mit Hülfe des Visirens durch die Dioptern geschehen, nicht in aller Schärfe genau sein können; allein es ist auch hierin die größte Schärfe nicht nöthig. Die Theorie erfordert, daß der Strahl BC (Fig. 3, Taf. X.), nachdem er bei I vom zweiten Spiegel in die Richtung IH reflectirt worden, immer noch in einer Ebene sei, die mit der des Limbi parallel ist, und in welcher zugleich auch die Axe des Fernrohres liegt, und dieses findet nur unter den in 3, 4 und 5 aufgestellten Bedingungen Statt. Wenn aber einige dieser Bedingungen, oder alle drei nicht statthaben, so ist entweder die Ebene des Winkels IHB mit der des Limbi nicht parallel, oder auch, es liegen der einfallende Strahl BCH und der doppelt gespiegelte gar nicht in einerlei Ebene.

Es entstehen hierdurch ähnliche Unterschiede zwischen dem beobachteten und dem wahren Winkel, wie wenn ein Winkel von einer Ebene auf eine andere geneigte durch Perpendikel projicirt wird (§. 84). Bei sehr geringer Neigung der Ebenen sind die Unterschiede indeß sehr klein und können mit unseren feinsten Instrumenten kaum beobachtet werden. Da nun die Rectification der Spiegel und des Fernrohres immer bis auf einige Minuten genau ist, so kann auch aus den noch übrigen Fehlern in der Stellung dieser Theile kein merklicher Fehler in dem beobachteten Winkel entstehen. Eine streng mathematische Durchführung dieses Gegenstandes würde indeß für unser Lehrbuch zu weitläufig sein.

§. 134.

Ein Sextant kann aber auch, wie jeder andere Winkelmesser, Fehler haben, die der Beobachter nicht corrigiren, sondern nur auffinden und in Rechnung nehmen kann. Dieses sind die Fehler der Theilung des Limbi und des Nonius und die der Excentricität. Theilungsfehler des Limbi findet man, wie schon in §. 124 gezeigt worden, durch Vergleichung der Bogenweite des Nonius mit dem Limbus. Es kann aber auch der Sextant absolute Fehler haben bei sonst richtiger Eintheilung, wenn nämlich die Sehne des Bogens von 60° unrichtig und

dadurch auch dieser Bogen selbst unrichtig wäre. Um diesen Fehler zu finden, mißt man Winkel, welche vorher schon durch gute Instrumente bekannt sind, oder man mißt an einem Standpuncte die Winkel am Horizonte, deren Summe 360° betragen muß.

Am schwierigsten ist die Excentricität bei solchen Instrumenten zu bestimmen; der ungleiche Abstand des Nonius vom Theilrisse giebt zwar das Vorhandensein einer Excentricität zu erkennen, aber ihre Größe und Lage läßt sich hieraus nur unsicher bestimmen. Ein Sextant muß daher mit der vorzüglichsten Sorgfalt gearbeitet und namentlich richtig getheilt sein. Ist dieses der Fall, so kann man die vorhandene Excentricität durch Winkelmessung selbst finden, wenn man nämlich aus einem Standpuncte zwei angrenzende Winkel a und b einzeln mißt und dann ihre Summe a + b mit der gemessenen Summe vergleicht. Findet man bei Winkeln von verschiedener Größe die berechnete Summe mit der beobachteten übereinstimmend, so kann man das Instrument für fehlerfrei halten.

§. 135.

1) Um Höhenwinkel mit Hülfe eines Sextanten zu messen, bedarf man eines künstlichen Horizontes, d. h., einer genau horizontalen, spiegelnden Oberfläche, dergleichen jedes in einem Gefäß ruhig stehende Wasser abgiebt. Solche Wasserhorizonte, welche aus einem inwendig geschwärzten und mit Wasser gefüllten Gefäße bestehen, sind wirklich im Gebrauche. Bei den Quecksilberhorizonten wird, statt des Wassers, Quecksilber angewendet, welches zuvor von dem auf der Oberfläche haftenden Schmutze durch befeuchtetes Löschpapier gereinigt wird. Weil der Wind die Flüssigkeiten, und namentlich auch das Quecksilber, sehr leicht in zitternde Bewegung versetzt, die bei den Beobachtungen hinderlich ist, so bedeckt man die Gefäße mit einer Glasscheibe oder einem Glasdache, wobei jedoch die Gläser ebene und genau parallele Flächen haben müssen, damit sie nicht die durchgehenden Strahlen von ihrer Richtung ablenken. Weil solche Parallelgläser schwer zu erhalten sind, so bedient man sich oft lieber der Glimmerblättchen, deren Flächen, in der Regel, von Natur genau parallel sind. — Die Oelhorizonte bestehen aus blechernen Büchsen, welche

einige Linien hoch mit Baumöl gefüllt werden, worunter man etwas Kienruß gemischt hat. — Weingeisthorizonte sind nichts anders, als Dosenlibellen, bei welchen die äußere Fläche der bedeckenden Glasscheibe genau eben ist und horizontal liegt, wenn die Luftblase in der Mitte einspielt. Die innere Fläche der Glasplatte ist matt geschliffen, und die horizontale Stellung wird durch drei Fußschrauben erhalten. Endlich sind noch die Glashorizonte im Gebrauche, dicke, runde, auf der unteren Seite matt geschliffene Glasplatten, welche entweder auf Quecksilber schwimmen, dessen Oberfläche sorgfältig von Schmutz gereinigt ist, oder mit einer sehr empfindlichen Röhrenlibelle horizontal gestellt werden. Statt des Glases bedient man sich auch des Obsidians. — Auf dem Schiffe dient der Meeresspiegel als künstlicher Horizont.

2) Um nun mit Hülfe eines künstlichen Horizontes und des Sextanten einen Höhenwinkel zu messen, bringe man das in der Spiegelfläche **MN** des Horizontes gesehene Bild **A'** (Taf. **X.**, Fig. 11) und den Gegenstand **A** selbst zur Deckung, wobei man, bei verticaler Stellung der Ebene des Limbi, das Fernrohr unmittelbar auf das Bild **A'**, als den schwächeren Lichtpunct, richtet und die Alhidade so weit dreht, bis auch das Object **A** durch die Reflexion von beiden Spiegeln des Sextanten im Fernrohre erscheint. Der Nonius giebt dann den doppelten Höhenwinkel an.

Denn man denke sich durch das Object **A** und das Auge des Beobachters eine Verticalebene gelegt, so ist deren Durchschnitt **MN** mit der horizontalen Fläche des künstlichen Horizontes eine horizontale Linie, und wenn daher von **A** bei **C** ein Strahl auf den Spiegel fällt, so ist **ACM** der Höhenwinkel von **A** in dem Puncte **C**. Dieser Strahl **AC** gelangt nun durch die Spiegelung (§. 41) so in das Auge des Beobachters, daß der Winkel **OCN** oder **MCA'** dem **ACM** gleich ist, und es ist folglich **ACA'** der doppelte Höhenwinkel.

3) Ist der künstliche Horizont mit einem Glasdache versehen, so kann man hierbei zugleich die Parallelität der Gläser desselben prüfen, indem man den Höhenwinkel zweimal mit verwendetem Dache beobachtet, zu welchem Zwecke man nur den Horizont um 180° zu drehen braucht. Stimmen beide Resultate überein, so sind die Dachgläser parallel, wo nicht, so giebt der halbe Unter-

schied den Fehler an, der jedoch nicht für alle Höhenwinkel constant ist. Auch kann man die Horizontalität eines auf Quecksilber schwimmenden Glashorizontes prüfen, wenn man die nämliche Beobachtung bei einer Umdrehung der Platte um 90° und 180° wiederholt.

4) Tiefenwinkel können begreiflich mit dem künstlichen Horizonte nicht gemessen werden, weil Gegenstände, die unter der Ebene des künstlichen Horizontes liegen, keine Lichtstrahlen darauf werfen können. Um beiderlei Winkel zu messen, müßte man den Sextanten an einem Stative so befestigen, daß die Ebene des Limbus in die Ebene des Elevations- oder Depressionswinkels und die durch einen horizontalen Visirfaden bezeichnete Axe des Fernrohres horizontal zu liegen käme. Wäre dann **HA** (Fig. 3, Taf. **X.**) diese horizontale Visirlinie und drehte man die Alhidade so weit, bis das Object **B** durch die Reflexion von beiden Spiegeln im Fernrohre erscheint und vom Visirfaden gedeckt wird, so würde der Nonius den Höhenwinkel **BHA** angeben. Denn da die Axe **HA** des Fernrohres horizontal liegt, so ist es ebenso gut, als wenn in **A** ein Object sich befände, das mit dem Standpuncte des Beobachters in einer horizontalen Ebene läge, und da man dieses Object so weit entfernt denken kann, als man will, so kommt die Parallaxe des Sextanten hierbei nicht in Rücksicht. Für Höhenwinkel muß der Limbus erdwärts, für Tiefenwinkel himmelwärts gekehrt sein, was allerdings seine Schwierigkeiten hat. Die Durchsicht durch den unbelegten Theil des kleinen Spiegels müßte abgeblendet werden.

§. 136.

Das Heliotrop.

1) Dieses Instrument dient an den anzuvisirenden Richtpuncten statt der gewöhnlichen Signale, um die Unsicherheit zu vermeiden, welche bei'm Einstellen des Fernrohres auf irdische Objecte, wegen mangelhafter oder schiefer Beleuchtung, oft Statt findet. Es gewährt aus sehr großen Fernen den Anblick eines Sternes und setzt daher den Beobachter in den Stand, mit eben der Genauigkeit darauf zu pointiren, wie es bei astronomischen Beobachtungen der Fall ist. Ein Jeder weiß nämlich aus Erfahrung, daß man den Widerschein der Sonne von spiegeln-

den Dachbelegungen oder Fensterscheiben selbst aus großen Entfernungen noch sehr lebhaft erkennt, obgleich bei Spiegelungen der Art eine ungeheure Menge des auffallenden Sonnenlichtes verloren geht. Wenn daher jene unvollkommenen Spiegelflächen durch vollkommenere ersetzt werden, so ist leicht zu erachten, daß man das reflectirte Sonnenlicht mit weit mehr Vortheil zu Signalen an solchen Puncten, zwischen welchen die Winkel gemessen werden sollen, wird gebrauchen können, als die ehedem zu diesem Zwecke verwendeten Nachtsignale, da das Sonnenlicht alle künstlichen Flammen an Intensität weit hinter sich läßt. Gauß hat nun für diesen Zweck ein Instrument erfunden und bei der hannöverischen Gradmessung in Anwendung gebracht, das er Heliotrop (Sonnenwender) nannte, und dessen Theorie folgende ist.

Es sei AB (Fig. 2, Taf. XII.) ein Fernrohr, welches nach dem Objecte O, dem man das Sonnenlicht zusenden will, gerichtet ist. Der Planspiegel CD sei so aufgestellt, daß er das Sonnenlicht in der Richtung der Axe des Fernrohres reflectirt und daher in diesem das Bild der Sonne gesehen wird, so wird ein zweiter, gegen den vorigen senkrecht gestellter Planspiegel EF das Licht der Sonne gerade nach O führen. Denn da das vom Spiegel CD reflectirte Licht die Richtung KB hat, so sind die Winkel v und z am Einfallslothe EK gleich, und da die Scheitelwinkel z und w gleich sind, so ist auch $v = w$, d. h., der Spiegel EF wirft seine Strahlen eben dahin, wohin die Axe des Fernrohres gerichtet ist.

2) Nach diesem Principe wird der Bau des Instrumentes so geordnet: A (Fig. 1) ist ein massiver Träger, in dessen Lagern das Fernrohr durch bewegliche Schieber bei B und C so festgehalten wird, daß es darin mit beträchtlicher Reibung sich um seine Axe drehen läßt. Zur horizontalen Drehung des Fernrohres ist in der Säule D eine durchgehende Axe eingepaßt, die mit dem Träger A verbunden ist und durch die Mutter E vermittelst des eingeschraubten Stiftes ab festgehalten wird. Hierdurch, und mit Hülfe der Stellschrauben F des Dreifußes, kann das Fernrohr genau auf den Gegenstand, welchem der Sonnenstrahl zuzuwenden ist, gerichtet werden.

An der Objectivfassung des Fernrohres ist ein Stück G, welches mit zwei vorstehenden Armen H und I versehen ist, durch Schrauben befestigt. Zwischen diesen bei-

den Armen bewegt sich um eine Axe K der Spiegelrahmen L, dessen Spiegelfläche vom Objectiv abgekehrt ist und der eigentlich aus zwei Planspiegeln d und e besteht, welche genau in eine Ebene fallen müssen und daher durch die Stellschräubchen f und g berichtigt werden können, weil hinter der Spiegelfläche sich Federn befinden, die den erforderlichen Gegendruck ausüben. Der Spiegelrahmen L erhält durch Anziehen der Schraube c eine sichere Drehung. Die beiden, einen einzigen Spiegel bildenden, kleinen Spiegel d und e sind es, welche das Sonnenlicht dem entfernten Beobachter zusenden.

Der Spiegel p steht senkrecht gegen die Spiegel d und e und hat an seiner hintern Seite einen Arm i, durch dessen Stellschraube x er in die erforderliche Lage gebracht werden kann. Er ist es, welcher das Sonnenbild in das Fernrohr bringt, und damit der Hineinsehende nicht durch zu starken Glanz geblendet werde, besteht er nur aus einem, an der Hinterseite geschwärzten Glase.

Der größere Spiegel L bedarf nur einer geringen Dimension, indem ein Spiegel von 2 Zoll Breite und 1½ Zoll Höhe schon ein auf bedeutende Entfernungen sichtbares Sonnenbild darbietet. Bei geringeren Entfernungen wird die Verkleinerung durch Aufstecken eines messingenen geschwärzten Rahmens bewirkt.

Von den Führungsstiften k und l dient der erstere zur Umdrehung des Fernrohres in seinen Lagern, der andere zur Drehung des Rahmens L um seine Axe. Sie sind beide mit Gegengewichten versehen.

Die Scheibe M dient zur Erleichterung des Gebrauchs des Instrumentes. Ihre Ebene ist gegen die des Spiegels p senkrecht, und wenn ihr Schatten durch Umdrehung des Fernrohres um seine Axe als gerade Linie erscheint, so ist dieses ein Anzeichen, daß der Spiegel p die Stellung hat, vermöge welcher er, nach gehöriger Drehung um die Axe K, das Sonnenbild in's Fernrohr reflectiren kann.

Das Fernrohr ist übrigens mit einem Fadenkreuze versehen, das durch die Schräubchen w berichtigt werden kann.

3) Bei der Aufstellung oder dem Gebrauche des Instrumentes ist dasselbe so zu behandeln, daß die Mitte des Fadenkreuzes auf den Punct trifft, der vom entfernten Beobachter eingenommen worden. Hierauf drehe man

das Fernrohr mittelst des Hebels k um seine Axe, bis der Schatten der Scheibe M eine Linie bildet, und bewege die verbundenen Spiegel um die Axe K mittelst des Hebels l. Beide Drehungen haben den Zweck, das reflectirte Sonnenbild in das Fernrohr auf die Mitte des Fadenkreuzes zu bringen, und sobald dieses der Fall ist, sieht der entfernte Beobachter das Sonnenbild in dem Spiegel L. Es versteht sich, daß man die gedachten Drehungen bei längerem Gebrauche, wegen der Aenderung im Stande der Sonne allmälig weiter fortsetzen muß.

4) Ehe man aber das Heliotrop gebrauchen kann, muß es gehörig berichtigt werden, wozu Gauß selbst folgende Anleitung giebt:

I) Das Fadenkreuz muß genau in die optische Axe des Fernrohres gebracht werden. Hierzu dienen die Stellschräubchen w; das Verfahren aber kennt man schon aus §. 64, 2, c.

II) Zu dieser optischen Axe muß die Drehungsaxe K der beiden Spiegel senkrecht sein. Um dieses bewirken zu können, ist die Umdrehungsaxe des Rahmens L verschiebbar. An dem Ende des einen Armes H befindet sich nämlich eine Schraubenmutter, welche durch zwei von entgegengesetzten Seiten her wirkende Schräubchen verschiebbar ist. Durch diese Mutter aber geht eine Schraube mit einer conischen Spitze, welche in eine an dem Rahmen L befestigte Pfanne eingreift. — Nachdem das Heliotrop auf ein festes Postament gestellt ist, richte man die Spiegelaxe K so, daß der Führungsstift l nach oben, die Scheibe M nach unten zu liegen kommt, drehe den Führungsstift l nach dem Augenmaße mit der Fernrohraxe parallel, hänge an ihn eine Libelle und bringe, durch Aenderung der Länge der Drähte, womit sie an jenem Stifte aufgehängt ist, die Luftblase nahe, nachher aber durch die Stellschraube des Dreifußes genau zum Einspielen. Man gebe nun dem Stifte die entgegengesetzte Lage (war vorhin das Ende l nach der Ocularseite hin, so wird es nun von derselben abwärts gerichtet), hebe das Fernrohr vorsichtig aus seinen Pfannenlagern und lege es umgekehrt wieder ein. Die Luftblase muß alsdann einspielen; außerdem wird die eine Hälfte des Ausschlags an den Fußschrauben, die andere an den Stellschrauben der Axe K corrigirt. Eine Herstellung in die erste Lage ergiebt sodann, ob die Vertheilung richtig

gemacht ist. Diese Methode beruht auf der Voraussetzung, daß die walzenförmigen Ansätze, mit welchen das Fernrohr in den Lagern ruht, genau gleich sind.

III) Die Ebenen der drei Spiegel (des kleineren p und der Bestandtheile d und e des größeren) müssen der Spiegelaxe K parallel sein. Erhält eine Ebene eine halbe Umdrehung um eine ihr parallele Axe, so wird sie in eine, mit ihrer ersten Lage parallele, aber entgegengesetzte Lage gebracht, statt daß sie nicht zu dieser parallelen Lage kommen kann, wenn sie mit der Axe, um welche die Drehung geschieht, nicht parallel ist. Diesem Grundsatze zufolge stelle man zwei mit Kreuzfäden versehene Fernröhre M N (Fig. 3, Taf. XII.) so auf, daß scharf unterscheidbare, nicht zu entfernte Gegenstände O, P in ihren optischen Axen erscheinen und diese Axen nahe in einer Ebene liegen. Man schraube nun das Stück G mit dem Spiegelwerk vom Fernrohre ab, und nachdem man es auf ein Bret oder ein Kästchen befestigt hat, bringe man dieses auf einen feststehenden Tisch bei R nahe in den Schnitt der optischen Axen, so daß die Drehungsaxe der Spiegel ohngefähr in ihrer Ebene liegt und den Winkel derselben halbirt. Den Punct R findet man leicht mit hinreichender Genauigkeit, wenn man einen kleinen Gegenstand dort aufstellt und sieht, wo er stehen muß, damit er in beiden Fernröhren im Durchschnitte des Fadenkreuzes erscheine. Die Objecte O und P brauchen kaum 100 Fuß entfernt zu sein. Den zu prüfenden Spiegel stellt man dann senkrecht auf jene Ebene und bewirkt durch kleine Drehungen und sanfte Anschläge, sowohl an den Spiegel selbst, als an das Bret oder Kästchen, daß das Bild von O, aus dem Spiegel reflectirt, auf der optischen Axe des Fernrohres M erscheine; darauf drehe man den Spiegel um 180° um seine Axe und sehe, ob in dieser Lage das Bild von P auf der optischen Axe des Fernrohres N erscheine. Kann solches nicht durch bloße Drehung des Spiegels um die Axe K erreicht werden, so muß die Hälfte durch Aenderung der Stellung des Bretes oder Kästchens, worauf der Rahmen L befestigt ist, und die andere Hälfte durch die Schrauben f, g, h corrigirt werden.

IV) Die beiden Spiegelebenen d und e müssen genau parallel sein. Das einfachste und auch hinreichende Genauigkeit gewährende Mittel, die Berichtigung auf

dieses Erforderniß zu bewerkstelligen, ist, eine gerade Linie, mit welcher die Spiegelaxe K ohngefähr parallel gestellt ist, in beiden Spiegelflächen zu betrachten, wo sie, mindestens dem bloßen Auge, als eine einzige gerade Linie erscheinen muß. Man kann dazu die Kante irgend eines regelmäßigen großen Gebäudes benutzen. Oder man richte die beiden Bestandtheile d und e als künstlichen Horizont ein, mittelst dessen man die Sonnenhöhe in jedem derselben mit einem Sextanten mißt. Beide Messungen müssen, wenn die Berichtigung gemacht ist, gleich sein. Die Correction wird an der Schraube h bewerkstelligt.

V) Die Ebene des kleinen Spiegels muß zu den Ebenen der beiden Bestandtheile des großen senkrecht stehen. Zur Correction dient die Schraube x am Schwanze des kleinen Spiegels. Man richte das Heliotropenrohr und hinter ihm ein um den halben Abstand der Mittelpuncte beider Bestandtheile des großen Spiegels höher gestelltes Hülfsfernrohr auf ein hinreichend entferntes Object, so daß die optischen Axen beider Fernröhre als parallel gelten können. Man bewirkt dies, indem man zuerst das Heliotropenfernrohr richtet, dieses dann aus seinen Lagern herausnimmt, alsdann das Hülfsfernrohr in der beschriebenen Höhe richtet und jenes hiernach umgekehrt wieder einlegt. Hierdurch kommen beide Fernröhre in entgegengesetzte Richtung, aber ihre Axen sind immer noch parallel. Die Spiegelaxe wird darauf senkrecht gestellt, mit dem Bestandtheile d nach oben, und durch Drehung des Spiegelsystemes und nöthigenfalls auch des Fernrohres bewirkt, daß irgend ein Object durch Reflexion aus dem kleinen Spiegel auf der optischen Axe des Heliotropenfernrohres erscheine. Erscheint dann dasselbe Object durch Reflexion aus dem Bestandtheile d des großen Spiegels auf der optischen Axe des Hülfsfernrohres, so macht die Ebene des kleinen Spiegels mit der Ebene des Bestandtheiles d einen rechten Winkel. Das Fehlende wird an der Schraube x corrigirt. Man kann jetzt auch die Berichtigung IV prüfen, indem man das Heliotropenfernrohr um 180° um seine Axe dreht, so daß der Bestandtheil d wieder nach unten kommt, wobei dann ein Object auf der andern Seite genommen werden muß. — Denn der kleine Spiegel **A B** (Fig. 4, Taf. **XII.**) reflectirt das vom Objecte **S**

kommende Licht SE nach der Richtung EH in das Heliotropenfernrohr; der große Spiegel aber trägt den ebenfalls von S kommenden Strahl SD in der Richtung DI fort, welche mit EH parallel ist. Denn es ist nach dem Gesetze der Spiegelung $x = y$, und weil $t = x$, so ist $HED = 2y$. Ferner ist $v = w = 90^\circ - t = 90^\circ - y$, daher $v + w = 180^\circ - 2y$ und $EDI = 2y$; folglich HE mit DI parallel. Sonach gelangt aber der Strahl DI in das Hülfsfernrohr.

5) Von der Wirkung des Heliotropen giebt Gauß selbst folgende Beispiele: Die Entfernung vom Lichtenberge bis zum Berge Hill ist 39952 Meter; die des Deisters vom Hill 40605 Meter. Auf diesen beiden Entfernungen sah man das reflectirte Licht immerfort mit bloßem Auge; auf 55122 Meter Distanz war es, wenn die Umstände die Beobachtung irgend begünstigten, gleichfalls sichtbar, und einmal, unter besonders günstigen Umständen, sah man das vom Brocken aus reflectirte Licht sogar auf dem Hohenhagen in 69194 Meter Entfernung. Im Fernrohre konnte man das Licht vom Inselsberge auf dem Brocken in 105986 Meter Entfernung sehen und gegen Sonnenuntergang noch sehr scharf darauf pointiren.

Achtes Capitel.

Von der Zeichnung der Charten, und namentlich der Situationspläne.

§. 137.

Was rücksichtlich des Technischen bei'm Zeichnen der Charten gesagt werden könnte, ist zu unbedeutend und zu bekannt, als daß wir hier den Raum damit verschwenden sollten. Im Allgemeinen ist wohl die Ausarbeitung einer geometrischen Zeichnung ungleich leichter, als selbst die bloße Nachahmung einer freien Handzeichnung, weil die bei jener erforderlichen Linien meist ge-

rade sind und mit Hülfe eines Lineals sicher aus der Reißfeder fließen, während der aus freier Hand Zeichnende lediglich auf sein Augenmaß gewiesen ist und in der Hand eine Festigkeit und Geschicklichkeit besitzen muß, die selbst bei den auf einem Risse zu ziehenden krummen Linien, sofern diese durch eine hinreichende Anzahl geometrisch aufgetragener Puncte bestimmt sind, durchaus nicht nöthig ist. Indessen ist es doch höchst wichtig, wenn derjenige, der die Fertigung geometrischer Charten zu seinem Berufe zu machen gedenkt, sich hinlänglich im freien Handzeichnen übt, theils darum, weil ihm die hierdurch erlangte Geschicklichkeit zur saubern Ausarbeitung seiner Charte sehr zu Statten kommt, theils auch darum, weil auf einer solchen Charte manche Gegenstände, als die Bezeichnung der Wälder, Weinberge, Wiesen, Gärten u. s. w. eine im freien Zeichnen geübte Hand erfordern. — Nicht minder wichtig ist es, sich einer guten Schrift zu befleißigen, weil auch die beste Zeichnung durch häßliche Buchstaben entstellt wird. Darum hat man auch bei manchen Landesvermessungen besondere Vorschriften über die Art und die Größe der Schrift, welcher man sich auf der Charte, je nach der Größe des Maßstabes und der Art der zu bezeichnenden Gegenstände, bedienen soll; doch für unsern Vortrag, der auf solche Weise zum Theil in einen calligraphischen ausarten würde, eignen sich diese Materien nicht. Man kann indessen bemerken, daß die großen und kleinen, sowohl stehenden als liegenden lateinischen Buchstaben, desgleichen die bekannte englische Schrift mit überall elliptischer Rundung für Charten sich am Besten eignen. Endlich muß man auf das Auftragen der Farben, wenn solche gebraucht werden, sein Augenmerk richten, damit dieselben gleichmäßig vertheilt und gleichsam wie ein luftiger Schatten erscheinen, was besonders nicht leicht ist, wenn große Flächen zu bemalen sind.

§. 138.

Mit welchen conventionellen Zeichen die verschiedenen Gegenstände auf einer Charte zu bezeichnen sind, darüber wird man am Besten sich aus der Instruction des Staates, in welchem man lebt und arbeitet, Belehrung holen, weil in dieser Hinsicht keine überall gültige

Norm herrscht; besonders aber giebt die Anschauung verschiedener Charten sogleich den gewünschten Aufschluß. Die Bezeichnung von Wiesen und Gehölzen durch Farben ist auf öconomischen Charten möglichst zu vermeiden, wenigstens soll man nicht große Flächen damit bemalen, sondern nur höchstens die Grenzen mit einem farbigen Rande umfassen, weil durch die Nässe das Papier sich verzieht und somit die Zeichnung unrichtig wird. Ist doch ohnehin ein, selbst auf ein Reißbret gespanntes Papier durch hygrometrische Einwirkung der Luft Veränderungen unterworfen, so daß, z. B., Linien, die auf dem Papiere gerade gezogen wurden, bei verändertem Feuchtigkeitszustande der Luft nicht mehr gerade sind. Diese Bemerkung mag dienen, um manche bei Meßtischmessungen vorkommende Unrichtigkeiten, die sonst unbegreiflich scheinen, zu erklären.

Die Bezeichnung der Gegenstände auf einer Charte wird immer bis zu einem gewissen Grade der Aehnlichkeit auszuführen sein; Wasser wird man, z. B., blau, Wiesengrund hochgrün, Holz schwärzlichgrün, Haide gelblichgrün bemalen. So wird man Laubholz durch Laubbäume, Nadelholz durch Nadelbäume, Wiesen durch Grasbüschchen mit gefälliger Gruppirung bezeichnen; Obstbäume erhalten eine runde, sonstige Laubhölzer eine spitzige Krone, aus deren Form auch oft die Art des Baues sich errathen läßt. Gebäude werden nur im Grundriß aufgenommen, der jedoch, nach dem Zweck und der Bedeutung des Gebäudes, mit verschiedenen Farben ausgemalt wird. Ist man genöthigt, manche Gegenstände durch eigens erfundene oder nicht allgemein bekannte Zeichen auszudrücken, oder ist man hierin ganz seiner Willkühr überlassen, so vergesse man nicht, die nöthige Erklärung beizusetzen.

Das Papier wird, der größeren Haltbarkeit wegen, auf Leinwand gezogen.

§. 139.

Zeichnungen müssen oft nachgemacht oder **copirt** werden. Die hierzu dienenden Mittel sind folgende:

1) **Das Durchstechen des Originals mittelst einer sehr feinen, in einen Griff gefaßten Nadel.** Man bedient sich dieser Methode vorzüg-

lich, um aus den Meßtischblättern eine Reincharte zu fertigen, wobei zugleich meistenstheils die Aufnahmen mehrer Blätter zu einem Gesammtbilde vereinigt werden. Das Verfahren besteht darin, daß man auf einem ebenen Tische das Original auf das Blatt legt, worauf die Zeichnung kommen soll, und in alle Puncte des ersteren hineinsticht, wodurch dieselben auch auf der Copie sichtbar werden. Damit das Original recht glatt und ohne Falten aufliege, beschwert man es hie und da mit kleinen Gewichten, und damit man von der unverrückten Lage des Originals fortwährend überzeugt sei, kann man an zwei entgegengesetzten Ecken ein Paar Nadeln senkrecht einstechen. Das Durchstechen ist die leichteste und wohl auch die sicherste Methode, eine Zeichnung in gleicher Größe zu vervielfältigen, wenn man nur Acht hat, die Copirnadel bei'm Stechen immer senkrecht zu halten, und nicht durch zu dicke Nadeln das Original verdirbt.

Sind alle Puncte des Originals durchgestochen, so hebt man dasselbe ab, sucht auf der Copie die zusammengehörigen Puncte auf und verbindet sie nach Anleitung des Originals mit Bleistiftslinien, was sehr leicht nnd schnell von Statten geht. Ist mitunter ein Punct des Originales nicht durchgestochen worden, so trägt man denselben von vorhandenen Puncten aus durch Zirkeldurchschnitte über. Wären aber der vergessenen Puncte viele auf einem Fleck befindliche und daher das Uebertragen mit dem Zirkel mühsam, so sticht man lieber die nachzutragenden Puncte vom Original auf ein Stückchen Schreibpapier zugleich mit einigen von denjenigen benachbarten Puncten ab, die sich schon auf der Copie befinden. Diese dienen zum richtigen Anschluß des Papieres. Man schneidet nämlich mittelst eines scharfen Federmessers jeden zum Anschluß oder zur Prüfung des Anschlusses bestimmten Punct durch zwei von ihm selbst ausgehende und einen Winkel bildende scharfe Schnitte aus, biegt das dadurch entstandene Ohr zurück und legt die ausgeschnittenen Puncte auf die gleichnamigen der Copie, was nunmehr nach Anleitung der convergirenden Messerschnitte leicht geschehen, übrigens aber dadurch noch geprüft werden kann, daß man in den Punct der Copie eine Nadel senkrecht einsetzt und zusieht, ob sie sich genau in der Spitze des ausgeschnittenen Winkels befinde.

Nachdem kann man die fehlenden Puncte vom Papier leicht auf die Copie stechen. Zum Anschlusse muß man immer die weitest entfernten Puncte, und Behufs der Prüfung des Anschlusses, deren wenigstens drei wählen.

Wenn auf der Copie ein Meßtischblatt an ein anderes schon copirtes anzuschließen ist, so geschieht dasselbe mittelst der Puncte, die am Rande der Zeichnung auf beiden Blättern zugleich liegen. Man thut auch hierbei wohl, die zum Anschlusse dienenden Puncte nach der vorhin beschriebenen Weise auszuschneiden; denn wenn man auch die gleichnamigen Puncte des Originals und der Copie durch eingesteckte Nadeln übereinander bringen kann, so werden doch hierdurch die Puncte des Originals oft sehr erweitert und zu eigentlichen Löchern.

Meßtischblätter müssen sogleich durchgestochen werden, nachdem sie abgeschnitten worden, um ihnen zum Einlaufen und Krummziehen keine Zeit zu lassen. Wenn Meßtischblätter, die einige Zeit gelegen haben, Behufs einer Copie aneinander geschlossen werden sollen, so passen sie selten zusammen; oft zwar, was parador scheint, die äußersten Puncte, aber nicht die in der Mitte liegenden; ein Beweis, daß, bei vorausgesetzter richtiger Messung, das Blatt unregelmäßig eingelaufen ist oder sich krumm gezogen hat. Man muß dann das folgende Blatt an das vorhergehende, schon durchgestochene, so legen, daß die Fehler möglichst vertheilt werden. Oft hilft man sich auch dadurch, daß man das Blatt mit den kürzeren Dimensionen befeuchtet und, mit dem Stangenzirkel in der Hand, den Zeitpunct abwartet, wo es sich in erforderlichen Grade ausgedehnt hat.

2) Wenn man das Original nicht durchstechen darf, so muß man sich durch Abtragen mit dem Zirkel helfen, was entweder durch Construction von Dreiecken oder dadurch geschieht, daß man auf dem Original ein accurates Netz von Quadraten construirt und ein gleiches Netz auch auf das Papier trägt, worauf die Copie kommen soll.

Geschieht die Uebertragung von Puncten mit Hülfe von Dreiecken, so muß man dabei auf gleiche Weise verfahren, wie bei der Aufnahme eines größeren Districtes durch ein Dreiecksnetz. Zuerst faßt man nämlich zwei entfernte Puncte, gleichsam die Standlinie, zwischen die Spitzen des Stangenzirkels und sticht sie auf der Copie

ab. Gegen diese Standlinie bestimmt sich ein dritter Punct durch das Dreieck, das er mit der Standlinie bildet; man faßt die beiden übrigen Seiten des Dreiecks, eine nach der andern, in den Stangenzirkel und beschreibt damit auf der Copie aus den Endpuncten der Standlinie Kreisbögen, deren Durchschnitt der abzutragende Punct ist. Auf solche Weise construirt man gleichsam erst ein Netz von größeren Dreiecken, deren Winkelpuncte sämmtlich Anhaltepuncte zu neuen Uebertragungen abgeben. So arbeitet man aus dem Großen in's Kleine fort, bis alle Puncte abgetragen sind und vermeidet dadurch die Anhäufung der Fehler. Zuletzt kann man, wegen der Kleinheit der Dimensionen, sich des Handzirkels bedienen, dem man mitunter zur Erleichterung der Arbeit drei Füße giebt, von denen einer in den abzutragenden Punct gesetzt wird, die beiden andern aber in diejenigen beiden Puncte zu stehen kommen, von welchen aus die Uebertragung geschieht und die zugleich auch schon auf der Copie vorhanden sind. Der dritte Fuß des Zirkels sticht nun begreiflich, ohne daß Zirkelbögen beschrieben zu werden brauchen, sogleich den erforderlichen Punct.

Andere Mittel der Uebertragung sind hierbei nicht ausgeschlossen. Ein leichtes Mittel ist, z. B., zwischen zwei correspondirenden Puncten des Originals und der Zeichnung eine gerade Linie zu ziehen und die Uebertragung der umliegenden Puncte durch Coordinaten zu bewirken. Um hierbei die Construction von Perpendicularlinien entbehren zu können, wird man am besten die aus den Endpuncten der Abscissenlinie durch die überzutragenden Puncte beschriebenen Kreisbögen als Ordinaten, und ihre Durchschnitte mit der Abscissenlinie als Endpuncte der Abscissen annehmen und hiernach die Uebertragung bewirken.

Wenn die Uebertragung durch ein Quadratnetz geschieht, so ist dasselbe zu beobachten, was wir schon in §. 100, rücksichtlich der Uebertragung der Netzpuncte, gelehrt haben.

3) Eine Charte im verkleinerten Maßstabe nachzeichnen, heißt sie r e d u c i r e n. Man bedient sich dabei der in Nr. 2 beschriebenen Methoden, nur mit dem Unterschiede, daß man nicht die vom Original abgenommenen Maße selbst, sondern nur die Hälften, Drittel u. s. w. auf die Copie überträgt, wenn diese auf den halben, den dritten Theil des Maßstabes vom Original gebracht wer-

den soll. Die Mittel, deren man sich bedient, um die Verkleinerung der Maße zu bewirken oder zu erleichtern, sind folgende:

A) der bloße Transversalmaßstab. Auf demselben mißt man die Länge der Linie im Original, theilt die gefundene Zahl, z. B., 358 Fuß durch die Reductionszahl, z. B. 3, und nimmt den Quotienten $119\frac{1}{3}$ Fuß vom Maßstabe ab, wodurch man die reducirte Linie erhält, die man auf die Copie trägt.

B) Neben dem Transversalmaßstabe für das Original ein reducirter Maßstab für die Copie. Sollte, z. B., der Maßstab der Copie $\frac{2}{5}$ von dem des Originals sein, so construirt man sich zwei Maßstäbe, deren Einheiten sich wie 2 : 5 verhalten und gebraucht den kleineren für die Copie, den größeren für das Original. Wenn man nämlich eine Linie des Originals in den Zirkel gefaßt hat, so mißt man sie auf dem größeren Maßstabe und greift dann das gleichzählige Maß auf dem kleineren ab, wodurch man sogleich die reducirte Linie erhält.

Besonders brauchbar ist diese Methode, wenn das Verhältniß der Maße beider Zeichnungen durch zwei größere Zahlen gegeben oder gar irrational wäre. Wenn, z. B., sich die Maße wie $\sqrt{2} : 1$ verhalten sollten, so würde man die längste Linie des schon zu Gebote stehenden Maßstabes, die, z. B., 1200 Fuß betragen mag, mit $\sqrt{2} = 1,4142136$ dividiren, die dem Quotienten 848,528 Fuß gleiche Linie vom Maßstabe abnehmen und sie zu einem ebenfalls in 1200 Theile oder Fuß getheilten Transversalmaßstabe einrichten.

C) Leichter noch ist der Gebrauch des sogenannten vierbeinigen oder Reductionszirkels, bei welchem jeder Fuß noch über das Gewinde verlängert ist, so daß das Werkzeug die Form eines X erhält, dessen Schenkel um den Durchkreuzungspunct beweglich sind. Es entstehen hiernach zwei Zirkel, die sich gleichzeitig öffnen und schließen; die Füße des einen aber sind in einem bestimmten Verhältniß länger, als die des anderen, daher auch die Oeffnungen beider in eben dem Verhältnisse stehen. Wenn man, z. B., eine Charte auf das Drittel ihres Maßstabes reduciren wollte, so müßte der eine Zirkel dreimal längere Schenkel haben, als der andere, und wenn man dann eine Linie zwischen die Spitzen der längeren Schenkel

faßt, so hat man sogleich ihren dritten Theil zwischen den kürzeren Schenkeln.

Damit man aber vermittelst eines solchen Zirkels verschiedene Reductionen anstellen könne, sind die Schenkel linealförmig gearbeitet, an beiden Enden mit stählernen Spitzen versehen, und haben ihrer Länge nach einen Einschnitt, oder Falz, in welchem, wenn beide Füße aufeinander liegen, das Gewinde hin und her geschoben und durch eine Druckschraube festgestellt werden kann. Auf den Füßen oder Schenkeln befindet sich eine Theilung, auf welche man den Mittelpunct des Gewindes mittelst eines daran befindlichen Inderstriches einstellen und so die verschiedenen Verhältnisse beider Oeffnungen herstellen kann.

Man kann die Eintheilung der Schenkel auch zu anderen Zwecken einrichten, daß, z. B., die Spitzen auf der einen Seite des Gewindes die Sehne eines bestimmten Vielecks im Kreise angeben, wenn man den Halbmesser zwischen die Spitzen auf der andern Seite nimmt.

D) Endlich gehört hierher noch der Proportionalzirkel, welcher aus zwei um ein Zirkelgewinde beweglichen Linealen besteht, die man also nach Belieben öffnen oder schließen kann. Auf jedem Lineale ist eine Linie AC, BC (Fig. 18, Taf. XII.) gezeichnet, deren Richtung genau durch den Umdrehungspunct C geht. Jede dieser (gleichlangen) Linien ist in eine bestimmte Anzahl, z. B. in 200 Theile getheilt, und die Theilpuncte sind durch beigestochene Ziffern bezeichnet. Gesetzt nun, man wolle den siebenten Theil einer Linie finden, so sucht man auf den Linealen CA und CB die Theilpuncte, deren Zahl durch 7 theilbar und zugleich die größte von dieser Beschaffenheit ist. Dieses ist hier die Zahl 196, deren siebenter Theil 28 ist. Man faßt hierauf die zu theilende Linie zwischen die Spitzen eines gewöhnlichen Zirkels, öffnet den Proportionalzirkel so weit, daß die abgegriffene Linie AB zwischen die Theilpuncte 196 beider Linien CA und CB paßt, und nimmt endlich die Linie ab zwischen den Theilpuncten 28, welche der gesuchte siebente Theil der von AB sein wird, wie aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke unmittelbar klar ist.

Außer den Linien CA und CB sind auf dem Proportionalzirkel noch andere gezeichnet, die andern Zwecken entsprechen. So kann man, z. B., die CA und CB so theilen, daß sich die Abschnitte von C aus, wie $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$,

$\sqrt{3}$ u. s. w. verhalten, da man dann auch jede andere Linie nach diesem Verhältnisse theilen kann. Wäre, z. B., CA : Ca = $\sqrt{3}$: 1, so wäre auch AB : ab = $\sqrt{3}$: 1, folglich ab = $\frac{AB}{\sqrt{3}}$. — Man kann ferner die Theile der CA und CB so nehmen, daß sich die Abstände von C zur ganzen Länge, wie die Vielecksseiten zum Halbmesser verhalten, da man dann auf gleiche Weise, wenn man den Halbmesser eines Kreises zwischen die Endpuncte A und B setzt, durch die Weite ab diejenige Vielecksseite erhält, die der bei a und b für den Halbmesser CA oder CB bezeichneten entspricht.

4) Das leichteste Mittel, Zeichnungen nach einem gegebenen Verhältnisse zu reduciren, ist der Pantograph oder das fac simile, in seiner einfachsten Gestalt auch Storchschnabel, sonst Affe, genannt. Es besteht aus vier Linealen AB, DB, CE und CF (Fig. 17, Taf. XII.), die bei B, G, C und H mit Stiften zusammengefügt, aber noch um dieselben beweglich sind. Bei A ist das Instrument um einen am Tische befestigten Stift beweglich; bei C befindet sich der Stift, welcher die Copie zeichnet, und bei D ist der Griffel, mit welchem man auf den Linien des Originales hinfährt, um das Instrument in die Bewegung zu setzen, vermöge welcher der Bleistift bei C das verlangte Bild zeichnen muß. Bei B ruht das Instrument auf einem Fuße, der mit den Stiften bei A, C und D gleiche Höhe hat.

Die Zusammenfügung der vier Lineale ist ferner so gemacht, daß BA = BD, CG = BH = AG und GB = CH = HD ist. Demnach ist GCHB ein Parallelogramm, und der Winkel AGC bleibt immer dem bei B gleich, wie man auch das Instrument um A drehen und dabei die Lineale zusammenschieben oder ausziehen mag. Demnach bleiben auch beständig die gleichschenklichen Dreiecke ABD und AGC ähnlich; es müssen daher auch die Stifte bei D und C ähnliche Bilder beschreiben. Aber der Raum, welchen der Stift C durchläuft, verhält sich zum Wege des Stiftes D immer wie AG : AB, und in diesem Verhältnisse wird daher die Copie verjüngt.

Um mehre Verjüngungen hervorbringen zu können, sind auf den Linealen Löcher eingebohrt, damit man die Zusammenfügung der Lineale mittelst der Stifte G und

H ändern könne, oder die Zapfen, um welche sich die Lineale CE und CF bei G und H bewegen, sind auf Hülsen befestigt, die sich an den Linealen AB und DB verschieben lassen. — Von der Genauigkeit der Dimensionen des Instrumentes, von der Vermeidung des todten Ganges an den Gewinden oder Stiften hängt begreiflich die Genauigkeit der Copie ab, und um diese nach Möglichkeit zu erreichen, sind mancherlei Veränderungen und Verbesserungen angebracht worden, deren Beschreibung uns jedoch hier zu weit führen würde.

§. 140.

Wir haben nun noch von der Bezeichnung der Unebenheiten der Erdoberfläche auf einer Charte zu sprechen. Begreiflich giebt eine solche, nach der bisherigen Anleitung ausgeführt, nichts weiter an, als die horizontalen Entfernungen der Gegenstände; man kann aus ihr die Größe der auf den Horizont projicirten Flächen entnehmen; man kann aus den beigefügten Zeichen erkennen, ob die Oberfläche mit Wald, Gras, Haide bewachsen ist, ob sie mit Wasser bedeckt ist, oder ob sie dem Ackerbaue dient; aber die eigentliche Gestalt der Oberfläche, rücksichtlich ihrer Abdachungen, ihrer Berge, Thäler und Schluchten, läßt sich aus einer solchen Charte nicht beurtheilen, da für die Horizontalprojection die Höhe der Gegenstände ganz gleichgiltig ist.

Dem Grundsteuercataster ist auch die Beschaffenheit des Terrains hinsichtlich der genannten Eigenschaften ziemlich gleichgiltig; es verlangt von den Charten nur die Horizontalprojection der Grundstücke und trifft hiernach das Verhältniß der Besteuerung. Denn wenn auch rücksichtlich des Ertrags zwischen einem auf abhängigem Boden gelegenen Grundstücke und einem seiner Projection gleichen auf horizontaler Fläche ein Unterschied wirklich Statt findet, so wird derselbe durch Schätzung der Bonität, d. h. der Ertragsfähigkeit, ausgeglichen.

Allein für andere Zwecke ist die Kenntniß von der besonderen Gestaltung der Erdoberfläche fast noch wichtiger, als die der horizontalen Entfernungen; besonders ist es die Kriegsführung, welche von den Charten die genaue Angabe aller Berge, Abhänge, Schluchten u. s. w. verlangt, um darnach ihre Operationen im Voraus zu bestimmen. Wie nun jene Gegenstände mit genügender

Deutlichkeit auf der ebenen Fläche eines Papieres darzustellen sind, wollen wir im Folgenden nachweisen.

§. 141.

1) Denken wir uns, um das Verfahren bei der Aufnahme der Unebenheiten des Bodens zu erläutern, einen Berg und durch dessen Fuß eine horizontale Ebene gelegt, so wird der Durchschnitt irgend eine Figur ABCDE (Fig. 16, Taf. XII.) bilden, welche man die Grundfläche des Berges nennt, und die sich, weil sie eben in der Horizontalebene liegt und daher mit ihrer Horizontalprojection identisch ist, mit völliger Uebereinstimmung auf den Plan bringen läßt. Hierdurch erhalten wir also die Form des Berges am Fuße, aber wir können denselben auch in jeder beliebigen Höhe mit einer Horizontalebene durchschneiden und die Figur des Durchschnittes auf den Plan tragen, der dann auf gleiche Weise die Form des Berges in der Höhe, wo der Durchschnitt gelegt wurde, nachweis't. Werden solche Horizontalschnitte in jeder Höhe gelegt, wo die Form des Berges nach horizontaler Richtung sich ändert und zugleich die gegenseitigen Abstände derselben bemerkt', so ist dadurch offenbar die Form des ganzen Berges bestimmt; denn man darf nur die Durchschnitte ABCDE, abcde, welche gleichsam auf die Ebene des Papieres, mit Beibehaltung der richtigen Horizontalabstände, niedergelegt sind, in ihre richtigen verticalen Abstände bringen und sie mit einer genau anschließenden Fläche bekleiden, welche dann einen, dem Berge ganz ähnlichen Körper einschließen wird. — Hierin ist der Grundgedanke für die Terrainaufnahme enthalten, und wir haben denselben nur noch weiter auszuführen.

2) Man denkt sich also das Terrain in verschiedenen Höhen mit Horizontalebenen durchschnitten und bringt die Umfangslinien der Durchschnitte in den Plan. Aber in welchen Entfernungen sollen wir die Durchschnitte nehmen? Das Terrain wechselt bei zunehmender Höhe oft mit mannigfaltigen Formen, bald ist es gerade, bald hohl, bald convex gekrümmt, und wir dürfen daher die Horizontalschnitte nur in solchen Abständen nehmen, daß zwischen ihnen an allen Stellen das Terrain von unten nach oben nur geradlinig begrenzt ist, auf gleiche Weise, wie die Mantelfläche eines Kegels von der Peripherie nach

der Spitze als durch gerade Linien gebildet angesehen werden kann. Innerhalb zweier benachbarten Horizontalen kann das Terrain an verschiedenen Stellen des Umfangs sehr verschieden sein, hier steil, dort wieder sanft abhängig, hier ebenflächig begrenzt, dort cylinderförmig oder kegelförmig, theils hohl, theils convex, theils Schluchten bildend, nur ist Bedingung, daß die Neigungslinie des Bodens, oder die Linie des stärksten Abfalls, von einer Horizontale bis zur nächstfolgenden gerade, oder von einer geraden practisch nicht verschieden sei, daß also die zwischen beiden Horizontalen enthaltene Bodenfläche als eine nur einfach, nämlich nur nach horizontaler Richtung gekrümmte, betrachtet werden könne.

3) Unter der Neigungslinie verstehen wir diejenige, nach welcher die Neigung des Bodens gegen den Horizont oder die Böschung abgemessen wird. Ist der Boden MN (Taf. XIV., Fig. 29) ebenflächig, so ist seine Böschung allenthalben dieselbe, und die Neigungslinie wird auf folgende Weise gefunden: Man lege auf dem Boden eine Linie RN horizontal und durch einen Punct derselben eine zweite BA so, daß bei B rechte Winkel sind. Diese ist die Neigungslinie, denn sie ist offenbar der eine Schenkel des Neigungswinkels des Bodens MN gegen die durch RN gelegte Horizontalebene. — Ist der Boden krummflächig, so ist der Durchschnitt mit der Horizontalebene eine krumme Linie, wie bei A (Fig. 16, Taf. XII.) In diesem Falle müßte man den Horizontalschnitt durch den Punct A führen, woselbst die Böschung des Bodens gefunden werden soll, und an die krumme Durchschnittslinie in A die Berührungslinie mn ziehen; wird dann die Aa' auf dem Boden so gelegt, daß sie mit mn in A rechte Winkel bildet, so ist selbige die Neigungslinie und ihr Neigungswinkel mit der Horizontalebene das Maß der Böschung in A. Begreiflich darf die Böschung nur auf eine kurze Strecke als gleichförmig angesehen werden, wenn der Boden auch nach der Richtung Aa' gekrümmt ist; auch berührt dann diese Linie den Boden nur in A.

4) Die Neigungslinie hat merkwürdige geometrische und mechanische Eigenschaften. Sie heißt die Linie des größten Abfalls, weil sie unter allen auf dem Boden, so weit er ebenflächig ist, gezogenen Linien die größte Neigung gegen den Horizont hat. Sie durchschneidet, wie unmittelbar aus ihrer Construction hervorgeht, die Um-

fangslinien der Horizontalschnitte immer senkrecht und ist die kürzeste, die von einem gegebenen Puncte der einen Horizontale bis zur nächsten sich ziehen läßt. Sie ist endlich diejenige, auf welcher ein sich selbst überlassener Körper, z. B. das Wasser, von einem Horizontalschnitt bis zum nächst tieferen gelangt, und ist aus diesem Grunde für die Terrainlehre von der höchsten Wichtigkeit.

Wird eine Neigungslinie aus der Höhe in die Tiefe von Horizontale zu Horizontale fortgesetzt, so entsteht auf der Oberfläche des Berges eine gewisse Linie, welche den ganzen Weg des aus der Höhe in die Tiefe abfließenden Wassers angiebt. Sie ist nach der verschiedenen Form des Berges sehr verschieden, theils gerade, theils einfach, theils doppelt gekrümmt, immer aber die kürzeste, die sich auf der Oberfläche des Berges zwischen denselben Puncten ziehen läßt. Sie erscheint nach unserer Vorstellungsweise aus den einzelnen, zwischen je zwei Horizontalen liegenden geraden Stücken zusammengesetzt.

5) Werden die Neigungslinien auf die Horizontalfläche projicirt, so schneiden sie, wie Aa, die projicirten Horizontalen ebenfalls unter rechten Winkeln, wie sich aus stereometrischen Gründen leicht ergiebt. — Wenn also die erforderlichen Horizontalen gelegt und aufgenommen worden sind, so ist es auch leicht, den (projicirten) Lauf des frei fließenden Wassers vom Gipfel bis zum Fuße des Berges an jeder Stelle desselben anzugeben, denn man braucht bloß die krumme oder gemischte Linie srqp so zu ziehen, daß sie die sämmtlichen Horizontalen, wie bei s, r, q, p, rechtwinklich durchschneidet. Von dieser Bemerkung macht nun die Terrainzeichnung einen wichtigen Gebrauch.

6) Die Formen der Horizontaldurchschnitte sind nach der Verschiedenheit des Terrains sehr verschieden; sie sind bald gerade und parallel, bald krumm, und zwar im letzteren Falle nach Außen theils hohl, theils convex, theils überall gleichweit von einander abstehend, theils auch in veränderten Abständen nebeneinander fortgehend. Eine specielle Nachweisung, wie durch besondere Gebirgsformen besondere Formen der Horizontalschnitte bedingt sind, scheint jedoch überflüssig, indem ein Jeder durch unmittelbare Anschauung der Natur die nöthigen Erfahrungen sich selbst sammeln kann. Modelle von weichem Thon, die man mit

einem dünnen Draht durchschneidet, geben leicht den gewünschten Aufschluß.

§. 142.

1) Bei der Aufnahme eines Terrains kommt es also hauptsächlich auf die Bestimmung der Horizontaldurchschnitte an, man darf aber nicht glauben, daß diese Operation mit einer solchen Genauigkeit ausgeführt würde, wie sie den übrigen geodätischen Arbeiten eigen ist. Man zeichnet nämlich die erforderlichen Horizontalen fast lediglich nur nach dem Augenmaße ein, wobei die vorhergegangene Aufnahme der wichtigen Puncte des Terrains und der Stellen, wo die Neigung oder Böschung sich merklich ändert, beträchtliche Unterstützung gewährt. Natürlich kommen hierbei kleine Aenderungen der Böschung nicht in Betracht.

2) Genaue horizontale Durchschnitte würden sich auch nur mittelst eines genauen Nivellirinstrumentes abstecken lassen; allein weil eben die höchste Genauigkeit nicht erforderlich ist, so ist ein Instrument, das sich leicht und, wo möglich ohne Stativ, mit der bloßen Hand führen läßt, das zweckmäßigste. Ein solches ist Schmalcalder's Höhenmesser, welcher mit der in §. 111, 3 beschriebenen Boussole fast vollkommen übereinstimmt, nur wird die Ebene des Gradringes, welcher im Gehäuse sich um eine Axe dreht, nicht horizontal, sondern vertical gehalten, wobei der Faden des Objectivdiopters horizontal liegt. Am Gradringe ist ein Gewicht angebracht, das begreiflich immer die tiefste Stelle sucht und so den durch 0° und 180° gehenden Halbmesser fortwährend in horizontaler Lage erhält. An der Rückseite des Oculardiopters, welches zum Durchsehen eine Spalte hat, ist ebenfalls ein catoptrisches Prisma angebracht, welches den Gradring vorn bei'm Visirfaden erscheinen läßt, so daß man gleichzeitig Gradring und Visirfaden sehen und auf jenem den von diesem abgeschnittenen Gradtheil bemerken kann. Die Visirebene ist horizontal, wenn der Visirfaden auf den Nullpunct der Theilung einschneidet, und wenn man dann zugleich den fernen Punct bemerkt, der vom Visirfaden gedeckt wird, so liegt dieser mit dem Auge des Beobachters in einerlei Horizontalebene. Man braucht also nur einen Gehülfen an der Stelle, wo man einen zweiten Punct in der Horizontalebene abstek-

ken will, einen Stab senkrecht aufstellen und so lange hin und her rücken zu lassen, bis ein am Stabe befindliches Merkmal, das mit dem Auge des Beobachters gleiche Höhe über dem Boden hat, gedeckt wird. Auf solche Weise kann man eine Horizontale von Punct zu Punct um einen ganzen Berg herumführen und hernach die durch Pfähle bezeichneten Puncte auf den Plan bringen. Doch genügt es, nur einige Puncte an den Stellen zu bestimmen, wo bedeutende Abwechselungen des Terrains Statt finden.

3) Dieses Instrument dient zugleich zum Messen der Höhenwinkel und der Böschungen des Terrains. Dreht man nämlich das Gehäuse so, daß der Höhenpunct vom Visirfaden gedeckt wird, so schneidet dieser auf dem Gradringe die Gradzahl des Höhenwinkels ab. — Bei der Beobachtung von Böschungen müßte man auf dem andern Endpuncte eine Zielmarke in gleicher Höhe mit dem Auge des Beobachters aufrichten lassen; aber die Stange müßte zugleich auch in der durch den Standpunct des Beobachters gezogenen Neigungslinie sich befinden. Diese Bedingung wird indessen überall nur nach dem Augenmaße hergestellt, indem man diejenige Linie sucht, welche mit dem Horizonte den größten Winkel macht.

Es kann jedoch nicht fehlen, daß ein solches Instrument einen Collimationsfehler habe, der bei'm Abstecken der Horizontalen sowohl, als auch bei'm Messen der Höhenwinkel berücksichtigt werden muß. Man kann ihn nach der in §. 128, 4 gegebenen Anleitung finden, und es ergiebt sich sodann der Punct des Gradringes, auf welchen bei horizontaler Visur der Visirfaden einschneiden muß.

4) Auch ein Meßtisch kann zum Abstecken der Horizontalen dienen, wenn das Fernrohr mit einem Gradbogen verbunden und so justirt ist, daß seine Axe horizontal liegt, sobald ein gewisser Theilstrich, z. B. der Nullpunct des Gradbogens, auf den Index gestellt wird. Der Gradbogen dient zugleich zur Messung der Höhenwinkel. Das Fernrohr braucht deßhalb nicht gerade mit einer Wasserwaage versehen zu sein, sondern es genügt, nach §. 128, 4, den Collimationsfehler zu bestimmen, wenn das Instrument auf der horizontalen Platte steht.

5) Die Kenntniß der Böschungswinkel ist zur Bestimmung der übrigen Horizontalen auf dem Plane nach dem Augenmaße sehr wesentlich, wenn eine derselben schon richtig gezogen ist, denn es lassen sich aus den zwischen zwei Nachbarhorizontalen an verschiedenen Stellen Statt findenden Böschungswinkeln leicht deren Abstände, d. h. die projicirten Neigungslinien, finden.

Denn es sei in A (Fig. 16, Taf. XII.) die A a' Neigungslinie und selbige unter dem Winkel $a' A a = \alpha$ gegen den Horizont geneigt. Fällt man von der höheren Horizontale, auf die tiefere das Perpendikel $a' a = h$, so ist **A a** die projicirte Neigungslinie oder der horizontale Abstand der Durchschnittslinien bei **A**, und man hat $A a = a a' \cdot \cot a' A a = h \cot \alpha$. Da nun der senkrechte Abstand h derselben Horizontalen immer gleich bleibt, so verhalten sich die projicirten Neigungslinien, wie die Cotangenten der zugehörigen Böschungswinkel.

Es sei, z. B., nachdem die Horizontale **A B C D E** bestimmt worden, durch b eine zweite zu legen, und es frage sich, wie weit diese bei **A** von jener abstehen werde. Ist die Böschung bei $B = 35^\circ$ und die bei $A = 10^\circ$, so hat man $B b : A a = \cot 35^\circ : \cot 10^\circ$, daher $A a = \frac{\cot 10^\circ}{\cot 35^\circ} \cdot B b = 3{,}97 \cdot B b$, also **A a** etwa vier Mal so groß, als die Neigungslinie bei **B**. — Wenn man die Länge der projicirten Neigungslinie für 5° Neigung = a setzt, so ist sie für 10°, 15°, 20°, 25°, 30°, 35°, 40° und 45° in genähertem Werthe bezüglich $\frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \frac{a}{4}, \frac{a}{5}, \frac{a}{6}, \frac{a}{7}, \frac{a}{8}, \frac{a}{9}, \frac{a}{11}$.

6) Unter den horizontalen Durchschnitten unterscheidet man Haupt- und Nebenhorizontalen. Die ersteren erstrecken sich durch den ganzen Abhang oder gehen um den ganzen Berg herum und bestimmen gleichsam dessen allgemeinen Character, werden daher auch nur da gelegt, wo die Form des Terrains eine beträchtlich verschiedene geworden ist. Zwischen ihnen finden sich dann wohl längere oder kürzere Strecken, wo ebenfalls ein Wechsel des Terrains hinsichtlich seiner Neigung Statt findet, und um diese mit aufzunehmen, zieht man die Nebenhorizontalen, welche sich, wie **X Z**, eben nur so weit er-

strecken, als zwischen zwei Haupthorizontalen das Terrain hinsichtlich seiner Neigung wechselt. Durch dieses Verfahren tritt begreiflich der Character des Gebirges weit entschiedener hervor, als wenn man für jede nur auf kurze Distanzen sich erstreckende Veränderung eine durchgreifende Horizontale legen wollte.

§. 143.

1) Die Horizontalschichten geben für sich allein noch keine genügende Vorstellung des Gebirges, wenn nicht zugleich auch ihre gegenseitigen Verticalabstände gegeben sind. Diese selbst auf dem Plane anzudeuten, ist unmöglich, man müßte sie denn für jede zwei Nachbarschichten in Zahlen beischreiben. Die Summe aller dieser Abstände würde die Höhe des Gebirges über der untersten Horizontale geben, auch würde man die Böschung des Bodens an jeder Stelle zweier Nachbarschichten durch eine leichte Rechnung oder Zeichnung finden können. Wollte man, z. B., die Böschung bei A (Figur 16, Tafel XII.) finden, so ziehe man zuerst zwischen A und der nächstfolgenden Schicht die (projicirte) Neigungslinie A a und dann den Verticalabstand a a' der Schichten gegen A a senkrecht, so ist a' A a der Böschungswinkel bei A.

2) Indessen ist es dem Zwecke einer Terrain- oder Situationscharte angemessener, nicht die Verticalabstände zweier Nachbarschichten, sondern die an jeder Stelle zwischen ihnen Statt findenden Böschungen aufzutragen. Dieses geschieht, nach Lehmann, durch Striche, die jedesmal in der Richtung der projicirten Neigungslinie A a, also in der Richtung des Wasserflusses, geführt werden und daher die Horizontalen senkrecht schneiden. Weil nämlich zwischen je zwei schwarzen Strichen ein weißer Zwischenraum bleiben muß, so kann man das Verhältniß des Zwischenraumes zur Breite des Striches so wählen, daß daraus der Böschungsgrad mit Bestimmtheit sich erkennen läßt. Böschungen von 45° und darüber malt Lehmann ganz schwarz, weil solche Abhänge in der Natur nur selten und überdies dem Menschen nicht ohne Mühe und Gefahr zugänglich sind, daher auch auf ihre Unterscheidung, besonders für militärische Zwecke, nichts weiter ankommt.

Für jeden kleineren Böschungswinkel mischt man nun dem Schwarzen in dem Verhältnisse Weißes bei, als er unter 45° ist, und hiernach bestimmt sich die Breite des weißen Zwischenraumes im Verhältnisse zur Dicke des schwarzen Striches. Man hat nämlich für den Böschungswinkel m die Proportion Schwarz : Weiß = m : 45° — m. Man bezeichnet nur die Böschungen von 5° zu 5°, weil das Bezeichnungsmittel nicht wohl engere Grenzen zuläßt, und dann auch, weil diese Unterscheidung für die Zwecke einer Situationscharte nahe hinreicht. Hiernach ergiebt sich das Verhältniß der Striche in der in Fig. 20 (Taf. XII.) dargestellten Scala; es ist nämlich

für 5°	Schwarz	:	Weiß	=	1 : 8
„ 10	„	:	„	=	2 : 7
„ 15	„	:	„	=	1 : 2
„ 20	„	:	„	=	4 : 5
„ 25	„	:	„	=	5 : 4
„ 30	„	:	„	=	2 : 1
„ 35	„	:	„	=	7 : 2
„ 40	„	:	„	=	8 : 1.

3) Es erleidet diese Bezeichnungsweise einige Vergleichung mit der Beleuchtung schiefer Flächen. Man denke sich das Licht in parallelen Strahlen senkrecht auf die Horizontalebene auffallend, so wird eine Ebene von bestimmter Begrenzung um so weniger Licht erhalten, je größer ihr Neigungswinkel mit dem Horizonte ist; denn sie erhält immer nur so viel, als auf ihrer Horizontalprojection Platz hat, und diese ist um so kleiner, je größer ihr Neigungswinkel m ist und verschwindet für m = 90°. Steht nun das Auge der schiefen Fläche gerade gegenüber, so muß diese natürlich nach Maßgabe ihrer geringeren Beleuchtung auch dunkler erscheinen. — Ist der Inhalt der Fläche = f und ihr Neigungswinkel = m, so ist der Inhalt ihrer Projection = f cos m. Denn wie auch die schiefe Fläche gestaltet sein mag, so kann man sie doch senkrecht gegen die Ebene des Neigungswinkels in Rechtecke zerlegen, deren Länge in der Projection ungeändert bleibt, deren Höhe aber im Verhältniß 1 : cos m verkürzt wird. Die Beleuchtung, und folglich auch das Verhältniß des Schwarzen zum Weißen, wäre demnach wie 1 : cos m; statt dessen hat man aber die obige Proportion vorgezogen.

4) Eine Terraincharte nach dieser Weise ausgeführt erscheint also bald mehr, bald weniger schattirt, und giebt dadurch schon bei oberflächlicher Betrachtung eine Vorstellung von den Unebenheiten des Bodens und von der Gestaltung der Berge, Thäler, Schluchten, Rücken und Abhänge. Aus der genauern Betrachtung der Schattenstriche aber ergiebt sich die Kenntniß der Böschungen; durch ihre Länge findet sich mit Hülfe der Böschungswinkel ungefähr die senkrechte Höhe von einer Schicht bis zur folgenden; denn diese Höhe a a' (Fig. 16) ist offenbar die Tangente des Böschungswinkels a' A a, wenn die Strichlänge a A als Halbmesser genommen wird. Endlich ergiebt sich aus der Richtung der Striche der Lauf, den ein über das Terrain frei sich ergießendes Wasser nehmen muß, was für die Kenntniß einer Gegend ein höchst wichtiges Moment ist.

5) Gleich nachdem die Lehmann'sche Manier der Terrainzeichnung bekannt geworden war, äußerte der Chef des Königl. Preuß. Generalstabes, v. Müffling, die Meinung, daß wohl wenige Zeichner eine solche Charte, sofern der Ausdruck des Böschungsgrades bloß vom Verhältniß der schwarzen und weißen Intervalle abhängt, mit der erforderlichen Genauigkeit auszuarbeiten das Geschick besitzen würden; fast noch größer aber sei die Schwierigkeit, eine Lehmann'sche Charte schnell und richtig zu lesen, und wir müssen ihm hierin vollkommen beipflichten. Er machte daher den trefflichen Vorschlag, im Allgemeinen das Lehmann'sche Princip der schwarzen und weißen Intervalle zwar beizubehalten, damit die dadurch hervorgebrachte Schattirung und der damit verbundene körperliche Ausdruck nicht verloren gehe; den Strichen selbst aber gab er, um einen bestimmteren Ausdruck für den Böschungsgrad zu erhalten, verschiedene Formen und construirte hiernach die in Fig. 19 (Taf. XII.) ersichtliche Scale, deren sich in der That auch die Ingenieurs des Preußischen Heeres neben der Lehmann'schen bedienen.

§. 144.

1) Daß man die Horizontalschichten nicht durch bleibende Linien auszeichnen darf, ergiebt sich daraus, weil sie durch die Unterbrechung der Böschungsstriche schon von selbst kenntlich werden. Sie werden daher einstwei-

len nur mit Bleistift gezogen und nach Einzeichnung der Böschungsstriche wieder weggewischt.

2) Die Böschungsstriche werden zwischen zwei Nachbarschichten mitunter parallel laufen, oft aber auch nicht, sondern wie bei E (Fig. 16, Taf. XII.) nach der einen Seite divergiren. Man muß in solchen Fällen bei größeren Divergenzen die Striche nach dem divergirenden Ende etwas breiter machen, damit immer das richtige Verhältniß zwischen Schwarz und Weiß bleibe. Wenn aber die Divergenz sehr stark wäre, wie z. B., wenn die Oberfläche des Berges nach einem sehr stumpfen Kegel gebildet ist, so legt man, auch bei gleichbleibender Böschung, mehre Zwischenhorizontalen, wie bei X Z, damit die Dicke der Striche an beiden Enden nicht zu ungleich werde und dadurch das sanfte Ansehen der Zeichnnng verloren gehe.

3) Gekrümmte Bergstriche können eigentlich nicht vorkommen, da wir die Horizontalschichten nur in solchen Abständen nehmen wollten, daß die Neigungslinien dazwischen gerade sind. Bei kleineren Böschungen, besonders wenn sich dieselben in den horizontalen Boden verlieren, pflegt man indessen wohl die Schichten in weiteren Abständen zu nehmen, wenn dazwischen auch sanfte Aenderungen der Böschung vorkommen. Die Bergstriche werden dann allerdings, um der Richtung des frei fließenden Wassers zu folgen, auf gekrümmtem Boden etwas gekrümmt sein müssen, etwa wie bei **M** in Fig. 16.

4) Die Breite der Bergstriche richtet sich nach der Größe des Maßstabes. Es wird aber für Terraincharten oder Situationspläne immer nur ein kleiner Maßstab gewählt, da bei großen Maßstäben sehr große Flächen mit Bergstrichen auszuzeichnen sein würden und daher die darauf verwandte Mühe ungeheueren Zeitverlust mit sich bringen müßte, ohne daß die Charte die Genauigkeit besäße, die man durch einen großen Maßstab bezweckt. Bei den im 25000theiligen Maßstabe aufgenommenen Charten des Königl. Preuß. Generalstabes, sollen 50 Bergstriche die Breite eines Zolles einnehmen.

§. 145.

1) Es sei **MN** (Fig. 21, Taf. **XII.**) ein unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigter

Bergabhang und AB eine darauf befindliche Linie, welche mit dem Horizonte den Winkel β macht; man soll den Winkel DAM = m finden, welchen die Durchschnittslinie AM des Abhanges MN mit der Horizontalebene HM und die Projection AD der AB miteinander bilden.

Läßt man BD auf den Horizont und BM auf AM senkrecht herab, und zieht DM und DA, so ist BMD der Böschungswinkel der $MN = \alpha$, BAD der Neigungswinkel der $AB = \beta$, und AD die Projection der AB. Man hat aber $AD = AB \cdot \cos\beta$, $BD = AB \cdot \sin\beta$, $DM = BD \cdot tg\, DBM = BD \cdot tg\,(90^o - DMB) = BD\, tg\,(90^o - \alpha) = BD \cdot \cot\alpha = AB \cdot \sin\beta \cot\alpha$, daher $\sin DAM = \sin m = \frac{DM}{AD} = \frac{AB \cdot \sin\beta \cdot \cot\alpha}{AB \cdot \cos\beta}$, d. h.

$$\sin m = tg\,\beta \cdot \cot\alpha.$$

2) Man kann aus dieser Formel mancherlei Nutzen für die Terrainlehre ziehen; wenn, z. B., an einem Abhange von der Böschung α auf der Charte ein Weg verzeichnet ist, dessen Richtung die Horizontalschnitte unter dem Winkel m trifft, so läßt sich die Steigung dieses Weges, d. h., seine Neigung β, gegen den Horizont berechnen; man hat nämlich $tg\,\beta = \frac{\sin m}{\cot\alpha} = \sin m\; tg\,\alpha$. Umgekehrt kann man auch auf der Charte einen Weg von bestimmter Neigung β abstecken, wenn man mit Hülfe des Böschungswinkels α seinen Durchschnittswinkel mit den Horizontalen sucht. Doch darf man von solchen Bestimmungen keine größere Genauigkeit erwarten, als sie in der Charte selbst, hinsichtlich der Böschungen und der Horizontalen, vorhanden ist.

3) Besonders macht man von der hier aufgestellten Theorie bei der Darstellung von Schluchten Gebrauch, die bekanntlich dadurch entstehen, daß zwei Bergwände, wie bei C (Fig. 16, Taf. XII.), gegeneinander abfallen. Die Durchschnittslinie CH heißt die Schluchtlinie, deren Projection man jedenfalls in die Charte genau aufnehmen muß. Hat man zugleich auch den Neigungswinkel β der Schluchtlinie AB (Fig. 21) mit gemessen, und ist die Böschung der einen Wand $= \alpha$, so trifft die

horizontale Durchschnittslinie dieser Wand die Schluchtlinie auf der Charte unter dem Winkel m, dessen Sinus $= \text{tg}\, \beta \cos \alpha$ ist, und auf gleiche Weise berechnet man auch den Winkel der Horizontale mit der Schluchtlinie auf der andern Wand. Man ist also hierdurch in den Stand gesetzt, die Horizontalschnitte der Schlucht in die Charte zu tragen, ohne sie vorher abzustecken und geometrisch aufzunehmen. Begreiflich kann man sich dieses Mittels auch da bedienen, wo keine Schluchten vorhanden sind, indem es nur darauf ankommt, die Neigung einer auf dem Abhange gelegten Linie zu messen, deren Endpuncte in die Charte aufgenommen sind.

4) Da die Bergstriche auf den Horizontalen immer senkrecht stehen, so ergiebt sich durch obige Formel zugleich auch der Winkel jener Striche mit der Schluchtlinie, oder jeder andern auf dem Abhange gelegten Linie. In Fig. 21 kann A M für eine Horizontale des Abhanges M N und die gegen A M senkrechte C M als eine Neigungslinie gelten. M E ist die projicirte Neigungslinie, also ein Bergstrich, und dieser macht mit der projicirten Schluchtlinie A F den Winkel F D E, welcher $=$ M D A, also $= 90^\circ - \text{DAM} = 90^\circ - \text{m}$ ist. Nennen wir also den Winkel des Bergstriches mit der Schluchtlinie n, so ist $\sin (90^\circ - \text{n}) = \cos \text{n} = \text{tg}\, \beta \cdot \cot \alpha$. Hieraus ergeben sich nun leicht folgende Gesetze, welche dem Zeichner bei der Ausarbeitung von Schluchten zur Leitung dienen.

A. Liegt die Schluchtlinie horizontal, so treffen die Bergstriche von beiden Seiten her senkrecht darauf.

B. Wenn die Schluchtlinie geneigt ist, so treffen die Bergstriche schief darauf und bilden mit ihr den spitzen Winkel immer nach der Seite, nach welcher die Schluchtlinie ansteigt.

C. Je größer der Neigungswinkel β der Schluchtlinie ist, unter desto spitzeren Winkeln treffen die Bergstriche darauf.

D. Sind beide Schluchtwände gleich stark geböscht, so treffen die Bergstriche von beiden Seiten her unter gleichen Winkeln auf die Schluchtlinie; die Bergstriche des steileren Abhanges machen aber allemal den größeren Winkel mit ihr.

§. 146.

Außer den Horizontaldurchschnitten zeichnet man auch noch Bergprofile, d. h., Durchschnitte mit einer Verticalebene, wie in Fig. 22 (Taf. XII.). Sie können aus einer fertigen Situationscharte leicht auf folgende Weise hergestellt werden. Man ziehe durch den Grundriß des Berges die Linie PQ (Fig. 16, Taf. XII.), in deren Richtung der verticale Durchschnitt genommen werden soll; dieselbe dient als Abscissenlinie für die Curve des Verticaldurchschnitts. Bei α, dem Durchschnitte mit der untersten Horizontale, beginnt diese Curve, und bei'm Durchschnitte β mit der folgenden ist der Endpunct der Abscisse $\alpha\beta$, die man in Fig. 22 aufträgt. Die Ordinate ist offenbar der senkrechte Abstand der Horizontalen, der sich aus dem Böschungswinkel und der Länge des Bergstriches nach Obigem leicht ergiebt; so groß nimmt man also βb in Fig. 22 und senkrecht gegen $\alpha\beta$. Bei δ ist der Endpunct der folgenden Abscisse, und die Ordinate δd ist die senkrechte Höhe der Horizontale bei δ über der bei α, welche sich durch Addition der einzelnen Schichthöhen ergiebt.

Dieses setzt aber voraus, daß der Abhang in der horizontalen Ausdehnung von α nach β, oder von β nach δ, gleich stark geböscht, also gerade sei, was bei sehr schiefen Durchschnitten der PQ mit den Horizontalen nicht immer der Fall sein wird. Träfe, z. B., die PQ bei γ auf einen Strich anderer Böschung, als die bei β sind, so müßte man hier das Ende einer Abscisse nehmen und aus dem Theile γu des Bergstriches und seinem Böschungsgrade die Höhe des Punctes, dessen Projection γ ist, über der Schicht β, und sodann über der untersten Schicht α ermitteln, um für die Abscisse $\alpha\gamma$ die Ordinate γc (Fig. 22) zu erhalten. Ebenso müßte man zwischen β und γ noch Zwischenpuncte annehmen, wenn die Böschung zwar allenthalben gleich, das Terrain aber zwischen α und β nach horizontaler Richtung gekrümmt wäre, wie wenn man, z. B., den Durchschnitt v w legte. — Uebrigens muß man berücksichtigen, ob die Ordinaten von Horizontale zu Horizontale steigen oder fallen.

Neuntes Capitel.

Von der Berechnung der Flächen.

§. 147.

Die Berechnung der Flächen geschieht auf dem bereits aufgenommenen und fertig gezeichneten Plane, doch kann sie mitunter bei kleinen und ziemlich regelmäßig geformten Grundstücken auch unmittelbar auf dem Felde vorgenommen werden. Die Grundlage aller Flächenberechnung ist die Berechnung des Dreiecks durch das halbe Product seiner Höhe und Grundlinie, welche Regel aus den Elementarlehrbüchern allgemein bekannt ist. Aus practischen Rücksichten haben wir jedoch noch Folgendes hinzuzufügen:

1) Die Höhe des Dreiecks wird dadurch gemessen, daß man den Zirkel in eine Winkelspitze einsetzt und ihn so weit öffnet, bis ein damit beschriebener Kreisbogen die Grundlinie berührt (Taf. VIII., Fig. 12). Die Grundlinie soll aber so beschaffen sein, daß die Höhe nicht auf ihre Verlängerung fällt.

2) Wie kleine Maßtheile bei'm Messen der Höhe und Grundlinie noch berücksichtigt werden müssen, hängt lediglich vom Maßstabe der Aufnahme ab. Bei Aufnahmen nach dem 2000theiligen Maßstabe wird man wenigstens noch halbe, bei'm 1000theiligen wenigstens noch viertel Fuß mit in Rechnung stellen müssen.

3) Höhe und Grundlinie muß man begreiflich nach einerlei Maßeinheit ausdrücken, und es ist am bequemsten, in dieser Absicht den Fuß zu gebrauchen, und Bruchtheile des Fußes als Decimaltheile beizusetzen, wodurch man die Fläche in Quadratfußen erhält. Wäre, z. B., die Grundlinie = 361,4 Fuß, die Höhe = 203,2 Fuß, so hätte man den Inhalt $= \frac{361{,}4 \times 203{,}2}{2} = 36718{,}24$ Quadratfuß. Weil die Feldmesser ihre Ruthe immer in 10 Fuß abtheilen, so enthält die Quadratruthe 100 Quadratfuß, und man braucht daher das Comma nur zwei Stellen weiter links zu setzen, um die Quadratfuße in Quadratruthen zu verwandeln. Demnach 36718,24 □Fuß = 367,1824 □Ruthen.

§. 148.

Man kann hierbei die Frage aufwerfen, ob es nicht solche Dreiecke gebe, bei welchen ein Fehler der gemessenen Höhe und Grundlinie den geringsten Einfluß auf die Bestimmung des Flächengehaltes ausübt. Man setze also die Grundlinie $= g$, die Höhe $= h$ und die Fläche $= F$, so ist $gh = 2F$. Man setze ferner, die Größen g und h seien um die kleinen Differenzen dg und dh falsch gemessen worden, d. h., man habe $g + dg$ statt g und $h + dh$ statt h gefunden, so wird man auch den Inhalt F um eine gewisse Größe dF unrichtig erhalten. Man wird nämlich haben $(g + dg)(h + dh) = 2(F + dF)$, oder wenn man die Multiplication der zusammengesetzten Factoren auflöſ't und dabei das practisch bedeutungslose Product $dg \cdot dh$ wegläßt: $gh + gdh + hdg = 2F + 2dF$. Zieht man hiervon $gh = 2F$ ab, so erhält man

$$g \cdot dh + h \cdot dg = 2 \cdot dF,$$

nach welcher Gleichung sich aus den Fehlern dh und dg der Fehler der Fläche dF berechnen läßt. Man sieht hieraus, daß der Fehler dF der Fläche theilweis oder auch ganz verschwinden werde, wenn dh und dg und mithin auch die Producte $g \cdot dh$ und $h \cdot dg$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, d. h., wenn von den Größen g und h die eine zu groß, die andere zu klein gemessen wurde.

Die schlimmsten Fälle sind die, wo dg und dh gleiche Vorzeichen haben, oder wo g und h beide zu groß, oder beide zu klein gemessen wurden. Nehmen wir für diesen Fall $dh = dg = \triangle$, so wird

$$(g + h)\triangle = 2dF,$$

oder wenn wir $h = mg$ setzen:

$$(g + h)\triangle = (m + 1) g \triangle = 2 \cdot dF.$$

Da aber unter dieser Voraussetzung $2F = gh = g \cdot mg = mg^2$, also $g = \sqrt{\frac{2F}{m}}$ ist, so hat man

$(m + 1)\triangle\sqrt{\frac{2F}{m}} = 2dF$, und wenn man jede Seite dieser Gleichung durch $2F$ dividirt, so folgt

$$\frac{dF}{F} = \frac{m + 1}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{\triangle}{\sqrt{F}}$$

und diese Formel giebt die Quote an, um welche die gesuchte Dreiecksfläche falsch gefunden worden ist. Wäre, z. B., $F = 100$ □Ruthen $= 10000$ □Fuß und $m = 2$, d. h., die Höhe doppelt so groß, als die Grundlinie, so würde man $\frac{dF}{F} = \frac{2+1}{\sqrt{2 \cdot 2}} = \frac{\triangle}{\sqrt{10000}} = \frac{3\triangle}{200}$ finden. Nehmen wir für den 2000theiligen Maßstab als extremen Fehler $\triangle = \frac{1}{2}$ Fuß, so folgt $\frac{dF}{F} = \frac{3}{400} = \frac{1}{133}$. Der Fehler würde also den 133sten Theil der ganzen Fläche betragen. Bei größeren Flächen würden die relativen Fehler geringer, bei kleineren größer werden.

Der Fehler $\frac{dF}{F} = \frac{m+1}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{\triangle}{\sqrt{F}}$ wird am geringsten, wenn der Factor $\frac{m+1}{\sqrt{2m}}$ seinen geringsten Werth erhält, welches für $m = 1$ Statt findet. In diesem Falle ist $h = g$, und es ist daher dasjenige Dreieck zur Flächenberechnung am vortheilhaftesten, bei welchem Höhe und Grundlinie gleich sind.

Meistens tragen die Feldmesser Sorge, daß die Höhe des Dreiecks kleiner ausfalle, als die Grundlinie, allein diese Sorge ist, wie die eben angestellte Entwickelung zeigt, ungegründet. Ueberhaupt bleibt es in Hinsicht der Genauigkeit der Flächenberechnung gleichgültig, ob die Höhe m mal so groß als die Grundlinie, oder nur ein m ter Theil derselben ist; denn wenn man in der Formel $\frac{dF}{F} = \frac{m+1}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{\triangle}{\sqrt{F}}$, $\frac{1}{m}$ statt m setzt, so erhält man ebenfalls wieder $\frac{dF}{F} = \frac{m+1}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{\triangle}{\sqrt{F}}$. Mit demselben Rechte also, mit welchem die Höhe kleiner als die Grundlinie sein darf, kann sie auch größer als die Grundlinie sein.

§. 149.

Mitunter könnte es von Nutzen sein, die Fläche eines Dreiecks aus seinen drei Seiten zu berechnen. Sind die Seiten a, b, c, so wird der Inhalt durch die Formel zu berechnen sein:

$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$ was leicht mit Hülfe der Logarithmen auszuführen ist. Nennt man den halben Umfang $\frac{1}{2}(a+b+c) = S$, so kann man den Inhalt auch so berechnen:

$$\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}.$$

Den Beweis für diese Formeln findet man in allen guten Lehrbüchern der Geometrie und Trigonometrie.

§. 150.

Außer der Berechnung der Dreiecksflächen kann man für die Zwecke der Feldmeßkunst noch aufführen:

1) Die Berechnung des Trapezes mit zwei parallelen Seiten AB und DC (Taf. VIII., Fig. 11). Hier wird bekanntlich die Summe der Parallelseiten mit ihrem Abstande oder der Höhe multiplicirt und das Product mit 2 dividirt. Die Höhe GH wird ebenso gemessen, wie bei'm Dreieck.

Bei kleineren Trapezen kann man die Messung der Parallelseiten AB und DC ersparen, wenn man sogleich die mittlere Parallele EF (welche der halben Summe von AB und DC gleich ist und die Seiten AD und BC so wie die Höhe GH halbirt) abnimmt und dieselbe mit der Höhe GH multiplicirt. Ist das Trapez nicht sehr groß und sind namentlich die Seiten AD und BC nicht sehr geneigt, so kann man die Stelle der mittleren Parallele EF nach dem Augenmaße bestimmen.

2) Das unregelmäßige Viereck (Taf. VIII., Fig. 13) wird durch eine Diagonale DB in zwei Dreiecke zerlegt, wobei man vorzüglich darauf Acht hat, daß diese Diagonale, ohne verlängert zu werden, Grundlinie für beide Dreiecke sein kann. Anstatt aber beide Dreiecke einzeln zu berechnen und hernach ihre Summe zu suchen, wird man lieber die beiden Höhen AE und CF addiren, ihre Summe mit der gemeinschaftlichen Grundlinie multipliciren und das Product mit 2 dividiren. Die Richtigkeit dieser Regel, bei welcher man eine Dreiecksberechnung erspart, wird Jeder sich leicht beweisen können.

3) Regelmäßige Parallelogramme kommen, außer bei den meistentheils rechtwinklichen Gebäuden, selten vor; indessen bieten sich häufig unregelmäßige Vielecke von nicht beträchtlicher Größe dar, welche von Parallelogrammen nicht bedeutend verschieden sind, und bei denen man sich

eine Abkürzung der in Nro. 2 angegebenen Rechnung erlauben darf. Ein solches Vieleck ist, z. B., ABCD (Taf. IX., Fig. 4). Hier wird man zuerst (nach dem Augenmaße) die Halbirungspuncte E und F der Seiten AD und BC bestimmen und dann die Linie EF abnehmen. Hierauf bestimme man (ebenfalls nach dem Augenmaße) den Halbirungspunct H der Seite DC und messe das Perpendikel HI. Das Product der Dimensionen EF und HI ist sehr genähert der gesuchte Flächeninhalt ABCD.

Denn zieht man DG mit AB parallel, so ist $HI = KI + KH$ und daher $HI \times EF = (KI + KH) \times EF = KI \times EF + KH \times EF$. Hier ist nun $KI \times EF$ das Trapez ABGD, indem die nach obiger Vorschrift gemessene Linie EF von der mittleren Parallele zwischen DG und AB nicht merklich verschieden sein kann. Ferner ist HK die halbe Höhe des Dreiecks DGC, und da der Unterschied zwischen EF und DG ebenfalls nicht bedeutend sein kann, so wird $EF \times HK$ nahe der Fläche des Dreiecks DGC gleich sein, also daß man auf die angezeigte Weise die Fläche des ganzen Vierecks ABCD findet.

Ein Anfänger wird wohl thun, durch genaues Nachrechnen bei mehren Beispielen sich Einsicht zu verschaffen, bis wie weit diese Rechnungsregel mit Sicherheit angewendet werden könne.

§. 151.

1) Alle übrigen Figuren werden nun, der Flächenberechnung halber, in die angezeigten Elementarfiguren zerlegt, deren Summe dann den Flächengehalt der ganzen Figur giebt. Es ist aber, in Absicht theils auf die Kürze, theils auf die Genauigkeit der Rechnung, keineswegs gleichgültig, wie die Zerlegung gemacht wird. Man könnte bei'm ersten Anblicke der Sache glauben, daß die vortheilhafteste Zerlegung diejenige wäre, bei welcher man die wenigsten Figuren (Rechnungsfiguren) bekommt, weil dann offenbar die Berechnung am leichtesten wäre. Allein die Rücksicht auf die Genauigkeit erfordert, daß man vor allen Dingen aus der zu berechnenden Figur einige, doch möglichst wenige größere Figuren (Hauptfiguren), herausschneide, welche bei Weitem den beträchtlichsten Theil der

Fläche ausmachen. Die noch übrigen kleinen Abschnitte werden dann auf die bequemste Weise berechnet. Die Fig. 14 (Taf. VIII.) giebt hiervon eine klare Vorstellung; das Viereck **ABCD** und das Dreieck **DCE** bilden hier die beiden Hauptfiguren, während die noch übrigen Abschnitte als Nebenfiguren zu betrachten sind.

Der Grund dieses Verfahrens ist nicht schwer einzusehen, wenn man das berücksichtigt, was in §. 148 von der Berechnung des Dreiecks gesagt ist. Am Ende kommt nämlich doch Alles auf Dreiecksberechnungen hinaus; die Fehler aber, welche bei'm Abnehmen von Höhe und Grundlinie begangen werden können, haben auf die Dreiecksfläche einen verhältnißmäßig um so geringeren Einfluß, je größer das Dreieck selbst ist. Die Fehler, welche bei der Berechnung der kleinen Nebenfiguren begangen werden, sind zwar im Verhältnisse zu den Flächen dieser Figuren größer, allein im Verhältnisse zur ganzen Fläche doch sehr klein, werden sich übrigens auch, weil manche dieser Figuren zu groß, manche zu klein gefunden sein können, bei der Addition theilweise aufheben, so daß der Gesammtfehler aller Nebenfiguren, im Vergleiche zur ganzen Fläche, keine bedeutende Größe sein wird. Da nun auch die Fehler der Hauptdreiecke die möglichst kleinsten sind, sofern diese Dreiecke die möglichst größten sind, so wird im Allgemeinen auf diese Weise die Fläche der ganzen Figur am richtigsten erhalten. — Anders würde sich jedoch die Sache verhalten, wenn man dieselbe Figur (Taf. **VIII.**, Fig. 15) durch eine größere Anzahl größerer Dreiecke berechnen wollte, weil dann diese Dreiecke nicht die möglichst größten sein könnten, und ihre Fehler also verhältnißmäßig größer ausfallen müßten, wodurch begreiflich in der Fläche der ganzen Figur auch ein größerer Fehler entstehen muß.

2) Die kleineren Nebenfiguren werden häufig Dreiecke sein; in vielen Fällen sind jedoch die Grenzen der Grundstücke sehr unregelmäßig gekrümmt, und dann ist es vortheilhaft und oft sogar nothwendig, die unregelmäßige Grenze durch eine gerade Linie **AD** (Fig. 14) abzuschneiden und auf dieselbe von jedem Grenzpuncte ein Perpendikel zu fällen, wodurch man rechtwinkliche Dreiecke und Trapeze erhält. Besonders anwendbar ist dieses Verfahren bei krummlinig begrenzten Figuren (Taf. **VIII.**, Fig. 16), aus welchen man zuerst geradlinige Figuren von möglichst

wenigen Seiten, die sich möglichst nahe an den krummen Umfang anschließen, ausschneidet; man nimmt dann in der krummen Grenze Puncte von solchen Abständen, daß man die dazwischen gelegenen Theile als gerade ansehen darf.

Krumme Flußstrecken wird man am füglichsten durch Linien, welche quer über das Flußbett laufen, in Paralleltrapeze oder solche Vierecke zerlegen, die sich, nach §. 150, 3, wie Parallelogramme berechnen lassen. Vergl. Fig. 5 (Taf. **IX.**).

3) Bei den einzelnen Rechnungsfiguren kann man die Quadratfuße beibehalten; sobald aber durch Addition derselben der Gesammtinhalt der Parzelle gefunden ist, würde eine bis auf einzelne Quadratfuße gehende Angabe eine lächerliche Genauigkeit sein, weil schon mäßig große Flächen sich nicht bis auf einzelne Quadratruthen genau berechnen lassen. Entweder wird man bloß nach ganzen Quadratruthen rechnen und dann, was mehr als eine halbe beträgt, für eine ganze nehmen, oder wenn man Brüche der Quadratruthen noch beibehalten will, so werden es nur solche sein dürfen, die keine großen Nenner haben und dem gemeinen Manne am geläufigsten sind, wie, z. B., Halbe und Viertel. Man würde also, was unter 13 □Fuß ist, weglassen, aber

von 13 bis 35 □Fuß für $\frac{1}{4}$ □Ruthe
" 36 " 62 " " $\frac{1}{2}$ "
" 63 " 87 " " $\frac{3}{4}$ "
" 88 " 100 " " 1 "

in Rechnung zu bringen haben. Die Ruthenzahl der Parzelle wird zuletzt auf Acker oder Morgen reducirt.

§. 152.

Bei Flurvermessungen müssen die zur Flächenberechnung erforderlichen Maße abgenommen werden, ehe das Papier von den Platten abgeschnitten wird, damit den Fehlern vorgebeugt werde, welche durch das oft beträchtliche Einlaufen des Papieres entstehen. Zuerst werden alle Grundstücke in schicklicher Reihenfolge, dem Zwecke des Catasters gemäß, numerirt und dann über jede Parzelle die erforderlichen Rechnungslinien mit farbiger Tusche gezogen, damit man sie von den wirklichen Grenzlinien unterscheiden könne; auch wird jede Rechnungsfigur mit einem Buchstaben oder einer Ziffer bezeichnet. Die zum

Berechnen erforderlichen Maße werden nun in ein Rechnungsheft geschrieben, dessen Einrichtung keine Schwierigkeiten hat. Man wird am besten die zur Berechnung erforderlichen Figuren für jede Parzelle in eine Gruppe bringen, über welche man die Nummer der Parzelle schreibt. Bei den Maßen jeder Rechnungsfigur bemerkt man (durch ein Zeichen), von welcher Art sie ist, ob, z. B., ein Dreieck, oder ein Rechteck, u. s. w., damit man nachgehends die Rechnung anstellen könne, ohne auf die Charte zu sehen. Am Rande des Heftes wird man die Flächen aller Rechnungsfiguren, die zu einer Parzelle gehören, untereinander schreiben, um durch Addition derselben den Inhalt der ganzen Parzelle zu finden.

Um die Rechnung zu controliren, wird man gewisse Lagen von Grundstücken, wie sie durch die Eintheilung der Flur gegeben sind, summarisch, d. h., als eine einzige Figur, ohne Rücksicht auf die darin enthaltenen Parzellen, berechnen. Die Summe aller summarisch berechneten Grundstückslagen oder Districte kann man dann mit der Fläche des auf dem Meßtischblatte verzeichneten Quadrates vergleichen und den sich ergebenden Unterschied, falls er nicht mehr als $\frac{1}{200}$ des Ganzen beträgt, auf alle Districte und resp. Parzellen, nach Verhältniß ihres Flächengehaltes, vertheilen, was freilich eine mühsame Arbeit ist.

Hielte, z. B., das Meßtischquadrat 56000 □Ruthen, und wäre die Summe aller darauf befindlichen Districte 56214 □Ruthen gefunden worden, so wäre diese um 214 □Ruthen zu groß, was $\frac{214}{56000} = \frac{107}{28000} =$ 0,00382 des ganzen ausmacht, und man müßte den Flächengehalt jedes Districtes um einen ebensovielsten Theil kürzen. Wäre also ein District = 8400 □Ruthen berechnet worden, so müßte man 0,00382 × 8400 = 32,088 = 32 □Ruthen davon abziehen, und folglich statt jener 8400 □Ruthen nur 8368 ansetzen. Den so corrigirten Flächengehalt vergleicht man wieder mit der Summe aller darin enthaltenen Parzellen und verbessert eine jede Parzelle auf gleiche Weise.

Die Flächenberechnung wird gleichfalls einer Revision unterworfen, welche theils im Nachnehmen der Maße, theils im Nachrechnen der einzelnen Rechnungsfiguren besteht. Als Beihülfe dient ein auf schwaches, durchsichtiges

Horn gezeichnetes Netz von Quadratruthen, durch dessen Auflegung man, wenigstens bei ziemlich regelmäßigen Figuren, grobe Fehler entdecken kann. — Wie große Fehler hier noch als zulässig erkannt werden dürfen, ist im Allgemeinen schwer zu bestimmen, weil Unrichtigkeiten im Abnehmen der Maße, die, z. B., bei'm 2000theiligen Maßstabe leicht auf $\frac{1}{2}$ Fuß sich belaufen können, bei kleineren Flächen verhältnißmäßig größere Fehler erzeugen, als bei größeren. Im Allgemeinen kann man einen Fehler von 1 □Ruthe bei einer Fläche von 100 □Ruthen zulassen; bei größeren Flächen wird man jedoch eine verhältnißmäßig größere Richtigkeit verlangen dürfen. — Hierbei ist jedoch nur von der Richtigkeit der Berechnung der auf das Papier verzeichneten Figur die Rede; die Abweichung einer Flächenberechnung von dem wirklichen Grundstücke kann oft bedeutend größer sein, weil sich dann zu den Fehlern in der Abnahme der zur Berechnung dienenden Maße noch die oft weit größeren Fehler der Aufnahme oder der Vermessung selbst gesellen. Deßhalb ist in der Instruction über die Catastralvermessung in den Rheinisch-Westphälischen Provinzen der Preußischen Monarchie befohlen, die Hülfslinien bei der Detailaufnahme so zu legen, daß sie unmittelbar die zur Berechnung der Grundstücke erforderlichen Data, namentlich die Breiten, abgeben und dieselben nicht von der Charte abgenommen zu werden brauchen. Daß dieses Verfahren nur bei regelmäßigen, ziemlich parallel fortlaufenden Grundstücken anwendbar ist, übrigens auch das Vermessungsgeschäft bedeutend verzögern muß, ergiebt sich von selbst. Doch wird es bei einem sehr kleinen Maßstabe, z. B. von $\frac{1}{5000}$, fast nothwendige Bedingung.

Die Resultate der Berechnung werden tabellarisch in ein Vermessungsregister, das Fund- oder Lagerbuch, auch Saalbuch genannt, eingetragen, indem bei jedem Grundstücke seine Nummer, sein Besitzer, seine Culturart, seine Fläche bemerkt werden.

Etwas verschieden davon ist das Cataster, in welchem außer jenen Dingen auch noch die Besteuerung jedes Grundstücks angemerkt ist. Jeder Staat giebt hierüber besondere für die localen Verhältnisse passende Instructionen, deren Erörterung auf keinen Fall einem Lehrbuche der practischen Geometrie einverleibt werden darf.

§. 152 a.

1) Man hat schon seit längerer Zeit auf Mittel gedacht, die zeitraubende und geisttödtende Berechnung der Flächen auf den fertigen Charten abzukürzen, aber erst neuerdings ist es gelungen, solche Instrumente zu construiren, welche mit größerer Genauigkeit, als selbst die unmittelbare Berechnung durch Zirkel und Maßstab liefert, die Fläche einer jeden Figur durch bloßes Befahren ihres Umfanges in sehr kurzer Zeit angeben, und damit ist ohne Zweifel allen Wünschen in dieser Beziehung auf eine Weise genügt, die selbst die Ansprüche der ungemessensten Phantasieen, die man sich vordem hätte machen können, noch weit überbietet. Das Instrument, zu welchem der schweizerische Ingenieur Oppikofer die erste Idee gegeben und welches dann von dem deutschen Mechaniker Ernst in Paris zuerst ausgeführt, vom Ingenieur Wetli in Zürich wesentlich verbessert und vom Hofrath Hansen in Gotha zur Vollendung gebracht worden ist, stellt eigentlich eine Art Integrationsmaschine dar und seine Theorie ist folgende:

2) Man denke sich eine Stange oder Schiene **MQ** (Taf. XV, Fig. 1), welche sich sowohl nach der Richtung ihrer Länge **OX**, als auch nach der auf ihrer Länge senkrechten Richtung **OY** verschieben läßt. Wird sie nach der Richtung **OX** verschoben, so dreht sich der Verschiebung proportional die Scheibe **AB**, ohne jedoch den Ort ihres Mittelpunctes zu ändern. Geschieht aber die Verschiebung der Stange **MQ** senkrecht gegen ihre Länge, so nimmt auch, ohne sich zu drehen oder sonst noch andere Bewegungen zu machen, die Scheibe **AB** an der Verschiebung Theil. Das Rädchen **RR'**, dessen Ebene senkrecht auf der Scheibe **AB** steht und dieselbe berührt, ist mit seiner Axe **CD** unverrückbar; es dreht sich nur um diese Axe in Folge der Reibung bei seiner Berührung mit der Scheibe **AB**, wenn diese gedreht wird. An der Axe **CD** sitzt bei **D** ein Zeiger, welcher auf einem Zifferblatte die Umdrehung des Rädchens **RR'** nachweis't. Uebrigens ist die Axe **CD** mit der Bewegungsrichtung **OY** der Schiene parallel und ihre Projection geht durch den Mittelpunct der Scheibe **AB**.

3) Gesetzt nun, es habe, als der an der Stange bei **M** senkrecht befestigte Stift in **O** stand, das Rädchen **RR'**

die Scheibe AB gerade im Mittelpuncte berührt. Hat man dann den Stift in einer beliebigen geraden, gebrochenen oder krummen Linie von O bis M bewegt, so wird nicht nur der Berührungspunct zwischen dem Rädchen RR' und der Scheibe AB verrückt worden sein, sondern beide werden auch eine Drehung beschrieben haben, und es entsteht nun die Frage nach der Drehung des Rädchens.

Die Bewegung von O nach M zerlegt sich in die Seitenbewegung ON und NM, von denen $ON = x$ mit der Schiene parallel und $NM = y$ darauf senkrecht ist. Durch die Bewegung $NM = y$ ist der Berührungspunct zwischen dem Rädchen RR' und der Scheibe AB um eben so viel vom Mittelpuncte der letzteren entfernt worden, durch die Bewegung ON aber ist die Scheibe AB und mit ihr das Rädchen RR' gedreht worden.

Man denke sich ferner, es schreite der Stift noch um ein unendlich kleines Stück Mm fort, so wird auch die Bewegung ON um $Nn = dx$ und die Bewegung NM um $n'm = dy$ wachsen; der Berührungspunct zwischen dem Rädchen und der Scheibe wird nun um $y + dy$ vom Mittelpuncte der letzteren abstehen. Hat sich dann bei der Bewegung des Stiftes von M nach m die Scheibe AB um den unendlich kleinen Winkel $d\varphi$ gedreht, wo $d\varphi$ als Bogen für den Halbmesser 1 verstanden werden soll, so kann man annehmen, der Berührungspunct des Rädchens mit der Scheibe sei während der Drehung um $d\varphi$ in gleichem Abstande vom Mittelpuncte der letzteren, also im Abstande y geblieben, und es hat deßhalb jener jener Berührungspunct auf der Scheibe den Bogen $yd\varphi$ durchlaufen. Ein eben so großer Bogen hat sich auch vom Rädchen R abgewickelt, und dieser Bogen ist rdv, wenn r den Halbmesser des Rädchens und dv seinen Drehungswinkel während der Scheibendrehung $d\varphi$ bedeutet. Daher ist

$$rdv = yd\varphi.$$

Nach der Voraussetzung ist aber der Drehungswinkel $d\varphi$ der Verschiebung $Nn = dx$ der Stange MN nach ihrer Längenaxe proportional, also $d\varphi = Cdx$, wo C eine constante Größe bedeutet, daher

$$r \cdot dv = Cydx$$

$$\text{oder } dv = \frac{C}{r}ydx.$$

Damit die Drehung der Scheibe AB mit Sicherheit proportional der Fortschiebung der Stange in der Richtung ihrer Längenaxe erfolge, ist an beiden Enden der letzteren ein Silberfaden ausgespannt, welcher um eine Trommel ab sich schlingt, auf welcher die Scheibe AB sitzt. Bei jeder Fortschiebung x der Stange wickelt sich also ein gleich großer Bogen der Trommel ab, und wenn deren Halbmesser, bis zur Mitte des Silberfadens gemessen, $= R$ ist, so ist der der Stangenverschiebung x entsprechende Drehungswinkel der Scheibe AB $= \varphi = \frac{x}{R}$. Da nun auch $\varphi = Cx$ gesetzt wurde, so ist $C = \frac{1}{R}$, und man hat also

$$dv = \frac{1}{rR}\, ydx.$$

Hierbei ist ydx die Fläche NMn'n, welche, wegen ihrer unendlichen kleinen Breite mit dem Trapez NMmn für identisch gelten muß, und mit dieser Fläche ist also die unendlich kleine Drehung des Rädchens RR' proportional.

Daraus läßt sich nun leicht begreifen, daß wenn man mit dem Führungsstifte bei M den Umfang einer Figur nach immer gleicher Richtung umfährt, die Drehung des Rädchens RR' der Fläche dieser Figur proportional sein muß. Denken wir uns nämlich in der Ebene der Figur zwei rechtwinkliche Axen XX' und YY' (Fig. 2, Taf. XV) von denen die erstere mit der Schiene parallel, diese darauf senkrecht ist. Man kann dabei die Axe XX' so gelegt denken, daß sie durch den an sich immer unbeweglichen Berührungspunct zwischen dem Rädchen und der Scheibe, also auch durch den Mittelpunct der letzteren geht, wenn die Berührung gerade daselbst statt hat. Fährt man nun mit dem Stifte durch ein unendlich kleines Stück mm' des Umfangs, so giebt das Rädchen die trapezförmige Fläche mm'n'n an, welche durch die mit YY' parallelen Coordinaten mn und m'n' entsteht, und indem man mit dem Stifte so fortgeht, wird ersichtlich, daß das Rädchen durch seine Drehung jedes beliebig große Flächenstück der Art, wie mnNM angeben muß, weil selbiges nichts anderes als eine Summe jener unendlich schmalen Trapeze oder Rechtecke ydx ist.

Dabei ist nun aber noch auf die Drehungen des Rädchens zu achten, um die Entstehung der ganzen Fläche der Figur zu begreifen. Die Bewegungsrichtung von O nach X mag für positiv angesehen werden, so daß die entgegengesetzte von X nach O negativ wird. Gleichfalls sei die positive Seite der Linie OX (auf welcher nämlich die positiven y liegen) nach der Richtung OY, so wird die negative nach OY′ zu nehmen sein. Ist nun die Drehungsrichtung des Rädchens, wenn der Führungsstift oder vielmehr der Mittelpunct der Drehscheibe auf der positiven Seite von OX liegt und die Stange nach der positiven Richtung (von O nach X) geschoben wird, die positive, so ist nun leicht zu übersehen, nach welcher Richtung die Drehungen des Rädchens in den verschiedenen Fällen erfolgen. Dasselbe dreht sich nach positiver Richtung, wenn der Mittelpunct der Scheibe auf der positiven Seite von OX liegt und die Schiene positiv geschoben wird, oder wenn der Mittelpunct der Scheibe auf der negativen Seite von OX liegt und die Schiene nach negativer Richtung geschoben wird. In den beiden anderen Fällen ist die Drehung des Rädchens die entgegengesetzte der vorigen, also negativ. Nach dem gleichen Gesetz aber sind auch die Rechtecke, aus welchen die zu messende Figur nach der eben erklärten Weise zusammengesetzt ist, theils positiv, theils negativ, nämlich nach dem Gesetze der Multiplication positiver und negativer Factoren, und hieraus leuchtet ein, daß die Gesammtdrehung des Rädchens oder das wirkliche Fortschreiten des Zeigers am Zifferblatte, nämlich die algebraische Summe aller Drehungen, die Fläche der umfahrnen Figur sein muß.

4) Die Differentialgleichung

$$dv = \frac{y\,dx}{rR}$$

zeigt, daß jedes unendlich kleine Rechteck, aus welchem die Fläche F einer Figur zusammengesetzt ist, den constanten Divisor rR bekommen muß, um auf die entsprechende Drehung dv des Rädchens gebracht zu werden. Diesen Divisor muß daher auch die Summe aller Rechtecke oder die Fläche F erhalten, um die Gesammtdrehung des Rädchens oder des Zeigers zu berechnen. Ist also V diese Gesammtdrehung, so hat man

$$V = \frac{F}{rR}.$$

Man kann nun festsetzen, daß einer ganzen Umdrehung, um das Zifferblatt darnach zu theilen, eine bestimmte Anzahl n von Flächeneinheiten entsprechen sollen. Dann ist der Drehungswinkel $V = 2\pi$, und wenn f die Flächeneinheit bedeutet, so hat man

$$2\pi = \frac{nf}{rR}$$

oder $nf = 2rR\pi$

d. h. die Fläche, welcher einer ganzen Umdrehung entspricht, ist gleich der Mantelfläche der Trommel, wenn sie zur Höhe den Halbmesser des Rädchens hätte.

Den Halbmesser R der Trommel wird man zwar zweckmäßig, aber doch willkührlich nehmen. Hiernach hat man dann den Halbmesser des Rädchens durch die Gleichung

$$r = \frac{nf}{2R\pi}$$

und kann somit für einen gegebenen Halbmesser der Trommel den des Rädchens so berechnen, daß eine Umdrehung des Zeigers die bestimmte Anzahl n von Flächeneinheiten giebt. Für die practische Ausführung ist es aber nothwendig, den Halbmesser r des Rädchens durch Versuche zu bestimmen, indem man ihn etwas größer nimmt, als er nach obiger Berechnung sein müßte, und dann durch allmähliges Abdrehen so lange nachhilft, bis eine Umdrehung des Zeigers der bestimmten Anzahl von Flächeneinheiten entspricht. Dieß wird nothwendig, weil die bisherigen Voraussetzungen, die wir für das Instrument gemacht haben, in der Praxis sich vielleicht gar nicht erreichen lassen, aber auch in der That nicht einmal nothwendig sind. Nämlich:

5) **Die beiden Bewegungsrichtungen OX und OY (Fig. 1, Taf. XV) brauchen keinen rechten Winkel zu machen; die Drehung des Rädchens bleibt auch dann noch der umfahrenen Fläche proportional.** Es bleiben nämlich auch dann noch die beiden Grundbedingungen des Instrumentes, daß nämlich der Berührungspunct zwischen Rädchen und Scheibe der Fortrückung z der Schiene MQ nach der Richtung OY gleich, und daß die Umdrehung der Scheibe

der Fortrückung x der Schiene nach ihrer Länge proportional ist. Dadurch findet sich, wie vorhin:

$$dv = \frac{1}{Rr} z\,dx.$$

Ist nun α der beständige Winkel der Bewegungen OX und OY und entspricht der Fortrückung z nach der Richtung OY der senkrechte Abstand y beider Schienenlagen, so ist $z = \frac{y}{\sin\alpha}$, und daher

$$dv = \frac{1}{Rr \sin\alpha} y\,dx,$$

woraus, wie früher folgt:

$$V = \frac{F}{Rr \sin\alpha}$$

$$nf = 2\pi\, Rr \sin\alpha.$$

Die einer ganzen Umdrehung des Zeigers entsprechende Fläche ist also im Verhältniß 1 : sin α kleiner als bei rechtwinklichen Seitenbewegungen, und der Halbmesser des Rädchens muß in eben diesem Verhältniß größer gemacht werden.

6) Die Axe CD des Rädchens RR' braucht nicht zur Bewegungsrichtung OY parallel zu sein, sondern darf einen Winkel mit ihr machen. Auch braucht die gerade Linie, auf welcher sich der Berührungspunct zwischen dem Rädchen und der Scheibe bewegt, kein Durchmesser, sondern er darf eine Sehne der letzteren sein, so daß der Berührungspunct nicht nothwendig einmal die Mitte der Scheibe einnehmen muß.

Es sei HI (Fig. 3, Taf. XV) die Sehne, auf welcher alle Berührungspuncte des Rädchens mit der Scheibe liegen, so ist HI mit der Bewegungsrichtung OY (Fig. 1) parallel. Ferner sei K der Mittelpunct der Scheibe und KL = e ein Perpendikel auf HI. Indem wir nun Anfangs den Berührungspunct des Rädchens bei L voraussetzen und dann die Schiene, und folglich auch die Scheibe nach der Richtung OY um das Stück z fortbewegen, kommt der Berührungspunct von L nach C so, daß LC = z wird. Es sei endlich die Axe CD des Rädchens gegen HI und also auch gegen OY um den Winkel DCI = β geneigt.

Setzt man den unendlich kleinen Drehungswinkel der Scheibe = $d\varphi$ und den Abstand KC = ϱ, so läuft ein Bogen CQ = $\varrho\, d\varphi$ bei C unter dem Berührungs-

puncte des Rädchens weg. Aber es wird nicht auch ein gleich großer Bogen vom Rädchen abgewickelt, weil die Bewegung CQ zwar gegen KC, nicht aber gegen die Axe CD des Rädchens senkrecht ist. Die Bewegung CQ zerlegt sich nämlich in CS nach der Richtung der Axe des Rädchens und senkrecht darauf in CT, und nur die Bewegung CT, weil ganz in der Ebene des Rädchens am Berührungspuncte wirkend, vermag das Rädchen so zu drehen, daß von ihm ein gleich großer Bogen sich abwickelt. Die Bewegung CS geht am Widerstande der Axe des Rädchens gänzlich verloren.

Ist nun der veränderliche Winkel $KCI = \omega$, so ist $QCT = \beta + \omega$ und daher

$$CT = CQ \cos(\beta + \omega)$$
$$= \varrho d\varphi \cos(\beta + \omega)$$
$$= d\varphi(\varrho \cos\omega \cos\beta - \varrho \sin\omega \sin\beta).$$

Aber $\varrho \cos\omega = LC = z$

$\varrho \sin\omega = KL = e$,

daher $CT = d\varphi\,(z \cos\beta - e \sin\beta)$

$= d\varphi\,(z - e \operatorname{tg}\beta) \cos\beta.$

Zieht man KF senkrecht auf CD, so ist $LB = KL.\operatorname{tg} BKL = e \operatorname{tg}\beta$, und wenn man diese Länge kurz mit g bezeichnet, so wird

$$CT = d\varphi\,(z - e) \cos\beta.$$

Der Punct B ist ein bestimmter und von der Beschaffenheit des Instrumentes abhängiger und kann, wie früher der Mittelpunct der Scheibe, als Anfangspunct aller Fortschiebungen nach der Richtung OY dienen, wenn man voraussetzt, daß im Anfange der Berührungspunct des Rädchens mit der Scheibe in B ist. Setzen wir demnach jetzt $BC = z$, so wird

$$CT = z.\, d\varphi \cos\beta.$$

Eben so groß ist auch der vom Rädchen abgewickelte Bogen rdv, daher

$$r dv = z \cos\beta \cdot d\varphi$$

$$dv = \frac{z \cos\beta}{r} \cdot d\varphi$$

oder da, wie früher $d\varphi = \frac{dx}{R}$ ist:

$$dv = \frac{z dx \cdot \cos\beta}{rR}$$

oder wenn man aus 5) $\frac{y}{\sin\alpha}$ statt z setzt:

$$dv = \frac{y\,dx \cdot \cos\beta}{rR \sin\alpha}$$

Es folgt hieraus

$$V = F \cdot \frac{\cos\beta}{rR \sin\alpha}$$

und daher die Drehung des Rädchens auch jetzt noch der umfahrenen Fläche proportional.

7) Endlich ist auch nicht nöthig, daß die Ebene des Rädchens auf der Drehscheibe genau senkrecht stehe, seine Axe also der Ebene, in welcher die Bewegungen **OX** und **OY** liegen, genau parallel sei. Denn diese Axe soll nur die Bewegung des Rädchens an den Zeiger übertragen.

§. 152 b.

Die im vorigen §. erklärte Idee ist nun nach Hofrath Hansens Angabe von dem Mechaniker Ausfeld in Gotha auf folgende Weise ausgeführt worden, wobei ich ganz der Darstellung des Professor Bauernfeind folge.

Das Instrument sieht zusammengesetzter aus, als es in der That ist; es rührt dieses aber nur von der großen Anzahl von Rollen her, welche zur Erzielung genauer Bewegungen nöthig ist. Denkt man sich diese weg, so bleiben bloß die Fußgestelle, die beiden Schlitten, die Führvorrichtung, die Drehscheibe und das Uhrwerk als Bestandtheile übrig, die nun einzeln betrachtet werden sollen.

Das Fußgestelle besteht aus einem 30 Centimeter langen, vorn 10 und hinten 15 Centimeter breiten und 1,2 Centimeter dicken Messingrahmen **A** (Fig. 4, Taf. XV), welcher mit drei Stellschrauben **B** auf beweglichen Holzscheiben **C** ruht. Durch die Stellschrauben kann der Rahmen höher, tiefer und horizontal gestellt werden. Die horizontale Lage ist jedoch nicht strenge, sondern nur so weit erforderlich, daß den beiden Schlitten keine Veranlassung zu einer freiwilligen Bewegung gegeben wird.

Der untere Schlitten giebt die eine Grundbewegung des Instrumentes, nämlich nach der Langseite des Rahmens (**OY** in Fig. 1). Er besteht aus einer 6fach durchbrochenen 0,8 Centimeter dicken Metallplatte **D** und drei in Spitzen laufenden Rollen **E**, welche in drei Längendurchbrechungen angebracht sind, und woran die beiden vorderen durch die Nuthen **N** des Rahmens auf die in

Fig. 5 angedeutete Weise ihre Führung erhalten, während die hintere dritte Rolle flach ausläuft. Die Rollen sind von Messing, ihre Axen und deren Lager von Stahl.

Der obere Schlitten giebt die zweite Grundbewegung, welche zur ersten senkrecht ist, für sich; er muß aber auch jede Bewegung des unteren Schlittens mitmachen. Darum ruht sein Hauptstück G, eine trapezförmig gestaltete und dreimal durchbrochene, 42 Centimeter lange und 0,7 Centimeter dicke Messingschiene, auf drei Rollen E', welche in den drei Querdurchbrechungen des unteren Schlittens an stählernen Axen in feinen Spitzen laufen, und wovon die beiden rechtseitigen, wie Fig. 5 in verkehrter Lage zeigt, in einer Nuthe der Schiene sich drehen, während die dritte Rolle glatt unter der Schiene liegt. Damit der Schlitten von seiner Unterlage nicht abfällt und eine möglichst sichere, aber auch leichte Bewegung gestattet, wird er durch Leitrollen F sanft an die unteren Rollen angedrückt. Diese Leitrollen sind mit Messingfedern an einen auf das Hauptstück des unteren Schlittens geschraubten Träger H befestigt. In den beiden Ansätzen K und K' des oberen Schlittens ist parallel zu dessen Bewegungsrichtung ein Silberdraht von der Stärke Nr. 25 eingeklemmt, welcher sich um eine Trommel der Drehscheibe schlingt.

Der Führer oder die Vorrichtung zum Umfahren der auszumessenden Fläche ist mit dem vorderen Ende des oberen Schlittens verbunden. Sein Hauptstück ist ein zur Ebene des Instrumentes senkrecht stehender Träger L, welcher durch zwei Schräubchen a und b höher und tiefer gestellt, horizontal gedreht und festgeschraubt werden kann. An diesem Träger befindet sich erstens eine Fassung für ein Glas M, das in der Mitte einen kleinen Kreis hat, dessen Mittelpunct auf dem Umfange der auszumessenden Figur herumgeführt wird; zweitens eine Lupe O, welche diesen Kreis und die darunter befindliche Umfangslinie vergrößert, und drittens ein horizontaler Stift P, welcher zur Bewegung der ganzen Vorrichtung dient.

Die Drehscheibe S von 10,5 Centimeter Durchmesser und 3 Millimeter Dicke ruht mittels einer Trommel T auf einem massiven Zapfen, der mit dem unteren Schlitten senkrecht und fest verbunden ist. Die messingene Scheibe ist an der Oberfläche ganz eben geschliffen und,

damit sie eine mäßige Reibung zwischen sich und dem Rädchen veranlasse, mit feinem, gleichmäßig dickem Papier überzogen. Die Trommel, um welche sich der Silberdraht des oberen Schlittens schlingt, ist genau cylindrisch abgedreht und ihre mit der Axe des Zapfens zusammenfallende Mittellinie geht durch den Mittelpunct der Scheibe, auf welcher sie senkrecht steht. Der Durchmesser der Trommel beträgt etwa 20,34 Millimeter.

Das Uhrwerk oder der Theil des Instrumentes, welcher durch die Drehscheibe bewegt wird und die Größe der auszumessenden Fläche angiebt, ruht auf zwei mit dem Fußgestelle verbundenen Trägern Q und besteht erstens aus dem Messingrädchen R, welches mit seinem schmalen Rande auf der Drehscheibe steht und dessen Umdrehung der umfahrenen Fläche proportional ist. Sein Durchmesser hängt von der Einheit ab, in welcher die Fläche ausgedrückt werden soll. Zweitens aus einer Hauptaxe X, an welcher sich das eben genannte Rädchen, ein kleines Getriebe und ein Zeiger Z befinden, und welche bei c und c' in feinen Spitzen läuft, während ihre Projection auf die Scheibe (nahe) durch deren Mittelpunct geht. Drittens aus einem kleinen Messingrahmen U, der durch das Schräubchen e und den Hebel h um eine dem Silberdrahte parallele Axe d d' um Weniges auf und nieder bewegt werden kann, und dessen linke Seite ein Lager c der Hauptaxe enthält. Die rechte Seite trägt ein Gegengewicht W, dessen Bestimmung ist, den Druck des Rädchens R auf die Scheibe zu vermehren oder zu vermindern, je nachdem die Reibung zwischen beiden es erfordert. Viertens aus einem Hauptzifferblatte Z^o und zwei Nebenzifferblättern z' und z'', deren Zeiger ihre Bewegung durch die Hauptaxe des Uhrwerks und mit dieser in Verbindung stehende Zahnrädchen erhalten. Das Hauptzifferblatt, an dem Rahmen U befestigt, enthält an seinem unteren Rande einen Träger V, in dessen Kopfe sich das zweite Lager c' der Hauptaxe befindet. Die Bewegungen der Zeiger und die Theilungen der Zifferblätter sind auf dem Planimeter der hiesigen (Münchener) polytechnischen Schule so angeordnet, daß der Zeiger an dem Hauptzifferblatte Z^o die Einheiten der Fläche bis zu 100, jener an dem rechtseitigen Zifferblatte z'' bis zu 10 Hundert (00), und der am linkseitigen Zifferblatte bis zu 10 Tausend (000) angiebt. Ist z. B. die Einheit

der Fläche eine Quadratlinie und der Stand der Zeiger wie in Fig. 6, so ist die Ablesung 5 Tausend 2 Hundert und 14 Quadratlinien. Statt der Quadratlinien können aber auch andere Einheiten der Fläche erhalten werden, wenn nur ein anderes Rädchen **R** von entsprechendem Durchmesser an die Hauptaxe gesteckt wird.

§. 152 c.

Professor Bauernfeind giebt noch folgende Bemerkungen über den Gebrauch und die Prüfung des Instrumentes.

1) Der Theorie nach ist es gleichgiltig, an welcher Stelle des Umfangs einer geschlossenen Figur, deren Fläche bestimmt werden soll, das Umfahren beginnt oder endigt. In der Praxis kann jedoch die Voraussetzung, daß man nämlich am Ende des Umfahrens absolut genau in denselben Anfangspunct zurückkehre, nicht mit aller Strenge erfüllt werden, und es entspringt hieraus ein Fehler, dessen Größe von dieser Ungenauigkeit und der Lage des Berührungspunctes des Rädchens und der Drehscheibe am Anfang oder Ende dieser Bewegung abhängt. Aus der Gleichung

$$dv = \frac{y\,dx}{rR} \quad (\text{§. } 152\,a)$$

kann man leicht entnehmen, daß ein Fehler dx in der Richtung **OX** (Fig 1) einer Fehlerfläche ydx, und ein Fehler dy in der Richtung **OY** einer Fehlerfläche $dydx$ entspricht. Die gefährlichsten Fehler sind somit jene, welche in der Richtung von oder zum Instrumente (**OX** in Fig. 1) gemacht werden, weil sie die gesuchte Fläche um ein Rechteck unrichtig geben, dessen eine Seite der Fehler dx in der Verschiebung und dessen andere Seite der Abstand y des Berührungspunctes vom Mittelpuncte der Scheibe ist. Da aber diese Fehler um so kleiner werden, je weniger der letztgenannte Abstand beträgt, und da die in der Richtung der Ordinaten y begangenen kleinen Fehler nur sehr geringe Folgen haben, so ergiebt sich für die Anwendung des Planimeters folgende Regel:

Man wähle den Anfangspunct des Umfahrens so, daß der Berührungspunct zwischen der Scheibe und dem Rädchen dem Mittelpuncte der ersteren nahe liege.

2) Hat man für die Bezeichnung des Zifferblattes eine bestimmte Richtung angenommen, so ist es natürlich nicht mehr gleichgiltig, nach welcher Richtung die auszumessende Fläche umfahren wird. Welche Richtung als positiv angesehen werden soll, ist zwar willkürlich, gewöhnlich aber wird man diejenige dafür auswählen, welche der Numerirung des Zifferblattes einer Uhr entspricht. Giebt nun für diese Richtung der Zählapparat die Fläche richtig an, so muß dieselbe bei allen Figuren eingehalten werden, deren Inhalt nach dem Umfahren auf dem Zifferblatte, bei welchem Anfangs der Zeiger auf 0 gestellt war, direct abgelesen werden soll. Nennen wir diese, dem Zifferlauf einer Uhr entsprechende Richtung die rechtsläufige und die entgegengesetzte die linksläufige, so läßt sich die weitere Regel aufstellen:

Jede Figur, deren Flächeninhalt auf dem Anfangs auf 0 gestellten Zählapparate direct abgelesen werden soll, muß rechtsläufig umfahren werden.

Dabei muß man genau Acht geben, daß man die Richtung des rechtsläufigen Umfahrens nicht ändert, wobei allerdings mitunter Zweifel entstehen könnten. Wäre z. B. die Fläche der Figur 7 (Taf. XV) ohne den schraffirten Theil auszumessen und man begänne mit dem Umfahren bei a nach b hin, so dürfte man, bei a wieder angekommen, nicht von da nach e gehen, sondern müßte vielmehr den schraffirten Theil in der Richtung von a nach c umfahren, gerade so, wie man auch thun würde, wenn die Puncte des Umfanges bei a sich nicht berührten, sondern etwas auseinander ständen, wie in Fig. 7 a.

3) Eine für den Gebrauch des Planimeters wichtige Regel entspinnt sich aus folgenden Betrachtungen des Herrn Hofraths Hansen.

Wenn man nämlich für die Ermittelung der Fläche einer Figur, deren größte Breite kleiner ist als der Halbmesser der Drehscheibe, den Planimeter so aufstellt, daß alle Berührungspuncte des Rädchens und der Scheibe auf einer und derselben Seite des Mittelpunctes der letzteren liegen, so muß der Zeiger nothwendig in dem einen Theile des Umfahrens vorwärts und in dem anderen rückwärts gehen. Er muß daher einen weit größeren Weg durchlaufen, als der ist, den er am Schlusse seiner Bewegung anzeigt. Die gemessene Fläche besteht also in

der That in diesem Falle aus zwei Flächen, deren Unterschied sie ist; und diese beiden Flächen können unter Umständen weit größer sein als jene, so daß das vom Planimeter angegebene Resultat aus der kleinen Differenz zweier weit mehr betragenden Größen besteht. Solche Ermittelungen soll man aber wegen ihrer größeren Fehlerquellen in der Praxis vermeiden, was dadurch geschieht, daß man dem Instrumente eine solche Lage gegen die Zeichnung giebt, bei welcher die Berührungen des Rädchens auf der Drehscheibe zu beiden Seiten ihres Mittelpunctes möglich vertheilt sind. Daher die Regel:

Bei der Aufstellung des Planimeters ziehe man den oberen Schlitten ein angemessenes Stück heraus und halte den unteren so, daß das Rädchen die Drehscheibe beiläufig in deren Mitte berührt, und bringe nach dem Augenmaße die Mitte der Figur unter den Führer.

§. 152 d.

1) Der Gebrauch des fehlerfreien Instrumentes ist sehr einfach und ergiebt sich aus den vorhergehenden Erörterungen von selbst. Steht nämlich der Planimeter auf einer festen ebenen Unterlage, einem Tische oder Zeichnenbrete, so bringe man ihn zunächst durch die Fußschreiben in eine nahehin wagerechte Lage, was man daran erkennt, daß jeder der beiden Schlitten an der Stelle ruhig verharrt, in die man ihn schiebt. Hierauf lege man die auszumessende ebene Figur so unter den Führer, wie es die Regel in Nr. 3 des §. 152 c. vorschreibt, bezeichne mit Beobachtung der dortigen Regel 1) einen Punct des Umfanges als Anfangspunct der Bewegung, hebe das Rädchen **R** (Taf. **XV**, Fig. 4) durch Vorwärtsdrehen des Schräubchens e ein Wenig von der Scheibe, stelle durch Drehung der Hauptaxe alle Zeiger auf Null und bringe den Führer so auf den Anfangspunct, daß er von dem Mittelpuncte des Kreises im Glase **M** gedeckt wird. Nachdem dieses geschehen, lasse man mit Hilfe des Schräubchens e das Rädchen **R** auf die Drehscheibe herabsinken, so daß sich beide berühren; führe den genannten Kreis auf der auszumessenden Figur rechtsläufig bis zum Ausgangspuncte herum und lese schließlich an dem Zeiger **z'** die Tausende, an **z''** die Hunderte und an **Z** die weniger als Hundert betragende Anzahl von Einheiten

ab, deren Zusammenfügung die gesuchte Fläche giebt. Sollten die äußersten Puncte der auszumessenden Figur weiter auseinander liegen als die größten Ausweichungen der Schlitten nach den ihnen angewiesenen Richtung (16 Centimeter nach der Richtung des Drahtes und 8 Centimeter senkrecht darauf), so theile man dieselbe durch eine beliebige gerade oder krumme Linie so ab, daß das Umfahren jedes Theiles möglich wird, und bestimme jeden nach der vorstehenden Anleitung.

Man kann dabei dieselbe Figur mehr als einmal umfahren und so ein Vielfaches der Fläche erhalten, aus welchem das Einfache einen noch mehr genäherten Werth geben wird.

2) Die Prüfung des Planimeters würde sehr umständlich sein, wenn alle wesentlichen Theile desselben einzeln untersucht werden müßten, ob sie ihre Bestimmung mit der erforderlichen Genauigkeit erfüllen. Diese Einzeluntersuchung ist jedoch nicht nöthig, sobald man sich durch ein summarisches Verfahren überzeugt hat, daß der Flächeninhalt von genau berechneten Versuchsfiguren richtig angegeben wird. Am besten sind hierzu regelmäßige Figuren, wie Kreise, Quadrate, gleichseitige Dreiecke u. s. w. geeignet, weil sie sich am schärfsten zeichnen oder berechnen lassen. Man kann sie entweder auf angespanntem Papier fein ausziehen oder in ebene Metallplatten graviren. Ihre Abmessungen müssen mit der größten Genauigkeit bestimmt sein. Es ist gut, wenn man zu diesen Probefiguren auch solche nimmt, welche, wie z. B. Rechtecke, erfordern, daß die Schlitten ihre größtmögliche Bewegungen machen, weil nur dann, wenn auch der Inhalt dieser Flächen richtig angegeben wird, angenommen werden darf, daß alle Theile des Apparates ihre Schuldigkeit thun.

Bei diesen Versuchen kann sich zeigen, daß alle abgelesenen Flächen gegen die berechneten nur um äußerst wenig (etwa $\frac{1}{1000}$ oder weniger) bald zu groß bald zu klein sind; in diesem Falle ist das Instrument in Ordnung. Oder es zeigt sich, daß alle Inhalte um etwas zu groß gefunden werden; dann ist auch das Rädchen etwas zu groß und deßhalb sein Durchmesser um etwas zu verringern. Oder man findet alle Flächen etwas zu klein; in diesem Falle ist auch der Durchmesser des Drehrädchens etwas zu klein. Da derselbe aber nicht vergrößert

werden kann, so ist oft damit zu helfen, daß man den Draht etwas dicker nimmt, wodurch der Halbmesser der Trommel vergrößert, und die Drehung der Scheibe und die der Rolle beim Fortschieben des oberen Schlittens vermehrt wird. Auf gleiche Weise kann auch durch Anwendung eines dünneren Drahtes das Abdrehen eines zu großen Rädchens oft erspart werden.

3) Wenn es sich zeigt, daß die Abweichungen von dem wahren Flächeninhalte bald positiv, bald negativ, jedenfalls aber größer sind, als sie sein dürfen, so kann der Fehler herrühren:

a) von der Ungeschicklichkeit oder Unachtsamkeit des Messenden. Derjenige, welcher mit dem Planimeter die Fläche einer Figur richtig bestimmen will, muß nicht nur darauf sehen, daß er das Instrument richtig stellt und den Umfang genau umfährt, sondern auch darauf, daß dieses Umfahren mit möglichst gleicher Geschwindigkeit der Bewegung des Führers und unveränderter Lage des Glases M gegen die Ebene der Figur geschieht. Denn nach den Versuchen von Stampfer erzeugen schnelle Bewegungen, abgesehen von den kleinen Abweichungen in der Umschreibung, auch dadurch Fehler, daß das Drehrädchen eine gewisse Schwungkraft und hierdurch ein Bestreben zum Vorlaufen bekommt; und wenn das Glas M aus irgend einem Grunde während des Umfahrens seine Lage gegen die Ebene der Figur ändert, so entsteht eine schädliche Parallaxe, die eben so wirkt, als wenn der Umfang nicht genau umschrieben wird.

b) Oder von der Unebenheit der Drehscheibe. Dieselbe sollte, streng genommen, auf ihrer Oberfläche eine vollkommene Ebene sein; da sie aber auch gleichzeitig eine hinreichende Reibung zwischen sich und der Drehrolle hervorbringen soll, so darf diese Ebene nicht metallisch sein, sondern muß mit Papier überzogen werden. Dieses ist zwar nie ganz eben, auch wenn es sehr dünn, fest und gleichförmig aufgespannt ist; jedoch für den vorliegenden Zweck eben genug, wenn ein genaues Lineal seine Oberfläche nach allen Richtungen hin vollständig deckt. Die gefährlichsten Stellen befinden sich stets am Rande der Scheibe, wo sich das Papier manchmal etwas ablös't. Solche Ablösungen müssen sofort ausgebessert werden.

c) Von der gleitenden Bewegung zwischen dem Rädchen und der Scheibe. Da die Theorie des Planimeters fordert, daß von der Drehrolle ein Bogen abgewickelt werde, welcher der Berührungscurve auf der Scheibe genau gleich ist, so ist klar, daß eine Verschiedenheit in der Länge dieser Bögen einen Fehler in der Flächenangabe erzeugt. Ein Unterschied dieser Längen ergiebt sich aber, sobald das Rädchen, wegen zu großen Gewichtes, oder zu schwerfälliger Bewegung seiner Axe, oder auch wegen zu geringer Reibung, oder gar wegen Mangels an Berührung die Drehscheibe unter sich weggleiten läßt, ohne sich zu drehen. Daher muß die Axe des Rädchens leicht sein und sich fast ohne Reibung bewegen; sein Druck auf die Scheibe muß durch das Gegengewicht W vermehrt oder vermindert werden können, um seine Reibung größer oder kleiner zu machen; und vor dem Umfahren ist das Schräubchen e jedesmal weit genug zurückzudrehen, damit das Rädchen vollständig auf der Scheibe ruhe.

d. Wenn endlich auch die beiden Schlitten sich nicht senkrecht gegen einander zu bewegen brauchen, so muß, der Theorie gemäß, doch gefordert werden, daß sie sich unter einem unveränderlichen Winkel oder parallel zu ihrer ursprünglichen Lage verschieben lassen. Da jedoch die Nuthen, in denen die Schlitten laufen, ihre Lage nicht ändern können, so kommt es nur darauf an, daß die Bewegungen geradlinig sind; indeß wird ein merklicher Fehler in dieser Beziehung selten vorhanden sein.

4) Um von der Genauigkeit des Planimeters einen deutlichen Begriff zu geben, führe ich hier noch einen Versuch Bauernfeinds an, bei welchem ein Kreis von 22,05 baierschen Decimallinien mit äußerster Schärfe auf eine Metallplatte gravirt war. Sein Inhalt ergiebt sich durch Berechnung zu 381,86 Decimalquadratlinien.

Beobachtung.	Zeit.	Ablesung.	Fläche.	Unterschied.
	8h 48′	0		
1		382,0	382,0	— 0,2
2		764,1	382,1	— 0,1
3		1146,4	382,3	+ 0,1
4		1528,5	382,1	— 0,1
5		1910,7	382,2	0
6		2293,0	382,3	+ 0,1
7		2675,3	382,3	+ 0,1
8		3057,6	382,3	+ 0,1
9		3440,0	382,4	+ 0,2
10	9h 3′	3822,0	382,0	— 0,2

Resultate:

Zeit einer Beobachtung durchschnittlich = 1,5 Minuten; mittlere Fläche aus 10 Beobachtungen = 382,2 □ Linien;

Abweichung dieser Fläche von der berechneten = + 0,36 □ Linien;

Verhältniß dieser Abweichung zur ganzen Fläche = 1 : 1060;

größte Abweichung der einzelnen Beobachtungen von dem durch Beobachtung gefundenen Mittel = 0,2 □ Linien;

Verhältniß dieser Abweichung zur ganzen Fläche = 1 : 1911.

Zehntes Capitel.

Von der Theilung der Grundstücke.

§. 153.

Das Theilungsverfahren im Allgemeinen.

Fast alle hier vorkommenden Aufgaben werden nur versuchsweise aufgelös't, indem man die Theilungslinie zuerst nur beiläufig, vielleicht gar nur nach dem Augen-

maße zieht und dieselbe nachher so lange verbessert, bis eine wirkliche Berechnung der Flächenstücke ausweis't, daß der Forderung Genüge geschehen ist. Meistens führt ein solches Verfahren schneller zum Ziele, als selbst eine streng richtige Rechnung oder Construction, die übrigens auch nur für wenige sehr einfache Fälle gegeben werden könnte. Damit man jedoch bei'm Probiren nicht blindlings herumtappe, muß man einige leichte geometrische Rechnungen zu Hülfe nehmen, die in folgenden Aufgaben enthalten sind.

§. 154.

Aufgabe. Von einem Parallelogramm ABCD (Taf. XIII., Fig. 1) ein anderes AFED abzuschneiden, welches einen gegebenen Inhalt = q hat.

Auflösung I. Kennt man den Punct E auf der Seite DC, durch welchen die Theilungslinie EF gehen muß, so ist die Aufgabe gelös't. Setzt man aber den Inhalt des Parallelogrammes = Q, so ist

$$Q : q = DC : DE,$$

aus welcher Proportion man DE finden kann, da Q, q und DC gegeben sind. Trägt man dann das berechnete DE auf DC, nimmt AF = DE und zieht EF, so ist der Forderung Genüge geschehen.

Beispiel: Es sei ABCD = Q = 395 □Ruthen, AFED = q = 97 □Ruthen, DC = 382′, so hat man

$$\underline{395\ \square R. : 97\ \square R. = 382' : DE}$$
$$\text{daher } DE = 93{,}8'$$

Die Auflösung gründet sich, wie man leicht sieht, auf den Satz, daß Parallelogramme von gleichen Höhen sich wie ihre Grundlinien verhalten.

II. Oder man dividire mit der Seite AD, von welcher aus das abzuschneidende Stück gerechnet wird, in dessen Inhalt q, so erhält man seine Höhe. Diese fasse man in den Zirkel, setze den einen Fuß in einen beliebigen Punct m der AD, beschreibe einen Bogen und ziehe an demselben die Berührungslinie EF mit AD parallel.

Beispiel: Wäre, wie oben, das Stück A F E D $= q = 97$ □R. $= 9700$ □F. und A D $= 526'$, so wäre die Höhe m n $= 18{,}4'$.

Zusatz. Dieser zweiten Methode bedient man sich besonders da mit großem Vortheile, wo die Figur A B C D zwar kein Parallelogramm ist, aber auch von demselben nicht viel abweicht. Hat das abzuschneidende Stück q, im Vergleich zum Ganzen, nur einen sehr geringen Inhalt, also auch nur eine sehr geringe Breite, so kann man bei jeder vierseitigen Figur so verfahren, ohne einen für die Praxis nachtheiligen Fehler befürchten zu müssen.

§. 155.

Aufgabe. Es ist ein Winkel A (Taf. XIII., Fig. 2) und auf einem Schenkel desselben ein Punct B gegeben; man soll durch B die Linie B C so ziehen, daß das Dreieck A B C einen verlangten Inhalt $= q$ habe.

Auflösung I. Von dem Dreiecke A B C kennt man offenbar neben seinem Inhalte auch die Höhe B M, welche gemessen $= h$ sein mag. Man dividire nun mit B M in den doppelten Inhalt des Dreiecks A B C, so findet man die Seite (Grundlinie) A C, nämlich:

$$AC = \frac{2q}{h}$$

und alsdann kann man die Theilungslinie B C ziehen.

Ist, z. B., $BM = h = 84'$ und soll das Dreieck A B C einen Inhalt $= q = 2850$ □F. haben, so muß $AC = \frac{2 \times 2850}{84} = 67{,}86'$ genommen werden.

II. Oder man dividire mit A B (der Grundlinie) in den doppelten Inhalt des Dreiecks A C B, so erhält man die Höhe C N. Faßt man diese zwischen den Zirkel und sucht auf A C den Punct C, aus welchem ein mit derselben Zirkelöffnung beschriebener Kreisbogen die A B berührt, so ist C der Punct, durch welchen die Theilungslinie B C gehen muß.

III. Wäre nicht bloß ein Winkel A, sondern ein Dreieck A D B, dessen Spitze ebenfalls in B liegt, gegeben, so könnte man A C, den Inhalt des Dreiecks A D B $= Q$ gesetzt, auch durch die Proportion finden:

$$Q : q = AD : AC,$$

weil die Grundlinien von Dreiecken, die gleiche Höhe haben, sich wie die Flächen dieser Dreiecke verhalten.

Es sei, z. B., die Fläche des Dreiecks ABD = 80 □R. = Q, und die des Dreiecks ABC = 54 □R. = q, ferner AD = 160 Fuß, so hat man 80 □R. : 54 □R. = 160 Fuß : AC, daher AC = 108 Fuß.

§. 156.

Aufgabe. Von einem Trapeze ABCD (Fig. 3, Taf. XIII.) mit zwei parallelen Seiten, das den Inhalt Q hat, das Stück FBCE vom Inhalte q so abzuschneiden, daß die Theilungslinie EF durch die Parallelseiten AB und DC geht.

Auflösung. Man theile beide Parallelen in E und F in dem Verhältnisse q : Q, nämlich $CE = CD \times \frac{q}{Q}$ und $BF = AB \times \frac{q}{Q}$, und ziehe EF, so hat ECBF den verlangten Inhalt q.

Denn zieht man die Höhe CM, so ist das Trapez $FBCE = \frac{1}{2}(EC + FB) \times CM = \frac{1}{2}\left(CD \times \frac{q}{Q} + AB \times \frac{q}{Q}\right) \times CM = \frac{1}{2}(CD + AB) \times CM \times \frac{q}{Q}$. Es ist aber $\frac{1}{2}(CD + AB) \times CM$ = Trapez ABCD = Q, folglich auch das Trapez $FBCE = Q \times \frac{q}{Q} = q$.

Wäre, z. B., Q = 400 □R., q = 100 □R., so hätte man $\frac{q}{Q} = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$; es müßte daher $CE = \frac{1}{4} CD$ und $BF = \frac{1}{4} BA$ werden.

§. 157.

Aufgabe. Von einem Dreiecke ABC (Taf. XIII., Fig. 12) ein verlangtes Stück so abzuschneiden, daß die Theilungslinie ED mit einer Seite BC parallel geht.

Auflösung I. Wenn der Abschnitt von der Spitze des Dreiecks aus gerechnet wird, also wieder ein Dreieck ist.

Es sei der Inhalt des ganzen Dreiecks $ABC = Q$, der des abzuschneidenden Stückes $AED = q$, so berechnet man die Lage des Punctes D, durch welchen die Theilungslinie DE gehen muß, durch die Formel

$$AD = AC \times \sqrt{\frac{q}{Q}}.$$

Nämlich man dividirt mit dem ganzen Dreieck Q in das abzuschneidende q, zieht aus dem Quotienten die Quadratwurzel und multiplicirt dieselbe mit derjenigen Seite (AC), auf welcher der Abschnitt (AD) gefunden werden soll. —

Denn da das Dreieck ADE dem Dreiecke ABC, wegen des Parallelismus von DE und CB, ähnlich ist, so hat man:

$$AD^2 : AC^2 = q : Q,$$

$$\text{also } AD^2 = AC^2 \times \frac{q}{Q},$$

$$\text{folglich } AD = AC \sqrt{\frac{q}{Q}}.$$

Beispiel. Es sei das ganze Dreieck $ABC = Q = 250$ □R., und es sollen hiervon 100 □R. abgeschnitten werden. Hier ist $\frac{q}{Q} = \frac{100}{250} = 0{,}4$, und $\sqrt{\frac{q}{Q}} = \sqrt{0{,}4} = 0{,}6325$. Wäre nun $AC = 140'$, so wäre $AD = 140 \times 0{,}6325 = 88{,}55'$.

Zusatz. Anstatt den Abschnitt AD auf der Seite AC zu berechnen, kann man auch den Abschnitt AN auf der Höhe AM suchen; man hat hierbei nichts weiter zu ändern, als daß man statt der Seite AC die Höhe AM des Dreiecks ABC setzt.

Wem die Rechnung zu beschwerlich fällt, der kann dieselbe auch durch eine Zeichnung ersetzen. Man berechnet eine Linie $L = AC \times \frac{q}{Q}$, was besonders dann sehr leicht ist, wenn q ein solcher Bruch von Q wird, der in kleinen Zahlen sich ausdrücken läßt, wie wenn,

z. B., $q = \frac{2}{3} Q$, oder $= \frac{1}{2} Q$, $\frac{1}{5} Q$ u. s. w. wäre, wo alsdann nur nöthig ist, $L = \frac{2}{3} AC$, $= \frac{1}{2} AC$, $= \frac{1}{5} AC$ zu machen. Ein so vielster Theil nämlich q von Q ist, ein eben so vielster wird L von AC. Man mache AG = L, beschreibe über AC einen Halbkreis, errichte in G auf AC ein Perpendikel GH bis zum Durchschnitte mit dem Halbkreise, ziehe AH und mache AD = AH, so ist D der Punct, durch welchen die Theilungslinie geben muß.

Denn es ist $\triangle ADE : \triangle ABC = AD^2 : AC^2 = AH^2 : AC^2$. Weil aber AH die mittlere Proportionallinie zwischen AG und AC ist, so ist $AH^2 = AG \times AC = L \times AC = AC \times \frac{q}{Q} \times AC = AC^2 \times \frac{q}{Q}$; daher

$$\triangle ADE : \triangle ABC = \frac{q}{Q} : 1,$$

$$\text{d. i. } \triangle ADE : Q = \frac{q}{Q} : 1,$$

$$\text{folglich } \triangle ADE = q.$$

II. Wenn das abzuschneidende Stück von der Dreiecksseite CB aus gerechnet wird, mit welcher die Theilungslinie DE parallel läuft.

Wenn das ganze Dreieck ABC = Q und das abzuschneidende Stück BEDC = q gesetzt wird, so ist das Dreieck AED = Q — q, und man kann nun dieses nach der vorigen Aufgabe abschneiden. Man hat dann

$$AD = AC \sqrt{\frac{Q - q}{Q}} = AC \sqrt{1 - \frac{q}{Q}};$$

oder wenn wir den Abschnitt auf der Seite von eben daher rechnen wollen, woher der Abschnitt BEDC = q genommen wird:

$$CD = AC - AD = AC - AC \sqrt{1 - \frac{q}{Q}},$$

$$\text{d. i., } CD = AC \left(1 - \sqrt{1 - \frac{q}{Q}}\right).$$

Wäre, z. B., alles wie oben, sollten jedoch statt 100 □R. von der Spitze aus 150 □R. von CB aus abgeschnitten werden, so wäre die Rechnung folgende:

Inhalt des abzuschneidenden Stückes	= 150
dividirt durch den Inhalt des ganzen Dreiecks	= 250
giebt	0,6
dieses abgezogen von 1, giebt . .	0,4
hieraus die Quadratwurzel, giebt .	0,6325
dieses subtrahirt von 1, giebt . .	0,3675
dieses multiplicirt mit AC . .	= 140
giebt CD	= 51,45 Fuß.

Wie übrigens diese Aufgabe versuchsweise aufgelös't werden kann, wird man aus §. 159 ersehen.

§. 158.

Aufgabe. Von dem Paralleltrapez ABCD (Tafel XIII., Fig. 10), dessen sämmtliche Theile als bekannt vorausgesetzt werden, soll durch die Linie EF, welche mit den Parallelen des Trapezes parallel ist, ein Stück ABFE von gegebenem Inhalte abgeschnitten werden.

Auflösung. Wir wollen, um diese Aufgabe auf algebraischem Wege zu lösen, die größere Parallele AB = a, die kleinere DC = b, die Höhe des Trapezes DN = h, und die Seite AD, auf welcher man den Punct E, durch welchen die Theilungslinie gehen muß, bestimmen will, = g setzen. Der Inhalt des ganzen Trapezes endlich sei = Q, der des abzuschneidenden Stückes = q.

Es ist dann bekanntlich:

$$Q = \left(\frac{a+b}{2}\right) h$$

und daher I. $h = \frac{2Q}{a+b}$.

Ferner, wenn wir die Länge der Theilungslinie EF = y, und die Höhe EL des abzuschneidenden Stückes ABFE = x setzen:

$$q = \left(\frac{a+y}{2}\right) x$$

daher II. $x = \frac{2q}{a+y}$.

Ziehen wir nun EH und DG mit CB parallel, so werden die Dreiecke EAH und DAG, ihrer gleichen Winkel wegen, ähnlich, so daß

$$AH : AG = EL : DN$$

d. i. $AH : AG = x : h$.

Da aber GB = DC und EF = HB ist, so ist $AH = a - y$ und $AG = a - b$; folglich, wenn wir diese Werthe in die obige Proportion setzen:

$$a - y : a - b = x : h,$$

oder wenn wir statt x und h ihre in I. und II. aufgeführten Werthe setzen:

$$a - y : a - b = \frac{2q}{a+y} : \frac{2Q}{a+b}.$$

Indem wir hier die Producte der Außen- und Mittelglieder bilden, ergiebt sich:

$$\frac{(a-y)\,Q}{a+b} = \frac{(a-b)\,q}{a+y}$$

daher $(a - y)\,(a + y) = (a - b)\,(a + b) \cdot \frac{q}{Q}$.

Weil aber das Product aus Summe und Differenz zweier Zahlen dem Unterschiede ihrer Quadrate gleich ist, so hat man $(a - y)\,(a + y) = a^2 - y^2$, und daher

$$y^2 = a^2 - (a - b)\,(a + b) \cdot \frac{q}{Q}$$

folglich III. $y = \sqrt{a^2 - (a - b)\,(a + b)\,\frac{q}{Q}}$.

Dieses ist nun die Länge der gesuchten Theilungslinie EF. Um hieraus die Länge AE zu finden, dienen wieder die schon betrachteten ähnlichen Dreiecke EAH und DAG. Hier ist

$$AG : AD = AH : AE$$

d. i. $a - b : g = a - y : AE$

daher IV. $AE = \frac{g}{a-b}\,(a - y)$

oder $AE = \frac{g}{a-b}\left(a - \sqrt{a^2 - (a-b)\,(a+b)\,\frac{q}{Q}}\right)$.

Die in diesen Formeln enthaltene Rechnungsregel erläutern wir am besten durch ein Beispiel. Es sei also

die größere Parallele AB = a = 373′, die kleinere CD = b = 189′, die Höhe DN = h = 55′, so ist der Inhalt des ganzen Trapezes 15455 □F. = Q. Sollen nun hiervon 5000 □F. abgeschnitten werden, so ist q = 5000, und die Rechnung folgende:

die größere Parallele	.	373 = a
die kleinere Parallele	.	189 = b
beide addirt, giebt .	.	562 = a + b
multiplicirt mit dem abzuschneidenden Inhalte	.	5000 = q
giebt . .	.	2810000 = (a + b) q
das Product dividirt mit dem Inhalte des ganzen Trapezes	.	15455 = Q
giebt . . .	.	181,82 = $(a + b)\frac{q}{Q}$ *)
dieses multiplicirt mit dem Unterschiede der Parallelseiten		184 = a — b
giebt	.	33454 = $(a-b)(a+b)\frac{q}{Q}$
Dieses abgezogen vom Quadrat der größeren Parallele		139129 = a^2
giebt . . .	.	105675 = $a^2-(a-b)(a+b)\frac{q}{Q}$
hieraus die Quadratwurzel gezogen, giebt	. .	325,1 Fuß $= \sqrt{a^2-(a-b)(a+b)\frac{q}{Q}}$

für die Länge der Theilungslinie EF = y.

Ist alsdann AD = 72′, so heißt es weiter:
Unterschied der Parallelseiten des Trapezes a — b = 184
Unterschied zwischen der größeren Parallele und der Theilungslinie . . . . . . = 47,9,
und daher

$$184 : 47,9 = 72 : AE$$

folglich $AE = 18,75.$

*) Wäre das abzuschneidende Stück q ein solcher Theil vom ganzen Trapez Q, der sich bequem in kleinen Zahlen ausdrücken läßt, z. B., $q = \frac{1}{2} Q$, $q = \frac{2}{3} Q$, $q = \frac{1}{3} Q$, u. s. w., so hätte man nur nöthig, von der Summe der Parallelseiten die Hälfte, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ zu nehmen, u. s. w.

Man kann nun die Linie AE auftragen und sodann die Theilungslinie EF mit AB parallel ziehen.

Würde man statt der Seite AD die Höhe DN setzen, so würde man den Abschnitt IN = x finden, durch welchen man ebenfalls in den Stand gesetzt wird, die Theilungslinie EF zu ziehen. Nämlich man hat, weil DN = 55 Fuß:

$$184 : 47{,}9 = 55 : NI$$

daher $$NI = 14{,}3 \text{ Fuß}.$$

Zusatz I. Diese Auflösung setzt voraus, daß der Abschnitt q von der größeren Parallelseite aus, und auch der Abschnitt AE auf der Seite AD, oder NI auf der Höhe ND von eben daher gerechnet werden. Dieser Bedingung kann auch immer genügt werden, weil man, um das Stück DEFC = q von der kleineren Parallele aus abzuschneiden, nur das Stück ABFE = Q — q von der größeren Parallele aus abzuschneiden braucht.

Allein die Formeln III. und IV. enthalten beide Fälle in sich, wenn man nur unter a diejenige Parallele versteht, von welcher aus die Abschnitte gerechnet werden sollen. Wenn daher das Stück DEFC = q von der kleineren Parallele aus abgeschnitten werden soll, so haben wir in den Formeln III. und IV. bloß a mit b und b mit a zu vertauschen. Man erhält dadurch, weil nun b — a eine negative Größe = — (a — b) wird:

$$\text{V,}\quad y = \sqrt{b^2 + (a-b)(a+b)\frac{q}{Q}}$$

$$\text{VI,}\quad DE = \frac{g}{a-b}(y-b)$$

$$\text{oder } DE = \frac{g}{a-b}\left(\sqrt{b^2 + (a-b)(a+b)\frac{q}{Q}} - b\right).$$

Die in dieser Formel enthaltene Rechnungsregel mag durch ein Beispiel nähere Erläuterung finden. Es sei das Trapez eben dasselbe, wie vorher, aber nunmehr von der kleinen Seite aus 10455 □Fuß abzuschneiden, welches von der größeren Seite aus 5000 □Fuß giebt, wie im vorigen Beispiele angenommen wurde. Wir haben dann folgende Rechnung:

Summe der beiden Parallelseiten . .	562
multiplicirt mit dem abzuschneidenden Inhalte	10455
giebt	5875710

dieses dividirt mit dem Inhalte des ganzen Trapezes	15455
giebt	380,18
dieses multipl. mit dem Unterschiede der parallelen Seiten	184
giebt	69953
hierzu addirt das Quadrat der kleineren Parallele	35721
giebt	105674
hieraus die Quadratwurzel gezogen, giebt .	325,1 F.

für die Länge der Theilungslinie EF = y, gerade so, wie bei der vorigen Rechnung.

Dann weiter:

Unterschied der beiden Parallelseiten . .	184
Unterschied zwischen der Theilungslinie und der kleineren Parallele	136,1

folglich 184 : 136,1 = DA : DE
184 : 136,1 = 72 : DE

daher DE = 53,24.

Eben dasselbe findet man auch, wenn man das vorhin gefundene AE = 18,75 von AD = 72 subtrahirt.

Zusatz 2. Die Auflösung der Aufgabe durch Construction hat zwar weniger practische Brauchbarkeit, doch mag sie, um der Vollständigkeit willen, hier noch einen Platz finden.

1) Wenn das abzuschneidende Stück von der größeren Parallele AB aus gerechnet wird (Fig. 9, Taf. XIII.).

Man suche zunächst eine Linie L nach der Proportion:

$$Q : q = AB + DC : L$$

was am besten durch Rechnung geschieht, außer etwa in dem Falle, wo q ein in kleinen Zahlen ausdrückbarer Theil von Q ist, z. B, $q = \frac{1}{5} Q$, $q = \frac{2}{3} Q$, u. s. w., wo die geometrische Theilung bequemer sein mag; ein sovielster Theil nämlich q von Q ist, ein ebensovielster ist L von der Summe der Parallelseiten AB + DC. Nun verlängert man AB durch A, bis AM = L wird, zieht DG mit CB parallel, beschreibt über MG einen Halbkreis und errichtet in A auf AB das Perpendikel AP bis zum Durchschnitte mit dem Halbkreise. Macht man hierauf mit der Zirkelöffnung PQ = AB auf AB einen Durchschnitt Q, so ist AQ die Länge der Theilungslinie. Zieht man daher QF mit AD und FE mit AB parallel, so ist der Abschnitt ABFE der verlangte.

Denn es ist $AQ^2 = PQ^2 - AP^2$
d. i. $AQ^2 = AB^2 - AP^2$.

Aber $AP^2 = AG \times AM = (a-b)\,L = (a-b)\,(a+b)\,\frac{q}{Q}$,
und $AB^2 = a^2$, daher

$$AQ^2 = a^2 - (a-b)\,(a+b)\,\frac{q}{Q} = y^2.$$

Folglich ist AQ die Länge der Theilungslinie und es ist $EF = AQ$ richtig in das Trapez eingetragen.

2) Wenn der Abschnitt von der kleineren Seite CD aus gerechnet wird. (Taf. XIII., Fig. 6.)

Man bestimmt die Linie L auf gleiche Weise, wie vorher, macht $DM = L$, verlängert CD durch D und zieht AR mit CB parallel. Beschreibt man dann über MR einen Halbkreis und errichtet in D auf MR das Perpendikel DP bis zum Durchschnitte mit dem Halbkreise, so ist CP die Länge der Theilungslinie. Macht man also $CT = CP$, zieht TE mit CB und EF mit CT parallel, so ist $EF = CT = CP$, und $CDEF$ der verlangte Abschnitt.

Denn es ist $CP^2 = CD^2 + DP^2$,
aber $CD^2 = b^2$, $DP^2 = MD \times DR = (a-b)\,L =$

$$(a-b)\,(a+b)\,\frac{q}{Q},$$

folglich $CP^2 = b^2 + (a-b)\,(a+b)\,\frac{q}{Q} = y^2$,
folglich ist CP die Länge der Theilungslinie.

§. 159.

Aufgabe. Die Aufgabe des §. 158 versuchsweise aufzulösen.

Auflösung. Ein geübter Geometer weiß schon ziemlich genau, wohin die Theilungslinie EF (Taf. XIII., Fig. 13) fallen muß. Man notire sich daher eine Linie ef, welche der wahren Theilungslinie EF so nahe liegt, als man es nach dem Augenmaße treffen kann, und messe die zwischen den Parallelen ef und AB in der Mitte liegende $e'f'$. Mit dieser Linie $e'f'$ dividire man in den Inhalt des abzuschneidenden Stückes q, so findet man dessen Höhe NI', die aber noch um Einiges fehlerhaft ist. In dem so berechneten Abstande NI' zieht man die $e''f''$

mit AB parallel und berechnet genau den Inhalt des Trapezes AB f″ e″, so findet man das Stück e″ f″ FE, um welches das Trapez AB f″ e″ größer oder kleiner ist, als das abzuschneidende q. In den nun bekannten Inhalt des Trapezes e″ f″ FE dividire man mit der Parallele e″ f″, so erhält man die Höhe I′I dieses Trapezes. Dieses Stück I′I wird endlich zu dem schon gefundenen Theile I′N der gesuchten Höhe addirt oder davon subtrahirt, je nachdem nämlich das Trapez AB f″ e″ kleiner oder größer als das abzuschneidende gefunden wurde. Das Resultat giebt die wahre Höhe des Trapezes sehr genau an. Diese faßt man zwischen den Zirkel, setzt den einen Fuß auf AB in N und beschreibt den kleinen Bogen mn, an welchen man die Berührungslinie EF mit AB parallel zu ziehen hat, um die gesuchte Theilungslinie zu erhalten.

Zuletzt berechnet man das Stück ABFE nochmals, um zu erfahren, ob es den verlangten Inhalt hat; wo nicht, so wird die vorige Correction noch einmal wiederholt.

Es versteht sich, daß keine Linie, außer EF, ausgezogen zu werden braucht.

Auch bleibt das Verfahren ganz dasselbe, man mag den Abschnitt von der größeren oder kleineren Parallele aus rechnen.

§. 160.

Aufgabe. Jedwede Figur auf dem Felde durch Parallelen in so viel Theile zu theilen, als man verlangt.

Auflösung. Man bringt die Figur erst zu Papiere, und zwar nach einem Maßstabe, der so groß als möglich ist, weil in solchen Fällen gewöhnlich viele Theile gefordert werden und daher oft sehr kleine Parzellen entstehen, bei denen man eine sehr große Genauigkeit verlangt. Deßhalb ist auch die größte Sorgsamkeit bei der Aufnahme nöthig.

Bei der Aufnahme werden zugleich solche Puncte, A, B, C, D, E, F, H, I (Taf. XIII., Fig. 4) mit aufgenommen, zwischen welchen sich Linien ziehen lassen, auf denen man die Theilungspuncte bequem abstecken kann. Gerade diese Linien müssen ihrer Länge und Lage nach mit der äußersten Genauigkeit bestimmt werden, weil

hiervon das Zusammentreffen des auf dem Papiere gemachten Entwurfs mit der Wirklichkeit ganz besonders abhängt; auch müssen jene Puncte gut markirt werden, damit man sie nachher wieder finden könne.

Hat man nun Alles zu Papiere gebracht, so bestimmt man die Linie XZ, mit welcher die Theilungslinien parallel laufen sollen, so, wie sie zu dieser Absicht am geeignetsten scheint.

Mit dieser Linie XZ zieht man dann Parallelen durch alle Winkelpuncte der Figur, so daß diese in lauter Trapeze (und resp. Dreiecke) zerlegt wird. Jedes Dreieck und Trapez wird so genau, als möglich, berechnet und sein Inhalt angemerkt; auch addirt man sämmtliche, um den Inhalt der ganzen Figur zu erfahren.

Den Gesammtinhalt der Figur dividirt man durch die Anzahl der Theile, wo dann der Quotient die Größe eines Theiles angiebt. Gesetzt, die ganze Figur halte 973 □Ruthen, und es werden 60 Theile verlangt, so kommen auf jeden Theil 16,2167 □Ruthen. Dieß setzt voraus, daß alle Theile gleich sind; sind sie ungleich, so wird der Gesammtinhalt nach dem Verhältnisse der Theile repartirt.

Man multiplicirt dann den Inhalt des Theiles mit 2, 3, 4, u. s. w., oder allgemeiner, man sucht die Summe des ersten und zweiten, dann die des ersten, zweiten und dritten Theiles, u. s. w. Es wird daher nöthig, den Inhalt des einzelnen Theiles bis auf sehr kleine Bruchtheile zu berechnen, damit die Vielfachen mit gehöriger Richtigkeit erhalten werden. Wollte man, z. B., den Inhalt des einzelnen Theiles so berechnen, daß $\frac{1}{10}$ Ruthe nicht geachtet würde, so würde hieraus bei'm 40fachen Theile schon ein Fehler von 4 Ruthen entstehen und die Arbeit müßte sehr unrichtig ausfallen.

Da man nun den Flächengehalt eines jeden Trapezes oder Dreiecks kennt, so sieht man gleich, in welche Figur die erste Theilungslinie fällt. Gesetzt, sie fiele in das Dreieck I, so ist davon durch die Linie ab (die mit XZ parallel ist) von K aus so viel abzuschneiden, als der erste Theil beträgt, was nach §. 157 und 159 geschehen kann.

Nun vergleicht man auf gleiche Weise die Summe des ersten und zweiten Theiles mit den Dreiecken und Trapezen I, II, u. s. w. Gesetzt, sie sei immer noch

kleiner, als das Dreieck I, so ist von demselben durch die Linie cd ein ihr gleiches Stück abzuschneiden.

Dann vergleicht man die Summe des ersten, zweiten und dritten Theiles mit den Figuren I, II, III, u. s. w. Man finde sie, z. B., größer, als das Dreieck I, auch größer, als dieses Dreieck und das Trapez II zusammen, aber kleiner, als die Figuren I, II und III zusammen, so fällt die dritte Theilungslinie in das Trapez III. Man ziehe die Summe der Figuren I und II von der Summe der drei ersten Theile ab, so bleibt das Stück übrig, welches vom Trapez III durch die Linie ef abgeschnitten werden muß.

So verfährt man bis zu Ende und nimmt dabei wohl in Acht, daß das Abschneiden immer nur von den Linien aus vollbracht wird, wodurch das ganze Stück in Dreiecke und Trapeze zerlegt wurde. Nie soll man einen Abschnitt von einer der schon gezogenen Theilungslinien aus bestimmen, damit das Anhäufen der Fehler vermieden werde. So könnte man, z. B., die Theilungslinie cd wohl von der ab aus bestimmen, indem man vom Trapez abNM den Flächengehalt des zweiten Theiles abschnitte, allein dieses muß vermieden und daher die Theilungslinie cd entweder von MN oder von K aus bestimmt werden.

Indem nun die mit XZ parallelen Theilungslinien gezogen werden, ergeben sich die Durchschnitte m, n, l, u. s. w., auf den Linien IH, u. s. w., welche zum Uebertragen der Theilung vom Papiere auf's Feld dienen sollen. Man braucht also nur die Abstände Im, In, Il, u. s. w. vom Risse abzunehmen, in ein Brouillon zu tragen und hernach dieselben Abmessungen, mit der Kette von I nach H messend, auf dem Grundstücke durch Pfähle bezeichnen zu lassen.

§. 161.

Die im vorigen §. angegebene Theilungsmethode, die nicht selten angewendet wird, gründet sich also auf die Voraussetzung, daß die Theilungslinien ungebrochene parallele Linien sein sollen. Diese Voraussetzung kann jedoch nicht immer zugelassen werden, weil man vorzüglich darauf zu sehen hat, daß jeder Besitzer ein Grundstück von gleich bequemer Lage erhalte. Man macht also

Denn es ist $AQ^2 = PQ^2 - AP^2$
d. i. $AQ^2 = AB^2 - AP^2$.

Aber $AP^2 = AG \times AM = (a-b)\,L = (a-b)\,(a+b)\,\frac{q}{Q}$,

und $AB^2 = a^2$, daher

$$AQ^2 = a^2 - (a-b)\,(a+b)\,\frac{q}{Q} = y^2.$$

Folglich ist AQ die Länge der Theilungslinie und es ist EF = AQ richtig in das Trapez eingetragen.

2) Wenn der Abschnitt von der kleineren Seite CD aus gerechnet wird. (Taf. XIII., Fig. 6.)

Man bestimmt die Linie L auf gleiche Weise, wie vorher, macht DM = L, verlängert CD durch D und zieht AR mit CB parallel. Beschreibt man dann über MR einen Halbkreis und errichtet in D auf MR das Perpendikel DP bis zum Durchschnitte mit dem Halbkreise, so ist CP die Länge der Theilungslinie. Macht man also CT = CP, zieht TE mit CB und EF mit CT parallel, so ist EF = CT = CP, und CDEF der verlangte Abschnitt.

Denn es ist $CP^2 = CD^2 + DP^2$,
aber $CD^2 = b^2$, $DP^2 = MD \times DR = (a-b)\,L =$

$$(a-b)\,(a+b)\,\frac{q}{Q},$$

folglich $CP^2 = b^2 + (a-b)\,(a+b)\,\frac{q}{Q} = y^2$,

folglich ist CP die Länge der Theilungslinie.

§. 159.

Aufgabe. Die Aufgabe des §. 158 versuchsweise aufzulösen.

Auflösung. Ein geübter Geometer weiß schon ziemlich genau, wohin die Theilungslinie EF (Taf. XIII., Fig. 13) fallen muß. Man notire sich daher eine Linie ef, welche der wahren Theilungslinie EF so nahe liegt, als man es nach dem Augenmaße treffen kann, und messe die zwischen den Parallelen ef und AB in der Mitte liegende e′f′. Mit dieser Linie e′f′ dividire man in den Inhalt des abzuschneidenden Stückes q, so findet man dessen Höhe Nl′, die aber noch um Einiges fehlerhaft ist. In dem so berechneten Abstande Nl′ zieht man die e″f″

mit AB parallel und berechnet genau den Inhalt des Trapezes ABf″e″, so findet man das Stück e″f″FE, um welches das Trapez ABf″e″ größer oder kleiner ist, als das abzuschneidende q. In den nun bekannten Inhalt des Trapezes e″f″FE dividire man mit der Parallele e″f″, so erhält man die Höhe I′I dieses Trapezes. Dieses Stück I′I wird endlich zu dem schon gefundenen Theile I′N der gesuchten Höhe addirt oder davon subtrahirt, je nachdem nämlich das Trapez ABf″e″ kleiner oder größer als das abzuschneidende gefunden wurde. Das Resultat giebt die wahre Höhe des Trapezes sehr genau an. Diese faßt man zwischen den Zirkel, setzt den einen Fuß auf AB in N und beschreibt den kleinen Bogen mn, an welchen man die Berührungslinie EF mit AB parallel zu ziehen hat, um die gesuchte Theilungslinie zu erhalten.

Zuletzt berechnet man das Stück ABFE nochmals, um zu erfahren, ob es den verlangten Inhalt hat; wo nicht, so wird die vorige Correction noch einmal wiederholt.

Es versteht sich, daß keine Linie, außer EF, ausgezogen zu werden braucht.

Auch bleibt das Verfahren ganz dasselbe, man mag den Abschnitt von der größeren oder kleineren Parallele aus rechnen.

§. 160.

Aufgabe. Jedwede Figur auf dem Felde durch Parallelen in so viel Theile zu theilen, als man verlangt.

Auflösung. Man bringt die Figur erst zu Papiere, und zwar nach einem Maßstabe, der so groß als möglich ist, weil in solchen Fällen gewöhnlich viele Theile gefordert werden und daher oft sehr kleine Parzellen entstehen, bei denen man eine sehr große Genauigkeit verlangt. Deßhalb ist auch die größte Sorgsamkeit bei der Aufnahme nöthig.

Bei der Aufnahme werden zugleich solche Puncte, A, B, C, D, E, F, H, I (Taf. XIII., Fig. 4) mit aufgenommen, zwischen welchen sich Linien ziehen lassen, auf denen man die Theilungspuncte bequem abstecken kann. Gerade diese Linien müssen ihrer Länge und Lage nach mit der äußersten Genauigkeit bestimmt werden, weil

hiervon das Zusammentreffen des auf dem Papiere gemachten Entwurfs mit der Wirklichkeit ganz besonders abhängt; auch müssen jene Puncte gut markirt werden, damit man sie nachher wieder finden könne.

Hat man nun Alles zu Papiere gebracht, so bestimmt man die Linie **XZ**, mit welcher die Theilungslinien parallel laufen sollen, so, wie sie zu dieser Absicht am geeignetsten scheint.

Mit dieser Linie **XZ** zieht man dann Parallelen durch alle Winkelpuncte der Figur, so daß diese in lauter Trapeze (und resp. Dreiecke) zerlegt wird. Jedes Dreieck und Trapez wird so genau, als möglich, berechnet und sein Inhalt angemerkt; auch addirt man sämmtliche, um den Inhalt der ganzen Figur zu erfahren.

Den Gesammtinhalt der Figur dividirt man durch die Anzahl der Theile, wo dann der Quotient die Größe eines Theiles angiebt. Gesetzt, die ganze Figur halte 973 □Ruthen, und es werden 60 Theile verlangt, so kommen auf jeden Theil 16,2167 □Ruthen. Dieß setzt voraus, daß alle Theile gleich sind; sind sie ungleich, so wird der Gesammtinhalt nach dem Verhältnisse der Theile repartirt.

Man multiplicirt dann den Inhalt des Theiles mit 2, 3, 4, u. s. w., oder allgemeiner, man sucht die Summe des ersten und zweiten, dann die des ersten, zweiten und dritten Theiles, u. s. w. Es wird daher nöthig, den Inhalt des einzelnen Theiles bis auf sehr kleine Bruchtheile zu berechnen, damit die Vielfachen mit gehöriger Richtigkeit erhalten werden. Wollte man, z. B., den Inhalt des einzelnen Theiles so berechnen, daß $\frac{1}{10}$ Ruthe nicht geachtet würde, so würde hieraus bei'm 40fachen Theile schon ein Fehler von 4 Ruthen entstehen und die Arbeit müßte sehr unrichtig ausfallen.

Da man nun den Flächengehalt eines jeden Trapezes oder Dreiecks kennt, so sieht man gleich, in welche Figur die erste Theilungslinie fällt. Gesetzt, sie fiele in das Dreieck **I**, so ist davon durch die Linie **ab** (die mit **XZ** parallel ist) von **K** aus so viel abzuschneiden, als der erste Theil beträgt, was nach §. 157 und 159 geschehen kann.

Nun vergleicht man auf gleiche Weise die Summe des ersten und zweiten Theiles mit den Dreiecken und Trapezen **I**, **II**, u. s. w. Gesetzt, sie sei immer noch

kleiner, als das Dreieck I, so ist von demselben durch die Linie cd ein ihr gleiches Stück abzuschneiden.

Dann vergleicht man die Summe des ersten, zweiten und dritten Theiles mit den Figuren I, II, III, u. s. w. Man finde sie, z. B., größer, als das Dreieck I, auch größer, als dieses Dreieck und das Trapez II zusammen, aber kleiner, als die Figuren I, II und III zusammen, so fällt die dritte Theilungslinie in das Trapez III. Man ziehe die Summe der Figuren I und II von der Summe der drei ersten Theile ab, so bleibt das Stück übrig, welches vom Trapez III durch die Linie ef abgeschnitten werden muß.

So verfährt man bis zu Ende und nimmt dabei wohl in Acht, daß das Abschneiden immer nur von den Linien aus vollbracht wird, wodurch das ganze Stück in Dreiecke und Trapeze zerlegt wurde. Nie soll man einen Abschnitt von einer der schon gezogenen Theilungslinien aus bestimmen, damit das Anhäufen der Fehler vermieden werde. So könnte man, z. B., die Theilungslinie cd wohl von der ab aus bestimmen, indem man vom Trapez abNM den Flächengehalt des zweiten Theiles abschnitte, allein dieses muß vermieden und daher die Theilungslinie cd entweder von MN oder von K aus bestimmt werden.

Indem nun die mit XZ parallelen Theilungslinien gezogen werden, ergeben sich die Durchschnitte m, n, l, u. s. w., auf den Linien IH, u. s. w., welche zum Uebertragen der Theilung vom Papiere auf's Feld dienen sollen. Man braucht also nur die Abstände Im, In, Il, u. s. w. vom Risse abzunehmen, in ein Brouillon zu tragen und hernach dieselben Abmessungen, mit der Kette von I nach H messend, auf dem Grundstücke durch Pfähle bezeichnen zu lassen.

§. 161.

Die im vorigen §. angegebene Theilungsmethode, die nicht selten angewendet wird, gründet sich also auf die Voraussetzung, daß die Theilungslinien ungebrochene parallele Linien sein sollen. Diese Voraussetzung kann jedoch nicht immer zugelassen werden, weil man vorzüglich darauf zu sehen hat, daß jeder Besitzer ein Grundstück von gleich bequemer Lage erhalte. Man macht also

die Bedingung, daß die einzelnen Theile sowohl unter sich, als auch dem ganzen Feldgrundstücke ähneln sollen, und unter dieser Bedingung können oft die Theilungslinien weder ungebrochen, noch parallel sein. Wir wollen nun einige hierher gehörige Aufgaben näher erläutern, um dem Feldmesser zu zeigen, wie er in ähnlichen Fällen ungefähr zu verfahren habe.

§. 162.

Aufgabe. Von dem langen Stücke Acker **ABCD** (Taf. **XIII.**, Fig. 15) soll der Länge nach ein gewisser Theil **BE'F'C** abgeschnitten werden.

Auflösung. Die vorzüglichste Bedingung hierbei ist diese, daß der abzuschneidende Theil eben die Biegungen erhalte, wie das ganze Stück. Man ziehe also da, wo die langen Seiten der Figur Winkel bilden, durch die Winkelpuncte gerade Linien, die, soviel als möglich, auf den langen Seiten der Figur senkrecht stehen und daher auch nahe unter sich parallel sind, wie ungefähr aus der Zeichnung hervorgeht. Oft wird dieser Zweck schon dadurch erreicht, daß man gegenüberliegende Winkelpuncte, wie **M** und **N**, verbindet.

Gesetzt nun, es sei der Inhalt des ganzen Stückes **Q**, der des verlangten Abschnittes = q, so theile man alle die Linien **BT**, **MN**, u. s. w., bis **DC** in dem Verhältnisse q : Q, nämlich $Bf = BT \times \frac{q}{Q}$, u. s. w. Auf diese Weise erhält man die Puncte f, a, b, u. s. w. bis g, und wenn man dieselben verbindet und dabei af bis **E** und eg bis **F** verlängert, so hat das Stück **EBCF** nabe den verlangten Inhalt q und ist dem noch übrigen Stück und dem Ganzen insofern ähnlich, als es eben die Biegungen hat und ebenso sich nach der einen Seite zuspitzt.

Man berechne nun den Inhalt des abgeschnittenen Stückes **BEFC** und vergleiche ihn mit dem, den es haben sollte, so findet man, um wieviel es noch zu klein, oder zu groß ist.

In den fehlenden oder überschüssigen Flächengehalt dividire man mit der Summe der Linien **Ef**, **fa**, u. s. w., bis **eF**, d. h., mit der ganzen gebrochenen Linie **EF**, so findet man die Breite des noch zu **BEFC** hinzuzufü-

genden, oder davon wegzunehmenden Stückchens, das in der Figur mit E'EFF' angedeutet ist. In dieser Breite hat man also die gebrochene E'F' zu EF parallel zu ziehen.

Man weiß also nunmehr die Linien Bf', Na', u. s. w., bis Cg', und kann daher die Theilung leicht auf das Feld übertragen. — Wenn eine sehr große Richtigkeit erhalten werden sollte, so würde, außer einem großen Maßstabe für den zu entwerfenden Riß, auch nöthig sein, die Puncte T, Q, R, durch welche die bei der Theilung erforderlichen Hülfslinien gezogen werden sollen, und die keine Winkelpuncte der Figur sind, vorher auf dem Felde zu bestimmen und sie mit aufzunehmen, zugleich aber auch alle die Querlinien BT, NM, u. s. w., wirklich zu messen, um dann die Abschnitte Bf, Na, u. s. w., so wie ihre Correctionen ff' aa', u. s. w., desto genauer berechnen zu können.

Doch reicht es für fast alle Zwecke hin, wenn man nur die Figur nach einem nicht zu kleinen Maßstabe entwirft.

Wie zu verfahren ist, wenn mehrere Theile gefordert werden, bedarf keiner weiteren Erörterung.

§. 163.

Aufgabe. Die unregelmäßige Figur ABCD (Taf. XIII., Fig. 16) in beliebig viele gleiche oder ungleiche Theile so zu theilen, daß die Theile möglichst ähnlich werden.

Auflösung. Weil hier die Grenzen AB und CD gebrochene Linien sind, so ziehe man die geraden DC und MB, um nur erst die Theilung vorläufig und ungefähr bewirken zu können. Diese vorläufige und ungefähre Theilung geschieht dadurch, daß man DC und MB nach eben dem Verhältnisse theilt, nach welchem die Fläche des Grundstückes getheilt werden soll, und durch die Theilpuncte die geraden Linien ad, be, cf zieht, wodurch die Theile I, II, III und IV erhalten werden.

Diese Theile sind aber keineswegs untereinander gleich, sondern bedürfen oft noch bedeutender Correctionen. Man berechne also die Fläche des Theiles I und vergleiche sie mit der, welche dieser Theil haben soll, so ergiebt sich, wieviel daran fehlt oder darüber ist. Den Fehler gleicht

man (nach §. 158 und 159) durch eine neue Theilungslinie c'f' aus, die mit cf parallel gezogen wird, so daß das Trapez cc'f'f dem Ueberschusse oder Mangel gleich wird.

Man berechnet hierauf die Theile I und II zusammengenommen und ermittelt die Abweichung von der wirklichen Summe der Theile I und II, worauf dann durch eine, mit be parallel zu ziehende Linie die Berichtigung, wie vorhin, vollzogen wird.

Anmerkung. Mitunter wird es nothwendig, daß die Theilungslinien auf eine bestimmte Grenze des Feldstückes stoßen, wie, z. B., in gegenwärtiger Fig. 16 auf DC, weil hier, wenn man die Theilungslinien auf AD und CB stoßen lassen wollte, die beiden am Ende gelegenen Grundstücke eine für die Bearbeitung mit dem Pfluge sehr ungeschickte Form erhalten würden. Aber auch andere Gründe können hier entscheiden. Wäre, z. B., DC das Ufer eines Flusses, welches durch das Wasser öfteren Beschädigungen ausgesetzt wäre und mancherlei Uferbauten erheischte, so ist es billig, daß die Besitzer der Feldlage gleichen oder vielmehr solchen Schaden und Aufwand zu tragen haben, der ihrem Antheile proportional ist. Es muß daher so getheilt werden, daß nicht nur die Theilungslinien auf das Ufer stoßen, sondern auch jeder Theil eine solche Strecke zur Grenze des Ufers erhält, die seiner Größe proportional ist. — Durch das oben angezeigte Verfahren wird dieser Bedingung meistens hinlänglich genügt.

§. 164.

Aufgabe. Eine Figur in beliebig viele gleiche oder ungleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien in einem Puncte innerhalb der Figur zusammenlaufen.

Auflösung. Von dem Puncte K (Taf. XIII., Fig. 7), in welchem die Theilungslinien zusammenlaufen sollen, ziehe man nach allen Winkelpuncten der Figur gerade Linien, so daß diese in lauter Dreiecke, I, II, III, u. s. w., zerlegt wird. Man berechne und bemerke den Inhalt eines jeden Dreiecks, addire auch sämmtliche Dreiecke, um sowohl den Inhalt der ganzen Figur zu erfahren, als auch, wie viel auf jeden Antheil kommt.

Man nehme eine beliebige von den aus K gezogenen Linien, etwa KA, als erste Theilungslinie an, um von ihr aus die übrigen zu bestimmen. Hierauf vergleiche man den ersten Theil mit den Dreiecken I, II, u. s. w., so ergiebt sich, in welches Dreieck die folgende Theilungslinie fallen muß. Es sei der erste Theil, z. B., größer, als das Dreieck I, aber kleiner, als die Dreiecke I und II zusammen, so fällt eine Theilungslinie in das Dreieck II. Man ziehe daher das Dreieck I vom ersten Theile ab, so bleibt der Inhalt des Dreiecks BKb übrig, welches vom Dreiecke II abzuschneiden und zum Dreiecke I hinzuzurechnen ist. — Das Abschneiden des Dreiecks BKb geschieht am besten dadurch, daß man, nach §. 155, III, den Abschnitt bB berechnet und sodann Kb zieht.

Man vergleicht ferner die Summe des ersten und zweiten Theiles mit den Dreiecken I, II, III, u. s. w., um zu finden, in welches Dreieck die dritte Theilungslinie fällt, u. s. w.

Zusatz. Gerade so verfährt man auch, wenn die Theilungslinien in einem Puncte zusammenlaufen sollen, der im Umfange der Figur liegt, wie die Fig. 17 (Taf. XIII.) ohne Weiteres deutlich macht.

§. 165.

Aufgabe. Innerhalb eines Feldes befindet sich ein Teich; man soll dasselbe so theilen, daß die Theilungslinien sämmtlich auf das Ufer des Teiches stoßen (Fig. 11, Taf. XIII.).

Auflösung. Innerhalb des Teiches nehme man einen zu dieser Absicht bequemen Punct K an und ziehe von ihm aus nach allen Winkelpuncten der Figur die geraden Linien KA, KB, KE, u. s. w., wodurch man die Dreiecke KAB, KBE, u. s. w., erhält.

Man berechne den Inhalt eines jeden dieser Dreiecke, nebst dem an seiner Spitze gelegenen dreieckförmigen Theile des Teiches, wie Kab; man ziehe dann von jedem Dreiecke den an der Spitze gelegenen Theil ab, so bleiben die trapezförmigen Flächenstücke aABb, u. s. w., übrig, die in der Figur mit I, II, III, u. s. w. bezeichnet sind und deren Summe die ganze zu vertheilende Fläche ausmacht. Diese repartire man gehörig, um zu erfahren, was auf jeden einzelnen Theil kommt.

Man nehme nun eine der aus K gezogenen Linien, etwa KA, als erste Theilungslinie an, um von ihr aus die übrigen zu bestimmen. Indem man dann den ersten Theil mit den Figuren I, II, III, u. s. w., auf die schon oft angegebene Weise vergleicht, findet man, in welche Figur die folgende Theilungslinie fällt. Gesetzt, sie fiele in die Figur I, daß also diese Figur größer wäre, als der erste Theil, so hätte man von ihr ein dem Ueberschusse gleiches Stück abzuschneiden. Dieses kann, weil keine bestimmte Richtung der Theilungslinien vorgeschrieben ist, dadurch geschehen, daß man die Theilungslinie bC durch den Punct b gehen läßt und also das Dreieck bCB dem gedachten Ueberschusse gleich macht, was, nach §. 155, leicht geschehen kann.

Nachdem vergleicht man die Summe des ersten und zweiten, dann die Summe des ersten, zweiten und dritten Theiles, mit den Figuren I, II, u. s. w., um die folgenden Theilungslinien auf gleiche Weise zu bestimmen, wie die erste.

Allein auf diese Weise könnten manche Theile eine sehr ungeschickte und für den Besitzer äußerst unbequeme Figur erhalten, wie wenn, z. B., die Theilungslinie die Lage bN erhielte und somit das Grundstück vorn schmäler, als hinten würde; oder wenn die Theilungslinie, wie bL, gar zum Theil in das Dreieck IX zu liegen käme, in welchem Falle das Grundstück die Form baM erhalten und der Eigenthümer nicht zu demselben gelangen würde, ohne über das eines Anderen zu gehen.

Diesem Uebelstande könnte man dadurch vorbeugen, daß man aus K nach dem Umfange der Figur, außer den schon gedachten, auch noch andere Linien zöge, wie Km, Kn, u. s. w., wodurch man eine der Größe der Theile angemessenere Menge von Figuren erhalten würde, so daß die Theilungslinien nicht so bedeutend von den aus K gezogenen Linien abweichen könnten. Um indessen das Ziehen so vieler Linien, welches nur nachtheilig auf die Richtigkeit der Arbeit wirken kann, zu vermeiden, kann man so verfahren:

Gesetzt, eine Theilungslinie fiele in die Figur III, so kennt man den Inhalt q des trapezförmigen Theiles, der von der Figur III von KE aus abzuschneiden ist. Ein geschickter Geometer wird nun leicht ein Lineal in K

so anlegen können, daß die Figur HgGE den verlangten Inhalt q ungefähr bekommt; er ist auch im Stande, den an der Spitze K des Dreiecks EGK gelegenen Theil des Teiches KHg (der nicht mit zur zu vertheilenden Fläche gerechnet wird) ziemlich genau zu schätzen; man habe ihn = r geschätzt, so ist das Dreieck EGK = q + r. Da man nun auch das Dreieck EFK kennt, sowie auch die Linie EF, so schließe man nach folgender Proportion:

Der Inhalt des Dreiecks EFK verhält sich zu dem Dreiecke EGK, d. h. zu q + r, wie EF zu EG, aus welcher Proportion man EG berechnen kann, wodurch man in den Stand gesetzt wird, die Linie KG zu ziehen.

Die Figur HEGg wird dann den geforderten Inhalt q bis auf einen sehr kleinen Unterschied, welcher sich durch wirkliches Nachrechnen ermitteln läßt, genau darstellen. Man dividire daher mit der Länge gG in jenen Unterschied, so erhält man die Breite eines Trapezchens, das noch zu HEGg hinzuzuthun, oder davon wegzunehmen ist, je nachdem diese Figur zu klein oder zu groß befunden wurde. Zieht man daher in der berechneten Breite die g' G' mit gG parallel, so ist g' G' die gesuchte Theilungslinie.

§. 166.

Aufgabe. Die Besitzer zweier angrenzenden Grundstücke haben eine sehr unordentliche Grenze AC (Taf. XIII., Fig. 14); man soll statt derselben eine einzige gerade Linie AB ziehen, jedoch so, daß diese neue Grenze mit der alten den Punct A im Umfange der Figur gemein habe.

Auflösung. Man durchschneide die alte Grenze durch die gerade Linie AB so, daß ungefähr ein ebenso großes Stück von dem Felde M zu N kommt, als von N herüber zu M fällt. Auf die Linie AB fälle man von den Winkelpuncten der unregelmäßigen Grenze Perpendikel, so daß die Dreiecke und Trapeze 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 entstehen, deren Inhalt genau ermittelt wird. Man findet hierdurch, wieviel Fläche M von N durch die Linie AB bekommt, und zugleich auch, wieviel M an N verliert. Es bekommt nämlich M die Figuren 1, 2, 3 und 9 und verliert dagegen 4, 5, 6, 7, 8. Da nun das Gewonnene

und Verlorene bei jedem Besitzer gleich sein muß, so ergiebt sich leicht, wie viel M etwa noch zu bekommen habe, oder wie viel ihm zu nehmen sei, und die Ausgleichung kann durch ein Dreieck A B B' bewirkt werden, indem man, nach §. 155, die Linie A B' so zieht, daß das Dreieck A B B' dem, was M noch zu bekommen oder zu verlieren hat, gleich wird.

Zusatz. Man könnte diese Aufgabe durch bloße Construction, ohne Beihülfe aller Rechnung, auflösen, allein das Verfahren wird bei einer sehr unregelmäßigen und oft gebrochenen Grenze äußerst mühsam und, wegen der vielen zu ziehenden Linien, auch ungenau. Es sei, z. B., A B C D (Taf. XIII., Fig. 8) die zu regulirende Grenze, so ziehe man B D, dann C E parallel mit B D und endlich B E, so ist B E die Linie, die statt der beiden B C und C D gesetzt werden kann.

Denn da die Dreiecke B C D und B E D gleiche Grundlinie, B D, und (wegen des Parallelismus von B D und E C) auch gleiche Höhe haben, so sind sie gleich, und wenn man von jedem das Dreieck B G D wegnimmt, so folgt, daß auch die Dreiecke B C G und D G E gleich sind. Indem man also statt der beiden Grenzlinien B C und C D die einzige B E zieht, so verliert jedes Grundstück eine eben so große Fläche, als es gewinnt.

Man ziehe hierauf A E und B F mit A E parallel, so ist A F die Linie, die statt der Grenzen A B und B E, folglich auch statt der gebrochenen Linie A B C D, gesetzt werden muß.

Wäre außer A B noch eine Grenzlinie vorhanden, so würde man dieselbe abermals mit A F zu einer einzigen verschmelzen u. s. w.

§. 167.

Aufgabe. Ein Feld mit Rücksicht auf verschiedene Bonität zu theilen.

Erläuterung und Auflösung. Unter Bonität versteht man die Güte eines Bodens, hinsichtlich seines Fruchtertrages, mit Rücksicht auf die darauf verwendeten Culturkosten, also hinsichtlich seines Reinertrages. Die Ausmittelung der Bonität eines Grundstücks ist ein Geschäft der Oeconomiewissenschaft und kann da-

her hier nicht gelehrt werden; es reicht hin, zu bemerken, daß das Verhältniß der Bonitäten zweier Flächen durch ein Zahlenverhältniß ausgedrückt zu werden pflegt. Verhalten sich, z. B., die Bonitäten zweier Grundstücke wie 3 : 5, so bedeutet dieses, daß bei gleicher Flächengröße das zweite Grundstück $\frac{5}{3}$ Mal so viel Reinertrag liefert, und also auch den $\frac{5}{3}$fachen Werth hat, als das erste.

Behufs der Theilung mit Rücksicht auf die Bonität nimmt man an, und es ist auch richtig, daß die geringere Bonität durch eine verhältnißmäßig größere Fläche ersetzt werden könne. Verhalten sich, z. B., die Bonitäten zweier Bodenarten wie 1 : 2, so nimmt man an, daß eine gewisse Fläche der zweiten Art mit einer doppelt so großen Fläche der ersten Art gleichgeltend sei, daß man also, z. B., auf jede Quadratruthe der zweiten Art 2 Ruthen der ersten Art zu rechnen habe. Oder, wenn sich die Bonitäten wie 3 : 5 verhalten, so sind 5 □Ruthen der schlechtern Art mit 3 □Ruthen der besseren Art gleichgeltend.

Sind nun allgemein a, b, c u. s. w. die Bonitätszahlen mehrer Grundstücke, deren Flächen **A**, **B**, **C** u. s. w. sein mögen, so denken wir uns, der bequemeren Vergleichung halber, ein Grundstück, dessen Bonitätszahl die Eins ist; wir können dann die Fläche **A** von der Bonität **a** als eine Fläche a **A** von der Bonität 1 ansehen, weil offenbar 1 Ruthe Flächengehalt von der Bonität a einer Fläche von a Ruthen von der Bonität 1 gleichgeltend ist. Eben so ist die Fläche **B** von der Bonität b einer Fläche b **B**, und die Fläche **C** von der Bonität c einer Fläche c **C** von der Bonität 1 gleich. Mithin ist die Summe der drei Flächen **A**, **B**, **C**, deren Bonitäten beziehungsweise a, b, c sind, einer Fläche a**A** + b**B** + c**C** von der Bonität 1 gleich.

Dieses vorausgeschickt, wollen wir nun die Theilung mit Rücksicht auf Bonität an einem einfachen Beispiele zeigen, woraus man leicht abnehmen wird, wie in allen übrigen Fällen zu verfahren ist. Es sei also **ABCDE** (Taf. **XIII**., Fig. 5) ein Feld, das durch die Linie **MN** in zwei Theile von verschiedener Bonität zerfällt. Der Theil **ANME** halte 342 □Ruthen und der Theil **NBCM** 274 □Ruthen, die Bonitäten beider Flächen verhalten sich aber wie 2 : 3. Demnach

und Verlorene bei jedem Besitzer gleich sein muß, so ergiebt sich leicht, wie viel M etwa noch zu bekommen habe, oder wie viel ihm zu nehmen sei, und die Ausgleichung kann durch ein Dreieck A B B′ bewirkt werden, indem man, nach §. 155, die Linie A B′ so zieht, daß das Dreieck A B B′ dem, was M noch zu bekommen oder zu verlieren hat, gleich wird.

Zusatz. Man könnte diese Aufgabe durch bloße Construction, ohne Beihülfe aller Rechnung, auflösen, allein das Verfahren wird bei einer sehr unregelmäßigen und oft gebrochenen Grenze äußerst mühsam und, wegen der vielen zu ziehenden Linien, auch ungenau. Es sei, z. B., A B C D (Taf. XIII., Fig. 8) die zu regulirende Grenze, so ziehe man B D, dann C E parallel mit B D und endlich B E, so ist B E die Linie, die statt der beiden B C und C D gesetzt werden kann.

Denn da die Dreiecke B C D und B E D gleiche Grundlinie, B D, und (wegen des Parallelismus von B D und E C) auch gleiche Höhe haben, so sind sie gleich, und wenn man von jedem das Dreieck B G D wegnimmt, so folgt, daß auch die Dreiecke B C G und D G E gleich sind. Indem man also statt der beiden Grenzlinien B C und C D die einzige B E zieht, so verliert jedes Grundstück eine eben so große Fläche, als es gewinnt.

Man ziehe hierauf A E und B F mit A E parallel, so ist A F die Linie, die statt der Grenzen A B und B E, folglich auch statt der gebrochenen Linie A B C D, gesetzt werden muß.

Wäre außer A B noch eine Grenzlinie vorhanden, so würde man dieselbe abermals mit A F zu einer einzigen verschmelzen u. s. w.

§. 167.

Aufgabe. Ein Feld mit Rücksicht auf verschiedene Bonität zu theilen.

Erläuterung und Auflösung. Unter Bonität versteht man die Güte eines Bodens, hinsichtlich seines Fruchtertrages, mit Rücksicht auf die darauf verwendeten Culturkosten, also hinsichtlich seines Reinertrages. Die Ausmittelung der Bonität eines Grundstücks ist ein Geschäft der Oeconomiewissenschaft und kann da-

her hier nicht gelehrt werden; es reicht hin, zu bemerken, daß das Verhältniß der Bonitäten zweier Flächen durch ein Zahlenverhältniß ausgedrückt zu werden pflegt. Verhalten sich, z. B., die Bonitäten zweier Grundstücke wie 3 : 5, so bedeutet dieses, daß bei gleicher Flächengröße das zweite Grundstück $\frac{5}{3}$ Mal so viel Reinertrag liefert, und also auch den $\frac{5}{3}$fachen Werth hat, als das erste.

Behufs der Theilung mit Rücksicht auf die Bonität nimmt man an, und es ist auch richtig, daß die geringere Bonität durch eine *verhältnißmäßig* größere Fläche ersetzt werden könne. Verhalten sich, z. B., die Bonitäten zweier Bodenarten wie 1 : 2, so nimmt man an, daß eine gewisse Fläche der zweiten Art mit einer doppelt so großen Fläche der ersten Art gleichgeltend sei, daß man also, z. B., auf jede Quadratruthe der zweiten Art 2 Ruthen der ersten Art zu rechnen habe. Oder, wenn sich die Bonitäten wie 3 : 5 verhalten, so sind 5 □ Ruthen der schlechtern Art mit 3 □ Ruthen der besseren Art gleichgeltend.

Sind nun allgemein a, b, c u. s. w. die Bonitätszahlen mehrer Grundstücke, deren Flächen **A**, **B**, **C** u. s. w. sein mögen, so denken wir uns, der bequemeren Vergleichung halber, ein Grundstück, dessen Bonitätszahl die *Eins* ist; wir können dann die Fläche **A** von der Bonität **a** als eine Fläche a **A** von der Bonität 1 ansehen, weil offenbar 1 Ruthe Flächengehalt von der Bonität **a** einer Fläche von a Ruthen von der Bonität 1 gleichgeltend ist. Eben so ist die Fläche **B** von der Bonität b einer Fläche b **B**, und die Fläche **C** von der Bonität c einer Fläche c **C** von der Bonität 1 gleich. Mithin ist die Summe der drei Flächen A, B, C, deren Bonitäten beziehungsweise a, b, c sind, einer Fläche $aA + bB + cC$ von der Bonität 1 gleich.

Dieses vorausgeschickt, wollen wir nun die Theilung mit Rücksicht auf Bonität an einem einfachen Beispiele zeigen, woraus man leicht abnehmen wird, wie in allen übrigen Fällen zu verfahren ist. Es sei also **A B C D E** (Taf. **XIII.**, Fig. 5) ein Feld, das durch die Linie **M N** in zwei Theile von verschiedener Bonität zerfällt. Der Theil **A N M E** halte 342 □ Ruthen und der Theil **N B C M** 274 □ Ruthen, die Bonitäten beider Flächen verhalten sich aber wie 2 : 3. Demnach

ist, auf die Bonität 1 reducirt, der Theil A N M E = 342 × 2 = 684 □Ruthen, der Theil N B C M = 274 × 3 = 822 □Ruthen, folglich das ganze Grundstück 684 + 822 = 1506 □Ruthen. Gesetzt also, es solle dasselbe in zwei gleiche Theile getheilt werden, so kommen auf jeden Theil 753 □Ruthen von der Bonität 1.

Man ziehe nun eine Linie K L, von der man glaubt, daß sie beinahe die richtige Theilungslinie sein werde, berechne den wirklichen Flächengehalt jedes der Theile A N H K und N B L H, reducire jede Fläche auf die Bonität 1 und addire die reducirten Flächen. Hierdurch erfährt man, ob die Linie K L zu viel oder zu wenig abschneidet. Man finde, z. B., die wirklichen Flächen A N H K und B N H L 92 und 173 □Ruthen, so sind diese Flächen, auf die Bonität 1 reducirt, = 92 × 2 = 184 und = 173 × 3 = 519 □Ruthen, und mithin die ganze Fläche A B L K, auf die Bonität 1 reducirt, = 184 + 519 = 703 □Ruthen. Es ist demnach das Stück A B L K um 753 — 703 = 50 □Ruthen von der Bonität 1 zu klein.

Diese 50 □Ruthen müssen nun noch durch die Linie k l angesetzt werden, welche mit K L parallel gezogen wird. Dieses anzusetzende Trapez k K L l kann nnn näherungsweise als ein Parallelogramm angesehen und seine Höhe folgendermaßen berechnet werden. Man setze K H = a und H L = b und die Höhe des Parallelogramms k K L l = z, so ist die wahre Fläche des Parallelogramms K H h k = a z, also die auf die Bonität 1 reducirte = 2 a z; ferner ist die wahre Fläche des Parallelogramms H L l h = b z und die auf die Bonität 1 reducirte = 3 b z. Also die ganze auf die Bonität 1 reducirte Fläche K L l k = 2 a z + 3 b z = (2 a + 3 b) z, und dies sind die obigen noch anzusetzenden 50 Ruthen. Daher ist

$$(2a + 3b)\, z = 50$$

$$\text{und } z = \frac{50}{2a + 3b}.$$

Man kann hiernach, da a und b bekannt sind, die Höhe z berechnen und sodann die verbesserte Theilungslinie k l ziehen. Wäre, z. B., K H = 83′ = a, H L = 94′ = b, so hätte man, da 50 □R. = 5000 □F.,

$$z = \frac{5000}{2 \cdot 83 + 3 \cdot 94} = \frac{5000}{448} = 11{,}16 \text{ Fuß}.$$

Man wird sich nun nochmals durch Rechnung überzeugen, ob die Linie k l die richtige ist, und sie, falls sie fehlerhaft befunden würde, nochmals verbessern.

Man wird hieraus leicht das Verfahren auch in denjenigen Fällen abnehmen können, wenn ein Grundstück mehr als zweierlei Bonität hätte. Es giebt zwar für Aufgaben der Art auch streng theoretisch richtige Auflösungen, allein sie sind theils zu speciell, und daher nur in sehr seltenen Fällen anwendbar, theils führen sie überall auf zu verwickelte und practisch unbrauchbare Rechnungen. Die hier angezeigte Auflösuug durch Annäherung genügt in allen Fällen.

Eilftes Capitel.

Vom Nivelliren oder Wasserwägen.

§. 168.

Unter **Nivelliren** versteht man im Allgemeinen jede Operation, wodurch der Höhenunterschied zweier Oerter auf der Erdoberfläche bestimmt wird; in'sbesondere aber gebraucht man dieses Wort von derjenigen Operation, bei welcher Höhenunterschiede unmittelbar abgemessen werden. Diese unmittelbaren Abmessungen sind zwar, wenn sie auf bedeutende Strecken von Station zu Station wiederholt werden müssen, sehr mühsam und zeitraubend, gewähren aber doch weit größere Genauigkeit, als barometrische und trigonometrische Höhenbestimmungen, und werden daher allenthalben da in Ausübung gebracht, wo technische Anlagen, z. B., Mühlen- und Wehrbauten, Röhrenleitungen, Canäle, Bahnzüge und dergleichen, sehr genaue Abmessungen der Art nothwendig machen.

§. 169.

Die zum Nivelliren dienenden Instrumente sind im Allgemeinen so eingerichtet, daß man über einem beliebigen Puncte A (Taf. XIV., Fig. 1) der Erdoberfläche eine mit der Horizontalebene A E dieses Punctes parallele Linie C D bezeichnen und den Punct D bemerken kann, wo sie einen, in einem zweiten Orte B senkrecht aufgestellten Stab trifft. Die nähere Beschreibung dieser sogenannten Nivellirinstrumente geben wir nachher; jetzt wollen wir sogleich die beiden Verfahrungsarten auseinandersetzen, nach welchen man durch Anwendung dieser Instrumente den Höhenunterschied zweier Oerter ermittelt. Diese beiden Methoden sind:

1) Das Nivelliren aus dem Endpuncte einer Station. Es seien B und A (Taf. XIV., Fig. 1) die beiden Endpuncte der Station. Ueber dem einen B stelle man das Instrument auf und bestimme eine Horizontallinie D C, die nach der im anderen Endpuncte A senkrecht stehenden Latte (der Nivellirlatte) gerichtet ist. Mißt man alsdann die Abstände B D und A C über dem Boden (die Instrumenten- und die Lattenhöhe), so giebt ihr Unterschied B D — A C, d. i. B E (wenn man A E parallel mit C D zieht), sogleich den Höhenunterschied der Oerter B und A.

Wenn die Instrumentenhöhe B D größer ist, als die Lattenhöhe A C, so liegt der Punct A, wo die Latte steht, höher, als der andere B; man sagt dann, das Terrain steige von B nach A und nennt den Höhenunterschied beider Puncte eine Steigung. Wenn aber die Höhe des Instrumentes kleiner befunden wird, als der von der Horizontale abgeschnittene Theil der Latte, wie wenn man, z. B., das Instrument in A und die Latte in B aufgestellt denkt, so liegt der Punct B tiefer, als A und man nennt dann den Höhenunterschied beider ein Gefälle. Sind Instrumenten- und Lattenhöhe gleich, so sagt man, die Puncte A und B liegen in gleichem Niveau.

Es ist daher immer leicht, durch Vergleichung der Instrumenten- und Lattenhöhe zu beurtheilen, ob von dem Endpuncte der Station, über welchem das Instrument aufgestellt ist, ein Steigen oder ein Fallen des Terrains nach der Latte hin Statt findet. Machen wir

zum Gesetz, daß der Höhenunterschied immer durch Subtraction der Lattenhöhe l von der Instrumentenhöhe i gefunden werden soll, so wird dieser Unterschied i — l positiv, wenn i > l, negativ, wenn i < l ist; im ersten Falle drückt i — l eine Steigung, im zweiten ein Gefälle aus. Diese Norm wollen wir in der Folge immer beobachten.

2) Das Nivelliren aus der Mitte der Station. Nach dieser Methode, welche, wie wir später sehen werden, vor der ersten wesentliche Vorzüge besitzt, wird der Höhenunterschied zweier Oerter A und B (Taf. XIV., Fig. 2) auf folgende Weise ermittelt: Genau, oder auch nur beinahe in der Mitte der Station, wird bei K das Nivellirinstrument aufgestellt und mittelst desselben eine Horizontale D C nach den in A und B senkrecht aufgestellten Latten gerichtet. Hierdurch erfährt man, wie vorhin, die Höhen B D und A C, deren Unterschied B D — A C = B G die Steigung von B nach A, oder das Gefälle von A nach B giebt. Man begreift, daß hierbei K mit A und B nicht in gerader Linie zu liegen braucht.

3) Wenn man bei dem Nivelliren aus dem Endpuncte der Station das Instrument in beiden Endpuncten aufstellt und so eine doppelte Bestimmung des Höhenunterschiedes sucht, so ist dieses Verfahren nicht als ein besonderes anzusehen, indem das doppelte Aufstellen des Instrumentes nur zur Controle dient, nicht aber zur Bestimmung des Höhenunterschiedes absolut erfordert wird. Hat man nämlich in B (Taf. XIV., Fig. 1) die Instrumentenhöhe = i und in A die Lattenhöhe = l beobachtet, so ist der Höhenunterschied i — l. Beobachtet man zum zweiten Male in A die Instrumentenhöhe = i' und in B die Lattenhöhe = l', so ist der (positive) Höhenunterschied = l' — i'. Sind nun diese Unterschiede, aus Ursachen, die bei beiden Aufstellungen des Instrumentes auf gleiche Weise wirken, unrichtig, so giebt das arithmetische Mittel beider den wahren Höhenunterschied, wie wir in der Folge nachweisen werden.

Man bedient sich dieser Methode in der Regel nicht, sondern wendet dafür das in Nr. 2 erklärte Verfahren an, wodurch ebenfalls constante Fehler in der Bestimmung der Lattenhöhen aus dem gesuchten Höhenunterschiede eliminirt werden, aber die Abmessung der Instru-

mentenhöhen erspart wird. Nur wenn das Instrument nicht in der Mitte der Station aufgestellt werden kann, wie wenn, z. B., ein Sumpf oder ein Fluß überschritten werden muß, ist das Controliren durch Aufstellung in dem anderen Endpuncte der Station zweckmäßig.

§. 170.

Diese Abmessungen der Höhenunterschiede setzen aber voraus, daß die senkrecht aufgestellten Nivellirlatten unter sich eine parallele Richtung haben, eine Voraussetzung, die bei den meist nur kurzen Distanzen der nivellirten Stationspuncte vollkommen zulässig ist. Wenn indessen, wie wohl manchmal vorkommen kann, die Stationen eine beträchtliche Länge haben, so sind die Richtungen der Normallinien, und folglich auch die nach ihnen eingestellten Nivellirlatten, nicht mehr als parallel zu betrachten, indem sie am Mittelpuncte K der Erde (Tafel XIV., Fig. 26), die hier überall als eine vollkommene Kugel betrachtet wird, schon einen merklichen Winkel miteinander bilden. Die nach dem ersten Verfahren des § 169 gefundenen Höhenunterschiede bedürfen daher, wegen der sphärischen Gestalt der Erde, noch einer Verbesserung, die wir jetzt beschreiben wollen.

Der Ort B (Taf. XIV., Fig. 26) hat eigentlich nur dann mit dem Orte A einerlei Höhe, oder beide liegen nur dann in gleichem Niveau, wenn ihre Abstände KB und KA vom Erdmittelpuncte gleich sind, oder wenn B in eben die Kugelfläche fällt, die aus K mit dem Abstande KA des Ortes A vom Erdmittelpuncte beschrieben wird. Je nachdem aber B über oder unter diese Kugelfläche fällt, liegt dieser Punct höher oder tiefer, als A. So liegt, z. B., C höher, als A, weil KC größer, als KA ist, und der Höhenunterschied ist $KC - KA = BC$.

Um also zu beurtheilen, ob ein Ort C höher oder tiefer liegt, als ein anderer A, hat man nur durch den einen A aus dem Erdmittelpuncte K einen Kreis zu beschreiben, dessen Ebene zugleich durch den Ort C geht. Diesen Kreis nennt man nun eine w a h r e Horizontale des Ortes A, während die durch A gehende Berührungslinie DA oder jede andere mit ihr parallele ED′ die s c h e i n b a r e Horizontale des Ortes A heißt.

Begreiflich können unsere Nivellirinstrumente immer nur scheinbare Horizontallinien angeben, und um nun von dem Einflusse des Unterschiedes zwischen scheinbarer und wahrer Horizontallinie eine Vorstellung zu geben, denke man sich in A eine scheinbare Horizontale A D und mit ihr in der Höhe des Instrumentes eine Parallele E D' gezogen, welche die bei C senkrecht aufgestellte Nivellirlatte in D' trifft. Hier sieht man leicht, daß, wenn man den Höhenunterschied zwischen A und C durch den Unterschied der beobachteten Latten- und Instrumentenhöhe, C D' — A E, berechnen wollte, von A bis C sich ein Gefälle ergeben würde, während doch in der That eine Steigung Statt findet, da C um das Stück B C weiter vom Erdmittelpuncte absteht, als A.

Ueberhaupt leuchtet ein, daß durch die scheinbare Horizontale die Lattenhöhe immer zu groß gefunden wird; denn die Latte wird von der scheinbaren Horizontale E D' in dem Puncte D' getroffen und folglich auch C D' als Lattenhöhe genommen, während man doch vielmehr die Höhe der Latte nach dem Puncte F abmessen sollte, wo der aus K mit K E beschriebene Kreis sie trifft, weil alsdann der Unterschied zwischen der Höhe des Instrumentes A E und der der Latte C F den wahren Höhenunterschied B C zwischen A und C darstellt.

Von der beobachteten Lattenhöhe C D' haben wir also das Stück F D' abzuziehen, was wir aus der Stationslänge A B oder E F, die hier mit der Tangente E D' verwechselt werden kann, auf folgende Weise finden. Setzen wir die Länge der Station $ED' = \delta$, den Halbmesser $KE = KF = r$, und $FD' = v$, so ist $KD' = r + v$, und nach dem Satze des Pythagoras $(r + v)^2 = r^2 + \delta^2$, daher wenn $(r + v)^2$ aufgelös't wird: $2rv + v^2 = (2r + v)\,v = \delta^2$, woraus folgt $v = \frac{\delta^2}{2r + v}$. Weil aber v gegen r nur klein ist, so können wir im Nenner 2r statt 2r + v setzen, wodurch wir erhalten:

$$v = FD' = \frac{\delta^2}{2r}.$$

Wenn also die scheinbare Lattenhöhe l ist, so ist die wahre $= l - \frac{\delta^2}{2r}$. Nennen wir dann die Instrumen-

tenhöhe i, so ist der scheinbare Höhenunterschied i—l, der wahre dagegen $i - l + \frac{\delta^2}{2r}$. Wenn wir uns daher zum Gesetz machen, den scheinbaren Höhenunterschied immer durch Subtraction der Lattenhöhe von der Instrumentenhöhe zu finden, und wenn wir denselben mit H, den wahren Höhenunterschied aber mit H' bezeichnen, so haben wir:

$$H' = H + \frac{\delta^2}{2r}.$$

Man muß also immer zu dem beobachteten scheinbaren Höhenunterschiede die Größe $\frac{\delta^2}{2r}$ positiv addiren, mag jene nun positiv oder negativ sein, d. h. eine Steigung oder ein Gefälle bedeuten.

Die Größe $\frac{\delta^2}{2r}$ nennt man die Reduction auf den wahren Horizont. Wie man sieht, steht sie im quadratischen Verhältnisse der Stationslänge δ, und kann daher bei langen Stationen doch merklich werden, wenn sie auch bei kurzen Distanzen practisch unbedeutend ist. Aus folgender Tabelle kann man ihre Werthe bei verschiedenen Distanzen in altem Pariser Maß entnehmen.

Stationslänge δ.	Reduct. auf den w. Horizont $=\frac{\delta^2}{2r}$.	Stationslänge δ.	Reduct. auf den w. Horizont $=\frac{\delta^2}{2r}$.	Stationslänge δ.	Reduct. auf den w. Horizont $=\frac{\delta^2}{2r}$.
Tois.	Zoll.	Tois.	Zoll.	Tois.	Zoll.
10	0,001	130	0,162	250	0,597
20	0,004	140	0,187	260	0,646
30	0,009	150	0,215	270	0,697
40	0,016	160	0,245	280	0,749
50	0,024	170	0,276	290	0,804
60	0,034	180	0,310	300	0,860
70	0,047	190	0,345	350	1,171
80	0,061	200	0,382	400	1,529
90	0,077	210	0,422	450	1,936
100	0,096	220	0,463	500	2,390
110	0,116	230	0,506	550	2,891
120	0,138	240	0,551	600	3,441

Bei einer Stationslänge von 1 geographischen Meile beträgt die Reduction auf den wahren Horizont 110,046 Zoll.

§. 171.

1) Die Reduction auf den wahren Horizont ist, wie schon bemerkt wurde, nur da erforderlich, wo der Höhenunterschied zweier Puncte, nach dem in §. 169, Nro. 1 beschriebenen Verfahren gefunden wird. Wir wollen hierfür ein Paar Beispiele anführen.

Man hat bei einer Station von 400 Toisen Länge die Instrumentenhöhe $i=4'48'',3$, die Lattenhöhe $l=3'2'',7$ gefunden; wie groß ist der wahre Höhenunterschied beider Stationspuncte? — Hier ist zuerst der scheinbare Höhenunterschied $= i - l = + 1'5'',6$ Steigung, und die Reduction auf den wahren Horizont beträgt $1'',53$, daher der wahre Höhenunterschied $= 1'5'',6 + 1'',53 = 1'7'',13$ Steigung nach der Latte hin.

Man hat bei einer Distanz von 400 Toisen die Instrumentenhöhe $i = 4'8'',3$ und die Lattenhöhe $l=6'4'',2$ gefunden; wie groß ist der wahre Höhenunterschied beider Stationspuncte? Hier ist zuerst der scheinbare Höhenunterschied $= i - l = - 1'7'',9$, also, wenn die Reduction auf den wahren Horizont hinzukommt, der wahre Höhenunterschied $= - 1'7'',9 + 1'',53 = - 1'6'',37$, d. h., $1'6'',37$ Gefälle nach der Latte hin.

Man sieht hieraus, daß durch die Reduction auf den wahren Horizont eine scheinbare Steigung immer vergrößert, ein scheinbares Gefälle aber immer verkleinert wird. Man wird daher diese Reduction, wenn man Gefälle und Steigung nicht durch entgegengesetzte Vorzeichen ausdrücken will, zu einer Steigung addiren, von einem Gefälle aber abziehen müssen.

2) Wenn aus der Mitte der Station nivellirt wird, so fällt die Reduction auf den wahren Horizont weg, indem der Unterschied beider Lattenhöhen sogleich den gesuchten Höhenunterschied giebt. Ist nämlich in Taf. XIV., Fig. 2 die Instrumentenhöhe $KL = i$, die Lattenhöhe $BD = l$, die Lattenhöhe $AC = l'$, so ist, wenn wir die nach beiden Seiten hin gleich große Reduction auf den wahren Horizont $= d$ setzen, das wahre Gefälle von K nach $B = l - i - d$, die wahre Steigung von K nach $A = i - l' + d$, und die Summe beider Höhenunterschiede

$= (l - i - d) + (i - l' + d) = l - l'$ giebt den wahren Höhenunterschied zwischen A und B, welcher demnach dem Unterschiede $l - l'$ der beobachteten Lattenhöhe gleich ist.

3) Auch wenn, nach Nro. 3 (§. 169), der Höhenunterschied der Oerter A und B durch das arithmetische Mittel der an beiden Stationspuncten beobachteten Höhenunterschiede gefunden wird, fällt die Reduction auf den wahren Horizont weg. Hat man nämlich in A die Instrumentenhöhe $= i$, die Lattenhöhe $= l$ gefunden, und setzt man die Reduction auf den wahren Horizont $= d$, so ist das Gefälle von A nach $B = H = l - i - d$. Hat man ferner in B die Instrumentenhöhe $= i'$ und die Lattenhöhe $= l'$ beobachtet, so hat man, da die Reduction auf den wahren Horizont wieder ebenso groß ist, die Steigung von B nach $A = H = i' - l' + d$. Addirt man beide Werthe von H, so erhält man $2H = (l - i) + (i' - l')$, daher $H = \frac{(l - i) + (i' - l')}{2}$.

§. 172.

Eine zweite Ursache, warum solche Höhenunterschiede, die durch Beobachtung aus bloß einem Endpuncte der Station gefunden werden, noch einer Correction bedürfen, liegt in der sogenannten terrestrischen Strahlenbrechung, mit welcher es folgende Bewandtniß hat. Da die Luft in den höheren Gegenden immer dünner wird, so muß ein Lichtstrahl, welcher von einem hoch gelegenen Orte B (Taf. XIV., Fig. 4) nach dem tiefer liegenden A geht, nothwendig von der geraden Richtung abgelenkt werden, indem er bei jedem Uebergange aus einer dünneren Luftschicht in eine dichtere, nach dem in §. 33 aufgestellten Gesetz, eine Brechung erleidet. Um hiervon eine bestimmtere Vorstellung zu gewinnen, denke man sich die Atmosphäre durch Kugelflächen, die aus dem Erdmittelpuncte K beschrieben werden, in eine sehr große, eigentlich unendlich große Menge concentrischer Schichten von gleicher Dicke zerlegt. Die Dichte der in verschiedenen Schichten enthaltenen Luft wird zwar verschieden sein, da wir voraussetzen, daß sie von unten nach oben stetig abnehme; allein da jede Schicht nur eine verschwindende Dicke hat, so können wir die darin enthaltene Luft als durchaus gleich dicht ansehen. Ein von B ausgehender

Strahl erleidet also in der obersten Schicht keine Brechung; aber wenn er bei **a** in die etwas dichtere angrenzende Schicht tritt, wird er ein Wenig von der vorigen Richtung **Ba** abgebogen, und wenn wir das Einfallsloth **Ka** ziehen, so wissen wir, daß der Brechungswinkel **caK** kleiner ist, als der Einfallswinkel **baB**, da der Lichtstrahl bei b in ein dichteres Mittel übergeht. Eine gleiche Brechung findet auch bei'm Uebergange in jede andere Schicht statt, und der Weg des Lichtstrahles ist daher eine aus unendlich vielen und unendlich kleinen geraden Linien stetig zusammengesetzte, d. h., eine krumme Linie **BA**, die, wie man leicht sieht, ihre hohle Seite gegen die Erdoberfläche kehrt. Wir sehen aber den Gegenstand **B** in der Richtung, in welcher der von ihm ausgegangene Strahl bei **A** in's Auge gelangt, also in der Richtung der bei **A** an die krumme Bahn des Strahles gezogenen Berührungslinie **AB'**, und hieraus folgt unmittelbar, daß durch die Refraction die Gegenstände höher erscheinen, als es in der That der Fall ist. Ziehen wir von **A** nach **B** die **AB**, so ist **BAB'** derjenige Winkel, um welchen der Gegenstand **B** höher gesehen wird und welchen man schlechtweg die Refraction zu nennen pflegt.

Es kommt nun darauf an, die Größe der Refraction oder den Winkel **BAB'** zu bestimmen. Hier zeigt aber die Theorie *), und die Erfahrung **) bestätigt es, daß die Refraction ein constanter Theil des Winkels **AKB** ist,

---

*) Man setze die Brechungsverhältnisse der einzelnen Luftschichten gegen den leeren Raum, von der untersten Schicht an, der Reihe nach = m, m', m'' u. s. w., d. h., wenn ein Lichtstrahl aus dem leeren Raume in eine solche Schicht übergeht, so mögen sich der Einfalls- und der Brechungssinus wie m : 1 oder wie m' : 1 u. s. w. verhalten. Wir haben hier zwar keine Uebergänge aus dem leeren Raume, sondern aus einer Luftschicht in die andere; allein für diesen Fall ist das Brechungsverhältniß durch die Brechungsverhältnisse aus dem leeren Raume unmittelbar gegeben. Bei'm Uebertritt aus der untersten Schicht in nächstfolgende höhere, z. B., wird sich der Einfallssinus zum Brechungssinus verhalten, wie m' : m, nämlich umgekehrt wie die Brechungsverhältnisse der Schichten, aus welchen der Strahl tritt und in welche er eindringt.

Nach den Puncten f, e, d, c u. s. w., in welchen der Strahl jede Schichtoberfläche trifft, ziehe man die Erdhalbmesser Kf u. s. w., so sind diese die Lothe, nach welchen die Brechung beurtheilt werden muß. Die Einfallswinkel **AfK**, **feK**, **edK** u. s. w. setze man

den die beiden Erdhalbmesser der Oerter A und B mit einander bilden, und zwar ist, nach Gauß, BAB' =

= i, i', i'' u. s. w., die Brechungswinkel gfe, led, tdc u. s. w. = l, l', l'' u. s. w., so finden folgende Proportionen statt:

$$\sin i : \sin l = m' : m$$
$$\sin i' : \sin l' = m'' : m'$$
$$\sin i'' : \sin l'' = m''' : m'' \text{ u. s. w.,}$$

und wenn man diese durch Multiplication zu einer einzigen verbindet, so hat man

A) $\sin i \,.\, \sin i' \,.\, \sin i'' \ldots\ldots \sin l \,.\, \sin l' \,.\, \sin l'' \ldots\ldots = m''' : m.$

Setzen wir ferner die Abstände der Einfallspuncte vom Erdcentrum Kf, Ke u. s. w. = x, x', x'' u. s. w., so hat man in den Dreiecken fKe, eKd, dKc u. s. w.

$$\sin l : \sin i' = x' : x$$
$$\sin l' : \sin i'' = x'' : x'$$
$$\sin l'' : \sin i''' = x''' : x'' \text{ u. s. w.}$$

woraus auf gleiche Weise, wie vorhin folgt:

B) $\sin l \,.\, \sin l' \,.\, \sin l'' \ldots\ldots : \sin i' \,.\, \sin i'' \,.\, \sin i''' \ldots\ldots = x''' : x.$

Setzen wir nun die Proportionen bei A und B durch Multiplication abermals zu einer einzigen zusammen, so erhalten wir

C) $\sin i : \sin i''' = m''' x''' : m x.$

Hiernach wird also das Verhältniß des ersten Einfallswinkels (am Auge A) zum letzten (am beobachteten Höhenpuncte B) bekannt, wie viel auch Schichten dazwischen liegen mögen, wenn man nur für m''' und x''' die gehörigen Werthe substituirt. m''' nämlich bedeutet das Brechungsverhältniß der Luft in B, wofür wir lieber jetzt μ setzen wollen; ferner ist KB für x''' zu nehmen, nnd diese Größe wollen wir durch a + h bezeichnen, unter a den Erdhalbmesser und unter h die Höhe DB des Ortes B über A verstanden. Statt x werden wir also den Erdhalbmesser KA = a selbst zu nehmen haben, und m ist das Brechungsverhältniß der Luft in A.

Den Winkel AfK = i können wir mit fAZ, d. i., mit B'AZ vertauschen, da AfK und fAZ nur um den unendlich kleinen Winkel AKf unterschieden sind. Es ist aber B'AZ der scheinbare, d. h., durch die Refraction afficirte Winkelabstand des Ortes B vom Zenith des Ortes A, und denselben wollen wir = z setzen. Bezeichnen wir auf gleiche Weise die scheinbare Zenithdistanz des Ortes A in B, nämlich A'BZ' (wo BA' eine Tangente der Curve BA in B ist) mit ζ, so ist i''' = aBK = A'BK = 180° — ζ, und die Proportion bei C geht in folgende über:

$$\sin z : \sin \zeta = (a + h)\,\mu : a m$$

$$\text{daher } \sin z = \frac{(a + h)\,\mu}{a m} \sin \zeta,$$

oder wenn $\frac{h}{a} = \vartheta$ gesetzt wird

$0{,}0653 \times (AKB)$. Betrüge, z. B., die Entfernung AD 12000 Toisen, so wäre der Winkel $AKB = \frac{AD}{KA \cdot \sin 1''} = 757'',79$ und folglich die Refraction BAB'

$$D) \sin z = \frac{(1+\vartheta)\,\mu}{m} \sin \zeta.$$

Das Brechungsverhältniß der Luft ist bei der Temperatur des schmelzenden Eises und 28 Pariser Zoll Barometerhöhe $= 1{,}0002938$, was wir mit $1 + k$ bezeichnen wollen. Sind dann in A und B die Barometerhöheu b und β und die Temperaturen nach Celsius t und τ, und bezeichnen wir die Werthe von $\frac{b}{28\,(1+0{,}00375\,t)}$ und $\frac{\beta}{28\,(1+0{,}00375\,\tau)}$ mit D und $\varDelta$, so haben wir $m = 1 + kD$ und $\mu = 1 + k\varDelta$. D bedeutet nämlich die Dichtigkeit der Luft bei b Zoll Barometerhöhe und t Grad Temperatur, wenn die Dichtigkeit bei 28 Zoll Barometerhöhe und 0° Temperatur $= 1$ gesetzt wird, und ebenso ist auch $\varDelta$ zu verstehen. Da nun k eine sehr kleine Größe ist, so können wir den Quotienten $\frac{\mu}{m} = \frac{1 + k\varDelta}{1 + kD}$ näherungsweise $= 1 + k\varDelta - kD = 1 - k\,(D - \varDelta)$ setzen, da dann die Gleichung D übergeht in

$$E) \sin z = (1+\vartheta) \sin \zeta - k\,(1+\vartheta)\,(D-\varDelta) \sin \zeta.$$

In dem Dreieck AKB ist ferner $\sin ZAB : \sin ABK = KB : KA$, also, wenn wir die wahre Zenithdistanz $ZAB = e$, und ABK oder das Supplement der wahren Zenithdistanz $ABZ' = \eta$ setzen: $\sin e : \sin \eta = a + h : a = 1 + \vartheta : 1$, daher

$$F) \sin e = (1+\vartheta) \sin \eta.$$

Aus E) folgt nun $(1+\vartheta) \sin \zeta - \sin z = k\,(1+\vartheta)\,(D-\varDelta).\sin \zeta$. Es ist aber, wenn wir die Refractionen BAB' und ABA' mit r und ϱ bezeichnen, $z = e - r$, also $\sin z = \sin (e-r) = \sin e - r \cos e$ näherungsweise, weil r nur sehr klein ist. Ferner $\zeta = 180^\circ - (\eta+\varrho)$, also $\sin \zeta = (\eta+\varrho) = \sin \eta + \varrho \cos \eta$, also $(1+\vartheta) \sin \zeta - \sin z = (1+\vartheta) \sin \eta + \varrho\,(1+\vartheta) \cos \eta - \sin e + r \cos e = r \cos e + \varrho\,(1+\vartheta) \cos \eta$, weil nämlich $(1+\vartheta) \sin \eta = \sin e$. Hiernach ist also

$$r \cos e + \varrho\,(1+\vartheta) \cos \eta = k\,(1+\vartheta)\,(D-\varDelta) \sin \zeta.$$

Um aber die Refraction weiter zu entwickeln, müßten wir das Verhältniß zwischen r und ϱ kennen, was nur mit Hülfe des Gesetzes, nach welchem die Dichtigkeit der Luft in den höheren Regionen abnimmt, gefunden werden kann und auf sehr schwere Rechnungen führt. Wir helfen uns daher mit der nahe richtigen Hypothese, daß die krumme Bahn AB des Lichtstrahles ein Kreisbogen sei, denn in der That ist sie ja nur ein kleines Stück einer über A und B nach demselben Gesetze fortgeführten Curve, das man also nach bekannten Regeln der Geometrie als einen Kreis-

$= 0,0653 \times 757'',79 = 49'',48$. Um so viel müßte man also den in A beobachteten Höhenwinkel von B ver-

---

bogen ansehen darf. Unter dieser Voraussetzung ist aber $r = \varrho$, und daher

$$G)\ r\left(\cos e + (1+\vartheta)\cos\eta\right) = k\,(1+\vartheta)\,(D-\Delta)\sin\zeta.$$

Verlängern wir die Sehne BA und ziehen den Senkel KL, so ist $BL = KB \,.\, \cos KBL$, also weil für den Erdhalbmesser $KD = KA = 1$, $DB = \vartheta$ ist: $BL = (1+\vartheta)\cos\eta$. Ferner ist $AL = KA \,.\, \cos KAL = KA \,.\, \cos ZAB = \cos e$, und folglich $\cos e + (1+\vartheta)\cos\eta = BL + AL = BN$. Da nun die Secanten BN und BM sich umgekehrt wie ihre äußeren Abschnitte verhalten, so haben wir $BA : BD = BM : BN$, d. i., weil $BM = 2+\vartheta$, wenn wir $AB = \varepsilon$ setzen: $\varepsilon : \delta = 2+\vartheta : BN$, folglich $BN = \cos e + (1+\vartheta)\cos\eta = \frac{(2+\vartheta)\,\vartheta}{\varepsilon}$, und daher $\frac{r\,(2+\vartheta)\,\vartheta}{\varepsilon} = k\,(1+\vartheta)\,(D-\Delta)\sin\zeta$, woraus folgt:

$$r = k \,.\, \frac{1+\vartheta}{2+\vartheta} \,.\, \frac{D-\Delta}{\vartheta}\,\varepsilon \sin\zeta.$$

Hier können wir erstens ohne Nachtheil für die Genauigkeit den Factor $\frac{1+\vartheta}{2+\vartheta} = \frac{1}{2}$ setzen, weil in allen Fällen ϑ ein sehr kleiner Bruch ist. Zieht man zweitens das Perpendikel AQ, so hat man $AQ = AB \,.\, \sin ABQ = \varepsilon \sin\eta = \varepsilon \sin(180^0 - \zeta - \varrho) = \varepsilon \sin(\zeta + \varrho)$, was wegen der Kleinheit von ϱ nur unbeträchtlich von $\varepsilon \sin\zeta$ unterschieden ist. Auch dürfen wir den Sinus AQ mit seinem Bogen AD vertauschen, und wenn wir diesen $= \gamma$ setzen, so ist

$$H)\ r = \tfrac{1}{2}\,k\,\frac{D-\Delta}{\vartheta}\,\gamma,$$

durch welche Formel man sogleich r in Secunden erhält, wenn man γ oder den Winkel AKB darin ausdrückt. Wir könnten hiernach die Refraction r berechnen, wenn durch gleichzeitige Beobachtungen des Thermometers und Barometers in A und B, D und Δ bekannt wären. Da dieses nicht immer möglich ist, so kann man den Ausdruck auf folgende Weise umformen:

Man hat $D - \Delta = D\left(1 - \frac{\Delta}{D}\right)$ und es bedeutet $\frac{\Delta}{D}$ die Dichtigkeit der Luft in B, wenn die in A $= 1$ gesetzt wird. Da $\frac{\Delta}{D}$ kleiner, als 1 sein muß, so kann man $\frac{\Delta}{D} = 1 - \omega$ setzen, wodurch wir erhalten $r = \frac{\frac{1}{2}k\,\omega\,\gamma\,D}{\vartheta}$. Wenn nun die Höhe ϑ oder h nicht sehr beträchtlich ist, so kann man für gegenwärtigen Zweck ohne merklichen Fehler annehmen, daß die Dichtigkeiten der Luft mit den wachsenden Höhen gleichförmig abnehmen, da dann $\omega = c\,\vartheta$ gesetzt werden darf, wo c eine constante Größe bedeutet. Dann wird $r = \frac{1}{2}k \,.\, c \,.\, \gamma$, indem man auch den Factor D hier weg-

kleinern oder die beobachtete scheinbare Zenithdistanz ZAB' vergrößern.

---

läßt, welcher von 1 nicht viel unterschieden ist. Am besten wird man nun den Factor $\frac{1}{2}$ c k aus wirklich gemessenen Refractionen berechnen, zu welchem Zwecke man $\frac{1}{2} k c = \frac{r}{\gamma}$ hat.

Aber bei sehr großen Berghöhen wird die Voraussetzung $\omega = c\,\vartheta$ unrichtig. Um zu zeigen, was die Theorie hier weiter an die Hand giebt, wollen wir die Formel H wieder vornehmen.

Hier ist $D - \varDelta = D\left(1 - \frac{\varDelta}{D}\right) = D\left(1 - \frac{\beta}{b} \cdot \frac{1 + \lambda t}{1 + \lambda \tau}\right)$, wenn wir nämlich die Zahl 0,00375 der Kürze halber mit λ bezeichnen. Nach Euler's Gesetz nimmt aber die Temperatur in den höheren Luftregionen so ab, daß man hat $\vartheta = \frac{f(t - \tau)}{1 + \lambda t}$, wo ϑ die obige Bedeutung hat und f eine constante Zahl bedeutet. Hieraus folgt $\tau = t - \frac{(1 + \lambda t)\,\vartheta}{f}$ und $1 + \lambda\tau = (1 + \lambda t) \times \left(1 - \frac{\lambda\vartheta}{f}\right)$, also, da aus den Beobachtungen $\frac{\lambda}{f}$ sehr nahe $= 100$ gefunden wird, $D - \varDelta = D\left(1 - \frac{\beta}{b\,(1 - 100\,\vartheta)}\right)$.

Da β kleiner, als b, so können wir $\frac{\beta}{b} = 1 - \delta$ setzen, und hierdurch wird

$$D - \varDelta = D\left(1 - \frac{1 - \delta}{1 - 100\,\vartheta}\right) = \frac{\delta - 100\,\vartheta}{1 - 100\,\vartheta}\,D.$$

Nach der Theorie vom barometrischen Höhenmessen ist $h = a\,\vartheta = 4085{,}4\left(1 + \frac{1}{2}\lambda\,(t + \tau)\right)\log\frac{b}{\beta}$ Toisen, wo a wieder den Erdhalbmesser und log einen natürlichen Logarithmus bedeutet. Wenn wir hier zuerst statt τ den vorhin gefundenen Werth substituiren, so finden wir $1 + \frac{1}{2}\lambda\,(t + \tau) = (1 + \lambda t)\,(1 - 50\,\vartheta)$ und daher $a\,\vartheta = 4085{,}4 \times (1 + \lambda t)\,(1 - 50\,\vartheta)\log\frac{b}{\beta}$.

Es ist aber $\log\frac{b}{\beta} = -\log\frac{\beta}{b} = -\log(1 - \delta) = \delta + \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{3}\delta^3 + \ldots\ldots$, und man sieht hieraus, daß, wenn der Unterschied der Barometerhöhen nur wenige Zolle beträgt, für unsere Zwecke hinlänglich genau gesetzt werden darf $\log\frac{b}{\beta} = \delta$. Hieraus folgt $\delta = \frac{a\,\vartheta}{4085{,}4\,(1 + \lambda t)\,(1 - 50\,\vartheta)} = \frac{800\,\vartheta}{(1 + \lambda t)\,(1 - 50\,\vartheta)}$, wenn nämlich der Erdhalbmesser a zu 3266293 Toisen angenommen wird. Demnach $D - \varDelta =$

Aber die Beobachtungen geben meistens sehr abweichende Werthe für das Verhältniß der Refraction zum

---

$$\frac{D\,\vartheta}{1 - 100\,\vartheta}\left(\frac{800}{(1 + \lambda t)(1 - 50\,\vartheta)} - 100\right).$$

Sofern wir aber log $(1 - \delta)$ bloß $= - \delta$ setzten, dürfen wir auch die Factoren $1 - 100\,\vartheta$ und $1 - 50\,\vartheta$ weglassen, wodurch wir erhalten $D - \varDelta = D\,\vartheta \left(\frac{800}{1 + \lambda t} - 100\right) =$
$\frac{D\,\vartheta}{1 + \lambda t}(700 - 100\,\lambda t) = \frac{700\,D\,\vartheta}{1 + \lambda t}(1 - \tfrac{1}{7}\lambda t) = \frac{700\,D\,\vartheta}{1 + \frac{8}{7}\lambda t}$
Setzen wir aber dieses in die Formel H und substituiren zugleich für k und D ihre Werthe, so erhalten wir

$$r = \frac{0{,}103\,\gamma}{(1 + \lambda t)(1 + \frac{8}{7}\lambda t)} \cdot \frac{b}{28},$$

welche Formel bei mäßigen Höhen die Refractionen zur Genüge darstellen würde, wenn das Gesetz der Wärmeabnahme mit wachsender Höhe weniger veränderlich wäre.

**) Um die Refraction durch Beobachtung zu finden, muß man an den beiden Orten A und B die scheinbaren Zenithdistanzen $ZAB' = z$ und $Z'BA' = \zeta$ beobachten, und zwar beide in demselben absoluten Augenblicke, damit man die Werthe von z und ζ für einerlei Zustand der Atmosphäre erhalte. Hierzu werden also zwei Beobachter erforderlich sein. Ist nun, wie vorhin, die Refraction bei $z = r$ und die bei $\zeta = \varrho$, so ist im Dreieck AKB der Winkel $KAB = 180^\circ - z - r$, und $KBA = 180^\circ - \zeta - \varrho$, welche beide mit $AKB = \gamma$ zusammen 180° ausmachen müssen. Man hat also

$$180^\circ - z - r + 180^\circ - \zeta - \varrho + \gamma = 180^\circ,$$

woraus $r + \varrho = 180^\circ - z - \zeta + \gamma$ folgt. Hiernach wird also die Summe beider Refractionen bekannt, und wenn man, wie es gewöhnlich geschieht, annimmt, daß beide einander gleich sind, so ergiebt sich daraus jede einzelne und folglich auch ihr Verhältniß zum Winkel γ. Natürlich muß man zu jeder Zenithdistanz erst die Refraction addiren, ehe man die Höhenberechnung auf die in §. 27, 3, angedeutete Weise vornehmen kann. Jedenfalls aber müssen die Zenithdistanzen an beiden Orten beobachtet werden, wenn man die Refractionen genau kennen lernen und sichere Höhenbestimmungen erhalten will.

Noch bemerken wir bei dieser Gelegenheit, daß, wenigstens theoretisch genommen, durch Verbindung thermometrischer und barometrischer Beobachtungen mit trigonometrischen, die an beiden Stationen gleichzeitig angestellt werden, die Unsicherheiten in den Höhenmessungen vollkommen beseitigt werden. Wie nämlich auch der Zustand der Atmosphäre beschaffen sein mag, so ist doch die Gleichung D der vorigen Anmerkung, $\sin z = \frac{(1 + \vartheta)\,\mu}{m} \sin \zeta$, vollkommen richtig. Hieraus folgt

Mittelpunctswinkel A K B oder zu der in Graden ausgedrückten Entfernung A B. Wir wollen, der Kürze halber, die Refraction B A B' mit r bezeichnen und den Winkel A K B $= \gamma$ setzen. Nun sollte eigentlich immer das Verhältniß $\frac{r}{\gamma}$ dasselbe sein, allein es variirt von 0 bis zu 1, so daß also die Refraction mitunter ganz verschwindet, mitunter aber auch dem ganzen Bogen γ gleich, ja vielleicht noch größer werden kann. Dieser große Unterschied rührt nun nicht etwa davon her, weil die Theorie irrig wäre, sondern weil der Zustand unserer Atmosphäre meistentheils sehr veränderlich und ein ganz anderer ist, als ihn die Theorie voraussetzt. Die Dichtigkeit und namentlich die Temperatur der verschiedenen Luftschichten ändert sich oft fortwährend und ohne be-

---

$$\vartheta = \frac{m \sin z}{\mu \sin \zeta} - 1 = \frac{\sin z}{\sin \zeta} - 1 + k\,(D - \Delta) \cdot \frac{\sin z}{\sin \zeta},$$

also wenn wir mit dem Erdhalbmesser a multipliciren:

$$a\,\vartheta = h = \frac{a \sin z}{\sin \zeta} - a + a\,k\,(D - \Delta)\,\frac{\sin z}{\sin \zeta},$$

wo die Bedeutung der Buchstaben aus der vorigen Anmerkung klar ist. Hier ist aber $\frac{a \sin z}{\sin \zeta} - a$ die Höhe so berechnet, als ob z und ζ die richtigen Zenithdistanzen wären. Denn in dem Dreieck A K B (Taf. XIV., Fig. 4) ist sin Z A B : sin A B Z' $=$ sin z : sin ζ $=$ K B : K A $=$ a $+$ h : a, daher $a + h = \frac{a \sin z}{\sin \zeta}$, woraus $h = \frac{a \sin z}{\sin \zeta} - a$ folgt, was wir für die Rechnung bequemer umbilden in

$$\frac{a\,(\sin z - \sin \zeta)}{\sin \zeta} = \frac{2a \cdot \cos \tfrac{1}{2}(z + \zeta) \sin \tfrac{1}{2}(z - \zeta)}{\sin \zeta}.$$

Bezeichnen wir diese fehlerhafte Höhe mit H, so wird $\frac{a \sin z}{\sin \zeta}$ $= a + H$ und daher die wahre Höhe $h = H + (a + H)\,(D - \Delta)\,k$, wo wir in dem Correctionsgliede $(a + H)\,k\,(D - \Delta)$ auch bloß a statt a $+$ H setzen könnten und so die Formel $h = H + 959{,}6\,(D - \Delta)$ Toisen erhalten würden. Hierbei liegt jedoch die Voraussetzung zu Grunde, daß die Unterschiede der Brechungsverhältnisse in den verschiedenen Luftschichten den Unterschieden der Dichtigkeiten (D und Δ) proportional seien, sowie wir dieselben aus dem Stande des Barometers und Thermometers berechnen. Jedenfalls aber ist diese Voraussetzung zulässiger, als die Annahme, daß an beiden Stationen die Refractionen gleich seien.

stimmte Regel, daher auch die Strahlenbrechung ohne Regel in jedem Augenblicke eine andere sein wird. Wenn der Lichtstrahl nahe am Boden fortgeht, so kann er wohl auch mitunter so gebrochen werden, daß nicht die hohle, sondern die convexe Seite seiner durchlaufenen Curve der Erde zugewandt ist und folglich die Höhe des beobachteten Objectes nicht vergrößert, sondern verkleinert wird. Man hat wahrgenommen, daß die Strahlenbrechung von Morgen gegen Mittag hin abnimmt und von da an gegen den Untergang der Sonne wieder wächst; daß sie aber im Mittage ganz verschwinden und überhaupt den Zeiträumen proportional sein solle, welche zwischen dem wahren Mittag und dem Moment der Beobachtung liegen, ist eine noch weiter zu erweisende Hypothese.

Besonders ist noch zu bemerken, daß die terrestrische Refraction nicht bloß die Höhenwinkel, sondern nicht selten auch die horizontalen Winkel unrichtig macht. Dieses wird dann Statt finden, wenn die Kugelschichten, in welchen die Luft gleiche Dichtigkeit zeigt, nicht die Erde concentrisch umgeben, sondern eine andere schräge Lage haben. Schon aus diesem Grunde wird es nöthig, die Winkel bei großen Triangulirungen wiederholt zu beobachten, um sich von solchen Refractionsfehlern, wenn sie etwa Statt gehabt haben sollten, unabhängig zu machen.

§. 173.

Den Einfluß, den die Strahlenbrechung bei'm Nivelliren hat, läßt sich nun leicht beurtheilen. Es sei die Visirlinie **C D** (Taf. XIV., Fig. 1) horizontal gerichtet, und sie treffe, geradefort verlängert, die Latte in **D**, so ist **D** nicht auch der wirklich anvisirte Punct, sondern derselbe liegt etwas tiefer bei **M**, und die Lattenhöhe wird daher etwas zu klein, also auch der Höhenunterschied bei der Steigung zu groß, bei'm Gefälle zu klein gefunden. Um den Fehler **D M** zu berechnen, sei, wie in §. 170, die Stationslänge $CD = \delta$ und der Erdhalbmesser $= r$; ferner sei der Winkel, den die nach den Stationspuncten **A** und **B** gezogenen Erdhalbmesser bilden, $= \gamma$, so ist die Refraction $DCM = 0{,}0653\ \gamma$ und $DM = DC \cdot \mathrm{tg}\ DCM = 0{,}0653\ \delta\gamma$, indem der Bogen des sehr kleinen Winkels **D C M** mit seiner Tangente verwechselt werden darf. Da nun γ in Thei-

len des Halbmessers auszudrücken ist, so hat man auch $\gamma = \frac{\delta}{r}$ und daher endlich $DM = 0{,}0653\ \frac{\delta^2}{r}$, und diese Größe muß man also noch zur beobachteten oder scheinbaren Lattenhöhe l addiren, um die wahre l′ zu erhalten.

Man sieht also, daß die Correction, wegen der Strahlenbrechung noch weit unbedeutender ist, als die Reduction auf den wahren Horizont. Wo also die erstere anzubringen ist, wird die letztere noch weit mehr erforderlich, und da nun beide gleiche Formen haben, so kann man sie in eine einzige Correction zusammenfassen. Da nämlich die Reduction auf den wahren Horizont von der scheinbaren Lattenhöhe l abgezogen, die Correction, wegen der Strahlenbrechung, aber dazu addirt werden muß, so wird die wahre Lattenhöhe

$$l' = l - \frac{\delta^2}{2r} + 0{,}0653\ \frac{\delta^2}{r} = l - 0{,}4347\ \frac{\delta^2}{r},$$

oder nahe $l' = l - \frac{10\ \delta^2}{23\ r}$.

Diese Correction wegen der Strahlenbrechung ist jedoch wieder nur in dem Falle erforderlich, wo der Höhenunterschied nur aus dem einen Endpuncte der Station ermittelt wird. Wird er durch Nivelliren aus der Mitte der Station ermittelt, so werden beide Lattenhöhen um gleichviel zu klein gefunden, und ihr Unterschied giebt folglich das richtige Gefälle oder die richtige Steigung. Dasselbe findet auch Statt, wenn nach der dritten Methode des §. 169 verfahren wird, weil der Höhenunterschied aus dem einen Endpuncte der Station zu klein, aus dem anderen um eben so viel zu groß gefunden wird, weßhalb der Fehler in der Summe sich aufheben muß.

Meistens pflegt man nicht auf so weite Entfernung hinaus zu visiren, daß eine Correction wegen der Strahlenbrechung nöthig würde. Ueberhaupt ist es eine sehr mißliche Sache, sie wirklich in Anwendung zu bringen, weil sie so unsicher ist und bei sehr regellosem Aufsteigen leichterer und wärmerer und dem Niedersinken schwererer und kälterer Luftschichten, besonders aber wenn die Visirlinie nahe über dunstendem Boden wegstreicht, ziemlich bedeutend werden kann, mitunter aber auch gerade die

entgegengesetzte Wirkung hervorbringt, d. h., die Lattenhöhe vergrößert, statt sie zu verkleinern, so daß also durch das Hinzufügen einer Correction der Fehler verschlimmert wird. Selbst nicht einmal durch das Visiren aus der Mitte der Station, oder das Zurückvisiren vom anderen Endpuncte, ist man gegen den Einfluß der Strahlenbrechung ganz gesichert, weil sie nicht immer von beiden Seiten her gleich ist. Es ist daher erforderlich, Beobachtungen an solchen Tageszeiten zu vermeiden, wo der Wechsel in den Dichtigkeiten der Luftschichten am Größten ist, nämlich bei Sonnen-Auf- und Untergang und im Mittage.

§. 174.

Außer den beiden fehlerhaften Einwirkungen der scheinbaren Horizontale und der Strahlenbrechung, von welchen die erstere ganz, die zweite wenigstens großentheils sich beseitigen oder vermeiden läßt, giebt es noch andere, die von den Unvollkommenheiten unserer Sinne oder Instrumente herrühren, und die begreiflich bis zu einer gewissen Grenze nicht vermieden werden können. Der hauptsächlichste dieser Fehler, auf welchen alle anderen sich zurückführen lassen, besteht in der nicht genau horizontalen Lage derjenigen Linie, welche als scheinbare Horizontale vom Instrumente bezeichnet wird. Sein Einfluß läßt sich leicht auf folgende Weise beurtheilen. Es sei (Taf. XIV., Fig. 1) **C D** die wirkliche Horizontale und **C M** die vom Instrumente bezeichnete, so erhält man **B M** als Lattenhöhe, während dieselbe doch **B D** ist, so daß also die Lattenhöhe um das Stück **D M** falsch gefunden wird, und zwar theils zu groß, theils zu klein, je nachdem **C M** über oder unter **C D** fällt. Nennen wir den Abweichungswinkel **D C M**, welcher immer nur klein sein wird, in Secunden ausgedrückt, $= \alpha$, und die Stationslänge **C D** $= \delta$, so ist bekanntlich **D M** $= \delta\, \alpha \sin 1''$. Diese Art des Fehlers nennt man die Mißweisung des Instrumentes.

Hiernach kann man also den Fehler in der beobachteten Lattenhöhe berechnen, der bei einer gegebenen Stationslänge δ und einem muthmaßlichen Abweichungswinkel α entstehen muß. Wäre, z. B., $\alpha = 60$ Sec., wie es wohl bei schlechteren Nivellirinstrumenten der Fall ist, so würde bei einer Stationslänge $\delta = 100$ Fuß die

Lattenhöhe um 4,2 Linien falsch erhalten. Gute Nivellirinstrumente dürfen indessen einen Abweichungswinkel von nur wenigen Secunden zeigen. — Nach derselben Rechnung läßt sich auch der Fehler beurtheilen, der aus dem undeutlichen Sehen bei'm Visiren über Diopter oder durch ein Fernrohr entspringt, wenn man statt α denjenigen Sehewinkel setzt, bei welchem ein Object zu verschwinden anfängt.

Bei'm Nivelliren aus der Mitte der Station, und auch bei'm Zurückvisiren aus dem anderen Endpuncte, ist ein constanter Abweichungswinkel ohne Einfluß, weil im ersten Falle beide Lattenhöhen um einerlei Größe zu groß oder zu klein gefunden werden, was immer den Höhenunterschied richtig giebt; im anderen Falle wird, wenn aus dem einen Endpuncte ein zu großer Höhenunterschied beobachtet wird, der aus dem andern Endpuncte beobachtete um ebensoviel zu klein sein, daher die halbe Summe beider wieder den richtigen Höhenunterschied giebt.

Endlich kann noch ein Fehler daher entstehen, daß die Latte nicht genau senkrecht gestellt wird. In Tafel XIV., Figur 3 sei **A E** die schiefgestellte Latte und **B C** das Instrument, so wird, wenn man die Horizontallinie **C E** zieht, **A E** die beobachtete Lattenhöhe sein. Wenn aber die Latte in **A** senkrecht stände und nach ihr eine Horizontallinie **C D** gezogen würde, so würde man in **A D** die richtige Lattenhöhe haben. Ziehen wir dann **D E**, so ist das Dreieck **A D E** bei **D** rechtwinklig, weil die Verticallinie **A D** auf der Horizontalebene **D C E** senkrecht steht. Wenn wir daher die beobachtete Lattenhöhe **A E** $= l$, die wahre **A D** $= l'$ nnd den Abweichungswinkel **D A E** von der Verticallinie $= \beta$ setzen, so haben wir $l' = l \cos \beta$, also $l - l' = l - l \cos \beta = l\,(1 - \cos \beta) = 2\, l \sin \tfrac{1}{2}\, \beta^2$, wofür wir, weil β doch immer nicht gar beträchtlich und daher $\sin \tfrac{1}{2}\, \beta = \tfrac{1}{2}\, \beta \sin 1''$ sein wird:

$$l - l' = \tfrac{1}{2}\, l\, \beta^2\, (\sin 1'')^2$$

setzen dürfen. Um diese Größe wird also die Lattenhöhe zu groß gefunden.

Wäre, z. B., $\beta = 5^0 = 18000''$, so würde man $l - l' = 0{,}00381\, l$ finden, was bei einer Lattenhöhe von 10 Fuß 5,45 Linien betragen würde.

§. 175.

Wir kommen nun zur Beschreibung der Instrumente, welche zum Nivelliren gebraucht werden. Ihr wesentlicher Zweck ist die Bezeichnung einer scheinbaren Horizontallinie, und da man hierzu zwei Mittel hat, das Loth und die ruhige Oberfläche einer sehr beweglichen Flüssigkeit, so zerfallen die Nivellirinstrumente in zwei Classen, die man zweckmäßig durch die Benennung der statischen und hydrostatischen Instrumente bezeichnet. Die Libelleninstrumente sind nur eine besondere, obgleich die vorzüglichste Art der hydrostatischen.

Bei den statischen Instrumenten wird es nun darauf ankommen, eine Linie zu erhalten, die auf der Richtung des Lothes senkrecht ist, denn solche ist bekanntlich eine scheinbare Horizontallinie. Hierzu dient die gewöhnliche Setzwaage der Maurer und Zimmerleute, welche aus einem, aus hölzernen Leisten zusammengefügten gleichschenkligen Dreiecke besteht (Taf. XIV., Fig. 5), aus dessen Spitze ein Loth CD herabhängt und die horizontale Lage der Grundlinie AB angiebt, wenn es auf die markirte Mitte derselben einspielt. Um das Zusammentreffen des Lothes mit der Mitte der Grundlinie genau zu beobachten, kann man diese durch eine aufrecht stehende Spitze bezeichnen und jenes unten ebenfalls mit einer feinen Spitze versehen, da dann das Zusammentreffen beider Spitzen die richtige Stellung der Setzwaage entscheidet. Gegen die Störungen durch den Luftzug wird das Pendel durch ein gläsernes Gehäuse gesichert.

Man könnte nun eine solche Setzwaage an einem Stative befestigen und unten an ihrer Grundlinie, bei A und B, ein Paar Dioptern anbringen, deren Sehelinie auf der Richtung des einspielenden Lothes genau senkrecht wäre. Durch diese Dioptern hindurchvisirend, könnte man alsdann den Punct finden, wo diese scheinbare Horizontale die Nivellirlatte trifft, und so die Lattenhöhe richtig beobachten. Auf ähnliche Weise wird bei Piccard's Nivellirinstrumente die Ziellinie eines Fernrohres durch ein Loth horizontal gerichtet.

Allein zu solchem Gebrauche, wodurch ein Nivelliren entfernterer Stationspuncte vermittelt wird, ist die Setzwaage nicht zu empfehlen, weil sie keine größere Ge-

nauigkeit abgeben würde, als andere, weit bequemere Instrumente. Man bedient sich ihrer nur zum Abwägen kleiner Stationen, in Verbindung mit dem Richtscheite und dem Waagestabe. Das Richtscheit, welches die Bestimmung hat, die scheinbare Horizontale unmittelbar von dem einen Stationspuncte zum anderen zu ziehen, besteht aus einer etwa 1 Ruthe langen Latte von der Breite der Setzwaage und solcher Höhe, daß sie gegen merkliche Biegung durch ihr eigenes Gewicht gesichert ist. Die obere und untere Seitenfläche des Richtscheites müssen genau eben und parallel sein, und auf eine derselben wird die Setzwaage mit Schrauben befestigt. Man hat auch dieses Richtscheit an 30 Fuß lang gemacht und aus drei, durch Charniere verbundenen Stücken zusammengesetzt, damit es, des bequemeren Transportes halber, zusammengeklappt werden könne. — Der Waagestab ist ein mannshoher, viereckiger und in Fuße, Zolle u. s. w. getheilter Stab, an dem eine eiserne Hülse mit einem, dem Richtscheite als Stütze dienenden Arme oder Vorsprunge auf- und abgeschoben und durch eine Schraube befestigt werden kann (Taf. XIV., Fig. 6).

Die Entfernung der Puncte, deren Höhenunterschied ermittelt werden soll, darf nun begreiflich die Länge des Richtscheites nicht übersteigen.

Bei'm Gebrauche legt man das eine Ende des Richtscheites auf den einen der abzuwägenden Puncte N; im anderen, M, stellt man den Waagestab senkrecht auf und hebt oder senkt die Hülse mit dem darauf liegenden Richtscheite so lange, bis die Setzwaage genau einspielt, da dann die am Waagestabe abzulesende Höhe M A unmittelbar das Gefälle von N nach M giebt.

Da, wo ein Nivellement nur auf wenige hundert Fuß sich erstreckt, z. B., wenn das Gefälle eines Baches oder Flusses Behufs der Anlage eines Mühlengerinnes gefunden werden soll, ist diese Art zu nivelliren wohl anwendbar. Auf größere Strecken ausgedehnt, würde sie theils zu ungenau, theils zu mühsam werden.

Man sieht, daß es bei der Setzwaage darauf ankommt, daß, wenn das Loth richtig einspielt, die Aufsetzefläche A B genau horizontal sei, und um dieses scharf zu erreichen, wird man die Marke der Grundlinie so einzurichten haben, daß man sie ein Wenig hin und her schieben kann. Man setzt nun die Waage auf das Richt-

cheit und hebt oder senkt dieses so lange, bis das Loth einspielt. Wird dann die Waage auf dem Richtscheite umgedreht, so daß A dahin zu liegen kommt, wo vorhin B sich befand, und spielt dann das Loth noch ein, so ist die Setzwaage richtig; wo nicht, so muß die Hälfte der Abweichung durch Verschiebung der Grundlinienmarke, die andere Hälfte durch Hebung oder Senkung des Richtscheites corrigirt werden. Denn, wenn in Fig. 7 (Taf. XIV.) das Loth CD um den Winkel ECD von der auf die Grundlinie AB senkrecht gezogenen CE abweicht, und man denkt sich die ganze Setzwaage um CE gedreht, so behält das Loth immer noch die vorige Richtung CD, aber die Grundlinienmarke, die vorhin bei D sich befand, kommt jetzt in D′ zu liegen, so daß D′E = DE ist, und also die doppelte Abweichung sichtbar wird.

Die obere und untere Kante des Richtscheites müssen eben und genau parallel sein, damit auch die untere horizontal liege, wenn die obere es ist. Um das Richtscheit, in Bezug auf die letztere Eigenschaft, auf die Probe zu nehmen, setzt man die berichtigte Setzwaage darauf und richtet es horizontal; alsdann dreht man es um, daß die vorher nach unten gerichtete Seitenfläche nach oben zu liegen kommt, ohne jedoch die Unterlage zu verrücken. Spielt das Loth der wieder aufgesetzten Waage auch da noch richtig ein, so sind die beiden Seitenflächen des Richtscheites parallel; wo nicht, so muß mit dem Hobel nachgeholfen werden.

Es genügt jedoch, und ist überdies auch sicherer, sich um die Richtigkeit der Setzwaage und des Richtscheites nicht zu kümmern, sondern die Verbindung beider so herzustellen, daß die untere Kante des Richtscheites horizontal ist, wenn das Pendel auf seine Marke einspielt. Zu diesem Behufe braucht man nur das mit der Setzwaage verbundene Richtscheit auf seinen Unterlagen (mit Hülfe des Schiebers am Waagestabe) so zu richten, daß das Pendel einspielt. Wird dann das Richtscheit umgedreht und zeigt sich eine Abweichung des Pendels, so corrigirt man die Hälfte an der Setzwaage, die andere Hälfte an den Unterlagen des Richtscheites, dessen unterste Kante hierbei begreiflich als Grundlinie der Setzwaage gilt.

§. 176.

Unter den mannichfaltigen Vorrichtungen, die sich auf den Gebrauch des Lothes gründen, und von denen die vorhin beschriebene Setzwaage am Allgemeinsten ist, wollen wir nur noch die Rothesche Bergwaage erwähnen. Diese besteht aus einem 10 Fuß langen Richtscheite A B (Taf. XIV., Fig. 24) mit einem in Grade eingetheilten Halbkreis D E, von etwa acht Zoll Halbmesser, aus dessen Mittelpuncte ein Loth C F herabhängt. Die Einrichtung ist so getroffen, daß bei horizontaler Lage des Richtscheites A B das Loth auf den Nullpunct der Theilung bei a trifft, oder daß der Durchmesser D E mit den Kanten des Richtscheites parallel ist. Wird dann das Richtscheit A B gegen die Horizontalebene B I um einen Winkel A B I geneigt, so zeigt das Loth C F am Gradbogen den Neigungswinkel an; denn der vom Lothe am Gradbogen angegebene Winkel a C F oder G C H ist offenbar dem Winkel A B I gleich, weil C L auf A B und C H auf G B senkrecht ist, und außerdem die rechtwinkligen Dreiecke G C H und L B G den Winkel bei G gemein haben.

Bei'm Gebrauche legt man das Richtscheit auf den geneigten Boden A B und lies't den am Gradbogen vom Lothe angezeigten Winkel ab, welcher der Neigungswinkel des Bodens gegen die Horizontalebene sein wird. Der Höhenunterschied der Endpuncte des Richtscheites ist dann der Sinus A I des beobachteten Neigungswinkels; die horizontale Entfernung dieser Puncte aber giebt zu demselben Winkel den Cosinus B I. Man braucht also nur, um das Gefälle A I oder den horizontalen Abstand B I zu finden, den aus den Tafeln für den Halbmesser 1 entnommenen Sinus und Cosinus mit der Länge des Richtscheites zu multipliciren.

Um die Richtigkeit des Instrumentes zu prüfen, darf man nur das Richtscheit auf zwei Unterlagen so richten, daß das Pendel auf 0 Grad steht, und dann, wie bei der Setzwaage, zusehen, ob auch bei verwendetem Richtscheite das Loth noch auf 0 Grad einspielt.

Da übrigens durch eine solche Vorrichtung die Winkel nicht leicht sicherer, als bis $\frac{1}{8}^{0}$ abgelesen werden können, so kann sie nicht die höchste Genauigkeit gewähren. Wird bei einem Neigungswinkel von 1^{0} ein Fehler von

$\frac{1}{4}^{0}$ begangen, so giebt dieses schon 6,3 Linien Fehler im Gefälle, wenn das Richtscheit 10 Fuß lang ist.

§. 177.

Unter den hydrostatischen Instrumenten ist das einfachste die sogenannte Canalwaage. Sie besteht aus einer blechernen, etwa 3 bis 4 Fuß langen, 1 Zoll weiten und an beiden Enden rechtwinklich umgebogenen Röhre AB (Taf. XIV., Fig. 8), in deren Enden zwei senkrecht stehende Glascylinder C und D wasserdicht eingekittet sind. Diese Vorrichtung wird auf ein Stativ gebracht, auf welchem sie sich um eine verticale Achse, nach jeder Richtung hin, drehen läßt. Wird nun in die Röhre Wasser eingegossen, so liegen dessen beide Oberflächen in den Glascylindern, nach dem Gesetze der communicirenden Röhren, immer in derselben Horizontalebene, und eine darüber hin gezogene Linie ist also eine scheinbare Horizontallinie. Damit man die Wasserstände in den Glascylindern besser erkennen könne, bedient man sich eines gefärbten Wassers. Die Röhre E dient dazu, alle Luftblasen, welche sonst die Horizontalität der beiden Oberflächen stören würden, aus dem Innern entweichen zu lassen. —

Bei'm Gebrauche zielt man über die beiden Wasserflächen hinweg nach der Latte und bemerkt den Punct, wo die Ziellinie auf derselben eintrifft, wodurch sich unmittelbar die Lattenhöhe ergiebt. — Die Canalwaage ist, ihrer Einfachheit und Wohlfeilheit wegen, da, wo Nivellements sich auf nicht gar weite Distanzen erstrecken und nicht die höchste Genauigkeit erfordert wird, ein brauchbares Werkzeug. —

Das Visiren nach den beiden Wasseroberflächen kann, abgesehen von den Fehlern, die das nicht bewaffnete Auge begeht, besonders aus zwei Ursachen unsicher werden. Einmal nämlich bildet die Flüssigkeit in den Glascylindern, deren Weite nicht unter 1 Zoll sein sollte, keine genaue Ebene, sondern sie steigt an den Glaswänden etwas in die Höhe, uud zwar um so mehr, je enger die Röhren sind. Ist die Flüssigkeit Quecksilber, so findet gerade das Umgekehrte statt; dasselbe steht nämlich in der Mitte höher, als am Rande. Das Nähere über diese Anziehung oder Abstoßung der Flüssigkeiten von Glaswänden (Capillarattraction und Depression, Adhäsion) muß man in den

Lehrbüchern der Physik nachsehen. Hier genügt es, zu bemerken, daß in gleichweiten Röhren die Flüssigkeit an den Wänden auch gleich hoch gehoben wird, und daß man also durch den Gebrauch gleichweiter Glascylinder den gedachten Visirfehler größtentheils entfernen kann, wenn man über den Rand der Flüssigkeit wegvisirt. Eine zweite, und meistens wohl noch beträchtlichere Fehlerquelle, ist die Brechung der Lichtstrahlen in den Glascylindern, wodurch dieselben leicht vom geraden Wege abgelenkt werden können. Eine cylindrische Glasröhre, deren Wand allenthalben gleich dick und von gleich dichter Glasmasse ist, kann zwar die Lichtstrahlen nicht anders brechen, als ein bloßes Planglas, aber diese Eigenschaften werden auch nur höchst selten sein.

§. 178.

Weil das Visiren über die beiden Wasseroberflächen beschwerlich ist, so hat man die Canalwaage mit Diopterm versehen. Das vordere, oder Objectivdiopter, muß hier einen horizontalen Faden haben, weil es darauf ankommt, auf der Latte einen horizontalen Abschnitt zu bezeichnen. Das Oculardiopter ist ein Blech, entweder mit einem kleinen Loche, oder mit einer schmalen horizontalen Spalte. Man kann die Einrichtung so treffen, daß beide durch Ringe an die Glascylinder befestigt sind, der Faden des Objectivdiopters und das Loch des Oculardiopters aber durch Stellschrauben (oder auch durch bloßes Verschieben der Ringe an den Glascylindern, bis ihr Rand mit der Wasserfläche gleich hoch steht) jedesmal in die von beiden Wasserständen angezeigte Horizontalebene gebracht werden können. Die Sache ist an sich klar; allein da bei jeder neuen Aufstellung des Instrumentes ein neues Rücken der Diopteru erfordert wird, so ist der Gebrauch einer solchen Vorrichtung mit Mühe und Zeitverlust verbunden.

Besser sind daher die schwimmenden Diopteru, welche sich jedesmal vou selbst richtig einstellen. Bei'm Gebrauche des Wassers sind diese Diopteru auf blecherne, schwarz lackirte Cylinder gesetzt, welche, bis auf eine gewisse Tiefe in die Flüssigkeit sich eintauchend, in den umgebogenen Enden der Röhre schwimmen und einen solchen Durchmesser haben, daß sie eben noch Spielraum finden, um sich mit dem Wasserspiegel zu heben oder zu senken,

nicht aber durch ihr Anlehnen an die innere Wand der Röhre merklich aus der senkrechten Lage kommen. Zwischen der innern Röhrenwand und dem schwimmenden Cylinder wird also der Zwischenraum so klein sein müssen, als es, ohne die Bewegung des letzteren zu hindern, nur angeht. — Meistens läßt man hier die Dioptern ganz weg und zielt bloß über die oberen Ränder der Blechcylinder, welche zu diesem Behufe einen sichereren Anhalt geben, als die Ränder der Wasseroberflächen. Deßhalb müssen diese Cylinder so justirt sein, daß ihre oberen Ränder sich gleich hoch über den Wasserspiegel erheben. Weil aber hierbei ebenso, wie bei'm Visiren über die beiden Wasserflächen, drei Gegenstände von sehr verschiedener Entfernung zugleich in's Auge gefaßt werden müssen, nämlich der Rand zunächst am Auge, der andere weiter entfernte und die Nivellirlatte, so sind solche Vorrichtungen sehr verderblich für die Augen.

Bemerkenswerth in dieser Hinsicht ist die Keit'sche Quecksilberwaage, deren Einrichtung ganz auf dem Principe der Canalwaage beruht, nur daß statt des Wassers Quecksilber angewandt wird. Sie besteht aus einem gegen zwei Fuß langen Parallelepipedum von Mahagoniholz, an dessen beiden Enden senkrecht gegen die Längenaxe zwei würfelförmige oder cylindrische Höhlungen **A** und **B** (Taf. **XIV**., Fig. 9) gearbeitet sind, die durch einen hinreichend weiten Canal **MN** in Verbindung stehen. Wird in die eine Höhlung Quecksilber eingegossen, so tritt dasselbe durch den Canal auch in die andere und giebt auf diese Weise die horizontale Linie an. In den gedachten Höhlungen **A** und **B** schwimmen die gleichgestalteten soliden Körper aus Elfenbein mit ihren Dioptern **C** und **D**. An der einen Seite des Parallelepipedums ist ein Hahn **G** angebracht, aus welchem das Quecksilber in eine starke gläserne Flasche wieder abgezapft werden kann, wenn man das Instrument nicht weiter gebrauchen will. Auch können die Dioptern durch Blendungen, die sich am Rande des Parallelepipedums aufschieben lassen, gegen den Einfluß des Luftzuges und der Sonnenstrahlen geschützt und nach dem Gebrauche in besonderen Fächern aufbewahrt werden, die sich ebenfalls in dem hölzernen Parallelepipedo befinden. Damit bei'm Transporte des Instrumentes von Station zu Station das Quecksilber nicht leicht herausfließe, sind die Höhlungen **A** und **B**

durch besondere, mit Leder gefütterte Deckel verschließbar. Das Instrument, welches auf einem Stative ruht, ist übrigens unten bei **H** um ein Gewinde in der Verticalebene und um einen senkrechten Zapfen oder Cylinder in der Horizontalebene beweglich, und beide Bewegungen können durch das Anziehen von Schrauben gehemmt werden.

Der Gebrauch des Instrumentes ist ohne Weiteres klar. Ehe man durch die Dioptern hindurchvisirt, wird es gut sein, wenn man sie etwas anstößt, damit sie ihre richtige Stellung einnehmen, wenn sie vorher auf irgend eine Weise daran gehindert worden sein sollten. Wenn man bei'm Nivelliren aus der Mitte der Station das Instrument so gestellt hat, wie es das Visiren, z. B. in der Richtung von **C** nach **D**, erfordert, und man will dann in der entgegengesetzten Richtung von **D** nach **C** sehen, so kann zu dem Behufe das ganze Instrument horizontal umgedreht werden; man kann aber auch die Dioptern verwechseln, nämlich das Objectivdiopter **D** an die Stelle des Oculardiopters **C** bringen und umgekehrt.

§. 179.

Die Ziellinie der Dioptern muß mit der Oberfläche der Flüssigkeit parallel sein, und deßhalb wird vor dem Gebrauche des Instrumentes eine Prüfung und Rectification desselben nöthig, die man am besten auf folgende Weise anstellt.

Ueber dem einen Endpuncte **A** (Taf. **XIV.**, Fig. 1) einer Station **AB** von etwa 10 Ruthen stelle man das Instrument auf und beobachte die Instrumentenhöhe $AC = i$ und die Lattenhöhe $BD = l$. Diese wird, wenn die Ziellinie nicht horizontal ist, um eine gewisse Größe d fehlerhaft sein, so daß man die wahre Lattenhöhe $= l + d$ setzen kann. Ist hier d positiv, so ist die beobachtete Lattenhöhe zu klein; ist aber d negativ, so ist sie zu groß. Das richtige Gefälle von **A** nach **B** ist nun $l + d - i$. Man stelle sodann das Instrument auch über dem andern Endpuncte **B** der Station auf und beobachte ebenfalls die Instrumentenhöhe $= i'$ und die Lattenhöhe $= l'$. War vorhin die Lattenhöhe um das Stück d zu klein, so ist sie jetzt um eben diese Größe fehlerhaft, da die Neigung der Visirlinie gegen den Horizont und die Länge der Station

dieselbe ist. Man hat daher jetzt die wahre Lattenhöhe $= l' + d$ und die Steigung von B nach $A = i' - (l' + d)$. Da nun das Gefälle von A nach B der Steigung von B nach A gleich ist, so hat man

$$l + d - i = i' - l' - d$$

woraus folgt $d = \frac{(i + i') - (l + l')}{2}$

nach welcher Formel man den Fehler d berechnen kann. Findet man d positiv, so ist die Lattenhöhe zu klein, zu groß dagegen, wenn d negativ herauskommt.

Bei der Beobachtung auf der zweiten Station B läßt man, während man d ermittelt, die Zielscheibe der Nivellirlatte auf der beobachteten Höhe l' stehen, dieselbe aber nachher um soviel heben oder senken, als die Lattenhöhe l', nach Ausweisung des berechneten Fehlers d, zu klein oder zu groß ist. Alsdann hebt oder senkt man das eine Diopter mittels der zu diesem Behufe angebrachten Vorrichtung so lange, bis die richtig gestellte Zielmarke der Latte in der Visirlinie erscheint. Streng genommen darf hier nur das Objectivdiopter berichtigt werden, damit die Instrumentenhöhe keine Veränderung erleide, weil hiermit auch eine Aenderung der Lattenhöhe und folglich des Werthes von d verbunden sein würde. — Die Berichtigung der Dioptern kann dadurch bewirkt werden, daß man die schwimmenden Körper, worauf sie befestigt sind, leichter oder schwerer macht, damit diese sich mehr oder weniger in die Flüssigkeit eintauchen, bis der Zweck erreicht ist. Besser scheinen indeß Stellschrauben zu sein.

§. 180.

Die vorzüglichsten Nivellirinstrumente sind diejenigen, bei welchen die scheinbare Horizontale mittels einer Röhrenlibelle erhalten und das Auge bei'm Visiren durch ein gutes achromatisches Fernrohr mit einem Fadenkreuze unterstützt wird. Die Einrichtung der Röhrenlibelle ist in §. 60 im Allgemeinen schon beschrieben und dabei bemerkt worden, daß die Glasröhre nach einem sehr großen Kreisbogen gekrümmt sein solle. Diese Krümmung, welche durch Ausschleifen der Röhre mit Anwendung gewisser Handgriffe mehr durch Zufall erhalten wird, bestimmt hauptsächlich die Empfindlichkeit der Libelle. Eine voll-

kommen ebene Röhre würde die Luft nicht in einer Blase zusammenhalten, sondern sie bis nach beiden Enden zurückweichen lassen, oder wenn auch vermöge der Adhäsion an den Glaswänden eine Luftblase sich bilden sollte, so würde dieselbe doch bei der geringsten Neigung sich bis an's Ende der Röhre ausdehnen. — Daß die Empfindlichkeit der Libelle auch von ihrer innern Politur abhängt, übersieht man leicht; denn je mehr die Röhre innen geglättet ist, desto geringer ist die Adhäsion, sowohl der Luft, als des Weingeistes, und desto geringer auch der Reibungswiderstand gegen die Bewegung beider Flüssigkeiten. Wegen dieser Adhäsion und des Reibungswiderstandes, die auch bei der vollkommensten Politur immer noch in gewissem Grade Statt finden, ist auch die Länge der Luftblase durchaus nicht gleichgültig; denn eine zu kurze Luftblase überwindet jene Hindernisse nur mit Mühe und zeigt daher einen zu trägen Gang; eine zu lange Luftblase dagegen oscillirt zu lebhaft, selbst bei den geringsten Störungen der Libelle; sie ist daher schwer zum Stillstande zu bringen und verursacht unnützen Zeitverlust.

Bei einer Libelle müssen nun zwei wesentliche Eigenschaften untersucht werden, nämlich 1) ob der Spielpunct der Libelle richtig bezeichnet, und 2) ob die Libelle gehörig empfindlich sei.

Was die erste Rectification anlangt, so ist dieselbe so zu verstehen: In der gekrümmten Röhre steigt die Luftblase immer nach dem höchsten Orte und stellt sich daselbst in Ruhe. Weil wir die Röhre als kreisförmig gekrümmt annehmen, so ist es eigentlich gleichgültig, welche Stelle die Blase **CD** (Taf. **XIV.**, Fig. 23) in der Röhre **AB** behauptet, wenn die Grundlinie **MN**, worauf die Libelle ruht, horizontal ist; denn wenn man auch die Libelle so umdreht, daß **B** nach **A** kommt, so wird die Blase **CD** immer noch denselben Ort in der Röhre einnehmen. Allein andere Rücksichten machen es nöthig, daß sich die Blase in der Mitte der Röhre befinde, wenn die Stützpuncte **F** und **G** in horizontaler Linie liegen. Denn für's Erste hat die Röhre in dee Mitte ihre regelmäßige Krümmung; dann aber auch dehnt sich der Weingeist bei wachsender Temperatur aus und drängt die Luftblase in einen kleineren Raum zusammen. Befände sich diese nun nicht in der Mitte der Röhre, so würde die Zurückweichung der Blase von der Seite **AC** her, wo die größere Menge

Weingeist sich befindet, größer sein, als auf der andern Seite, weil dort die Grenze des durch die Temperatur ausgedehnten Weingeistes offenbar weiter vorrückt, als hier. Es wird folglich der Punct H, welcher die Mitte der Blase war, als bei einer niederen Temperatur die Stützpuncte F und G in horizontaler Linie lagen, bei höheren Wärmegraden diese Bedeutung nicht mehr haben; deßhalb kann aber auch dann begreiflich die Libelle zur genauen Horizontalstellung nicht mehr dienen, wenn man sich nach der Marke bei H, als der Mitte der Blase, richten wollte. Aus diesem Grunde muß auch die Röhre allenthalben gleichweit sein.

Aber in der Röhre wird sich ein Punct H (Taf. XIV., Fig. 22) von solcher Beschaffenheit befinden, daß, wenn sich die Blase um ihn, als ihren Mittelpunct, symmetrisch gelagert hat, die Ausdehnung des Weingeistes von beiden Seiten her gleichgroß ist und also jener Punct H immer Mittelpunct der Blase bleibt. Diesen Punct nennen wir den Spielpunct oder auch den Nullpunct, weil durch ihn der erste von den Strichen geritzt wird, welche zum genauen Einstellen der Luftblase dienen. Man sieht, daß, wenn die Röhre genau cylindrisch und an beiden Enden durch gleiche Formen begrenzt und verschlossen ist, der Spielpunct mit dem Mittelpuncte zusammenfällt.

Nun ist wohl einleuchtend, daß an der einmal durch einen Ritz bezeichneten Stelle des Spielpunctes nichts weiter geändert werden kann und auch, wenn anders die Libelle gut gearbeitet ist, nichts daran zu ändern sein wird. Indessen wird es doch gut sein und zur Beruhigung des Geometers dienen, wenn die Libelle bei verschiedenen Temperaturen auf die Probe genommen wird. Wenn man nämlich die Libelle (z. B. auf ähnliche Weise, wie bei der Correction der Meßtischlibelle §. 63, 1) so vorgerichtet hat, daß die Blase bei horizontaler Richtung der Stützpuncte genau einspielt, so stellt man bei einer andern sehr verschiedenen Temperatur die Unterlage der Libelle so, daß die Blase nach den aufgeritzten Zeichen ebenfalls einspielt, und sieht zu, ob dasselbe auch noch genau Statt hat, wenn man die Libelle umdreht.

Die Empfindlichkeit der Libelle ist diejenige Eigenschaft, bei welcher sie sehr kleine Neigungen gegen die Horizontalebene durch eine merkliche Verrückung der Luft-

blase noch anzeigt. Bei den sehr großen, gegen zwei Fuß langen Libellen giebt die Luftblase noch Neigungswinkel von weniger als $\frac{1}{8}$ Secunde an; bei den gewöhnlichen, gegen 6 Zoll langen Exemplaren ist die Empfindlichkeit geringer; doch wenn eine Libelle erst bei einer Neigung von 4 bis 5 Secunden einen Ausschlag giebt, so wird sie schon zu den schlechteren gerechnet.

Um die Empfindlichkeit einer Libelle zu prüfen, bedarf man entweder sehr genauer bis Secunden theilender Winkelmesser, oder man hat eigene Vorrichtungen zu diesem Behufe, z. B. das sogenannte Legebret. Dieses besteht aus zwei durch Charniere verbundenen Latten, welche wie ein Zirkel zusammengelegt sind, aber durch eine Micrometerschraube mehr oder weniger von einander entfernt werden können. Wenn die eine Latte auf fast horizontalen Unterlagen ruht, so kann man die andere mittels der Micrometerschraube genau horizontal richten. Man setzt nun die Libelle auf die obere Latte und dreht die Schraube so lange, bis die Blase genau einspielt. Hierauf dreht man wieder die Micrometerschraube auf oder ab, bis man an der Luftblase eine Fortrückung bemerkt, und ermittelt aus der Umdrehung der Schraube den Winkel, um welchen die obere Latte gehoben oder gesenkt wurde. Hierdurch wird also der kleinste von der Blase noch angezeigte Neigungswinkel oder die größte Empfindlichkeit der Libelle bekannt, und man weiß folglich auch die Grenze, bis zu welcher mittels der geprüften Libelle die Horizontalstellung sicher bewirkt werden kann.

Wenn man keine solche Vorrichtung hat, so kann man die mit dem Fernrohre verbundene Libelle eines Nivellirinstrumentes auch auf folgende Art auf die Probe nehmen. Nachdem man nach dem später anzuzeigenden Verfahren das Instrument so rectificirt hat, daß die Blase einspielt, wenn die Axe des Fernrohres horizontal ist, richte man das horizontale Fernrohr nach der etwa 500 Fuß entfernten Nivellirlatte **DB** (Taf. **XIV**., Fig. 1) und lasse die Zieltafel **D** genau nach der horizontalen Visirlinie **CD** stellen. Man hebe oder senke alsdann das Fernrohr so weit, bis die Luftblase um eine gewisse Größe, z. B. 2 Linien, fortgerückt ist, und lasse hierauf die Zieltafel abermals nach der geneigten Visirlinie **CM** einstellen. Aus dem Unterschiede **DM** beider Höhen der Zieltafel und der Entfernung **CD** weiß man den kleinen Winkel **DCM** =

$206265 \cdot \frac{DM}{CD}$ Secunden, also den Neigungswinkel für die beobachtete Fortrückung der Blase, woraus man auf den Neigungswinkel für jede andere Fortrückung durch eine einfache Proportion schließen kann. Wäre, z. B., $DM = 3$ Zoll, $CD = 500$ Fuß $= 6000$ Zoll, so wäre der Winkel $DCM = 206265 \cdot \frac{3}{6000} = 103{,}13$ Secunden. Betrug nun die Fortrückung der Blase 3 Linien, so käme auf 1 Secunde $\frac{3}{103{,}13} = \frac{1}{34{,}38}$ Lin., und da sich diese Größe nicht leicht mit bloßem Auge mehr abschätzen läßt, so wäre durch eine solche Libelle eine Genauigkeit von 1 Secunde nicht mehr zu erreichen.

Will man den Versuch auf diese Weise anstellen, so muß man auch ein hinreichend starkes Fernrohr haben, welches mit der Empfindlichkeit der Libelle wenigstens gleichen Schritt hält. Denn man begreift, daß eine Libelle, welche noch Neigungen von 2 Secunden anzeigt, unnütz sein würde, wenn im Fernrohre eine Neigung von 5 Secunden gar nicht bemerkbar wäre.

Durch solche Beobachtungen ist man also in den Stand gesetzt, aus den Abweichungen der Blase von ihrem Spielpuncte noch kleine Neigungen der Visiraxe gegen die Horizontallinie zu schätzen, und hiervon kann man bei'm Nivelliren oft einen nützlichen Gebrauch machen. Zu solchem Zwecke muß man aber auch überzeugt sein, daß die Neigungen der Axe den Abweichungen der Blase proportional sind, daß also einer doppelten Abweichung auch der doppelte Neigungswinkel zugehört, wie dieses bei guten Libellen wenigstens innerhalb einer gewissen Strecke der Röhre der Fall ist. Man überzeugt sich aber von dieser Eigenschaft durch den vorigen Versuch gar leicht, denn wenn man die Zieltafel der Nivellirlatte, z. B., um 6 Zoll aus der scheinbaren Horizontale rückt, so wird die Luftblase doppelt so viel abweichen müssen, als wenn die Hebung oder Senkung der Zieltafel nur 3 Zoll beträgt u. s. w. Auf den Unterschied zwischen wahrer und scheinbarer Horizontale hat man bei diesem Versuche nicht Rücksicht zu nehmen.

Zuletzt bemerken wir noch, wie man aus der bei einem bestimmten Neigungswinkel $= \varphi$ beobachteten

Fortrückung der Blase = a den Krümmungshalbmesser der Libellenröhre = r berechnen könne. Es sei also ZB' (Taf. XIV., Fig. 17) ein Bogen des Kreises, nach welchem die Röhre gekrümmt ist, KB = KB' = r der Krümmungshalbmesser und AB die horizontale Trennungsfläche zwischen dem Weingeist und der Luftblase. Wird nun die Libelle so geneigt, daß AB in die Lage A'B' kommt, wobei wir der Einfachheit wegen den Mittelpunct K der Libellenkrümmung nicht verrücken und also A'B' mit AB in die Peripherie desselben Kreises fallen lassen, so kann sich die Luftblase in der Lage A'B' nicht halten, sondern sie tritt sogleich wieder in die vorige Lage AB zurück. Der Strich also, welcher vorhin das Ende der Blase bei B bezeichnete, ist jetzt nach B' gerückt und steht daher um BB' = a von der Blase ab, welchem Bogen der Mittelpunctswinkel BKB' entspricht. Dieser Winkel ist aber genau gleich dem Winkel BCB' = φ, um welchen die Libellenaxe geneigt wurde; denn die Peripheriewinkel ABK und A'B'K stehen auf gleichem Bogen und sind daher gleich, und da außerdem auch die Dreiecke CHB und HB'K bei H gleiche Winkel haben, so sind auch BCH und HKB' gleich. Bei gleichförmiger Krümmung der Röhre ist also die Fortrückung der Blase dem Neigungswinkel der Libelle proportional.

Nach der angenommenen Bezeichnung ist nun, in Folge bekannter Sätze der Geometrie, $\varphi = 206265 \cdot \frac{a}{r}$ Secunden, woraus folgt

$$r = \frac{206265}{\varphi}\ a.$$

An der von Reichenbach und Ertel verfertigten Libelle am Königsberger Meridiankreise betrug die Verrückung der Luftblase 1 Par. Linie für 2'',227; hier ist also a = 1, φ = 2'',227, und daher der Krümmungshalbmesser der Röhre $= r = \frac{206265}{2,227} \times 1 = 92620$ Par. Linien = 643 Par. Fuß.

Diese Krümmung fand sich gleichförmig, als die Blase durch 4 Zoll fortgeführt wurde.

§. 181.

Wir kommen nun zur Beschreibung der Nivellirinstrumente mit Libelle und Fernrohr. Sie sind auf sehr verschiedene Weise eingerichtet worden, je nachdem man denselben Zweck durch verschiedene Mittel zu erreichen suchte; auch tragen sie mitunter besondere Vorrichtungen zur Erreichung von Nebenabsichten, z. B. zur Messung von Höhen- und Azimuthalwinkeln oder zur Ermittelung der Stationslänge aus einem einzigen Standpuncte. Eine der einfachsten und zweckmäßigsten Constructionen ist die von Reichenbach, welche in Fig. 19 (Taf. XIV.) vorgestellt ist, und die wir jetzt näher beschreiben wollen.

G G sind die Füße eines Dreifußes, ähnlich dem in §. 119 beschriebenen Theodolitendreifuße, welcher dem Instrumente zur Stütze dient. Bei **M** sind geschlitzte Schraubenmuttern für die mit conischen Spitzen versehenen Stellschrauben **bb**. Durch die Schrauben **cc** kann man die Muttern **MM** mehr oder weniger gegen die Stellschrauben **bb** anziehen und hierdurch den todten Gang der letzteren beseitigen. Die Stellschrauben **bb** ruhen mit ihren Spitzen in tellerförmigen Unterlagen mit conischen Vertiefungen, die auf dem Kopfe des Statives, welches einem Meßtischstative ähnlich sein kann, befestigt sind. Da die Spitzen der Stellschrauben genau in die Vertiefungen ihrer Unterlagen passen, so ist dadurch der feste Stand des Instrumentes auf dem Stative gesichert.

Die Füße **GG** sind durch drei horizontale Streben **HI**, **LK** von Messing verbunden, welche in der Mitte unter Winkeln von 120° zusammenlaufen und bei **IK** ein Lager für den conischen Zapfen **F** bilden. Dieser Zapfen geht durch die, den Kopf des Dreifußes bildende Scheibe **E** und ist am oberen Ende mit der kleinen Scheibe **D** fest verbunden. Um ihn kann die obere Vorrichtung mit Fernrohr und Libelle horizontal nach jeder Richtung gedreht werden, und diese Drehung ist identisch mit der groben Drehung bei'm Meßtisch oder dem Theodoliten.

AB ist ein viereckiger prismatischer Körper von Messing, welcher in der Mitte in eine kleine Scheibe **C** sich ausdehnt, die mit der Scheibe **D** fest verbunden ist. **N** und **P** sind die auf **AB** senkrecht stehenden Träger des Fernrohres **TU**. Der eine dieser Träger **P** steht unver-

rückbar fest, der andere **N** aber kann durch eine Schraube **W** gehoben oder gesenkt werden, wodurch man die Axe der Libelle **S** senkrecht gegen die verticale Umdrehungsaxe des Zapfens **F** stellen kann. Das Fernrohr **TU** trägt zwei Ringe von Glockenmetall, welche genau gleichen Durchmesser haben. Mittelst dieser Ringe ruht es in den **Y** förmigen Enden der Träger **N** und **P**. Durch diese Einrichtung, wodurch die Lagerstätten Tangenten der aufliegenden Ringe werden, wird das feste Aufliegen des Fernrohres weit besser erzielt, als wenn die Lager die Form von Halbkreisen hätten, die sich an die aufliegenden Ringe genau anschlössen. Damit das Fernrohr nach der Richtung seiner Axe von den Lagern nicht abgleiten könne, haben die Ringe entweder an den zugewandten oder an den abgekehrten Seiten einen Vorsprung **f** und **g**. Damit endlich das Fernrohr bei'm Transporte nicht aus den Lagern herausfalle, so werden dieselben mit bogenförmigen, um ein Charnier beweglichen Reifchen verschlossen.

Das Fernrohr ist 15 bis 18 Zoll lang und achromatisch mit etwa 30facher Vergrößerung. Mit ihm ist die Libelle **S** so verbunden, daß sie an dem einen Ende **R** um ein Charnier beweglich ist, am andern Ende aber durch eine sehr feine Schraube **Q** gehoben oder gesenkt werden kann. Hierdurch wird es möglich, das Instrument so vorzurichten, daß die Libelle einspielt, wenn die Axe des Fernrohres horizontal ist.

Endlich ist noch eine Vorrichtung angebracht, um mittelst einer Schraube die grobe Drehung um den Zapfen **F** zu hemmen und sodann mittelst einer Micrometerschraube, welche mit einem an der Scheibe **D** angebrachten Arme in Verbindung steht, eine feine Drehung des Fernrohres um jenen Zapfen zu bewirken. Da diese Vorrichtung der bei'm Meßtisch und Theodoliten beschriebenen ganz ähnlich ist, so sind hier die Abbildung und nähere Erklärung derselben weggelassen worden.

§. 182.

Ehe man nun ein Nivellirinstrument in Gebrauch nimmt, müssen an demselben folgende Prüfungen und Berichtigungen vorgenommen werden:

1) Die Libelle **S** (Taf. **XIV.**, Fig. 19) senkrecht gegen die Umdrehungsaxe **F** zu stellen.

Nachdem man das Instrument auf dem Stative aufgestellt hat, drehe man die Querstange **A B** über eine der Fußschrauben **b** und hebe oder senke die letztere so lange, bis die Libelle einspielt. Alsdann drehe man das Instrument um 180°, so zwar, daß, wenn vorhin das Ende **A** über der Schraube **b** stand, das Ende **B** darüber zu liegen kommt. Weicht jetzt die Libelle ab, so corrigire man die Hälfte der Abweichung mit der Stellschraube **b**, die andere Hälfte durch die Schraube **W**. Weil hierbei die entgegengesetzte Lage des Instrumentes nur nach dem Augenmaße erhalten wird, so kann das Hängen desselben auf die eine Seite nicht ganz ohne Einfluß sein. Man stelle daher jetzt, so weit es die Genauigkeit der Libelle erlaubt, die Drehungsaxe **F** vertical, welches, wie bei'm Theodoliten, am besten dadurch geschieht, daß man erst die Querstange **A B** mit der Richtung zweier Fußschrauben parallel stellt und durch eine derselben die Libelle zum Einspielen bringt. Die Querstange wird dann über die dritte Fußschraube geführt und mittelst dieser die Libelle abermals zum Einspielen gebracht. Ist so die Verticalität der Axe **F** beiläufig erhalten, so wiederholt man den vorigen Versuch nochmals, um die rechtwinkliche Lage der Libelle **S** gegen die Axe **F** genau herzustellen.

2) Ob das Fadenkreuz die richtige Lage habe. Wie dasselbe in den richtigen Abstand vom Augenglase zu bringen ist, wurde schon früher (§. 43 und 64) erklärt; wir haben nur zu zeigen, wie der horizontale Visirfaden wirklich horizontal zu richten und in die Ebene zu bringen sei, welche durch die Mittelpuncte der glockenmetallenen Ringe geht. Um den Visirfaden horizontal zu richten, stelle man zuerst, nach der in Nr. 1 gegebenen Anleitung, die Umdrehungsebene des Instrumentes horizontal, d. h., die Umdrehungsaxe **F** vertical. Man sehe dann durch das Fernrohr und merke einen Gegenstand, der vom horizontalen Visirfaden genau gedeckt wird. Bleibt der Gegenstand, wenn man das Fernrohr hin und her dreht, beständig auf dem Faden, so ist dieser horizontal; weicht aber der Gegenstand vom Faden ab, so muß man durch Drehen der Ocularröhre oder durch ein anderes zu Gebote stehendes Mittel den Faden in die erforderliche Lage bringen. Dreht man alsdann das Fernrohr in seinen Lagern um 180° herum und bleibt der Faden auch dann noch auf dem gedachten Gegenstande,

so liegt er auch in der Ebene, welche durch die Mittelpuncte der glockenmetallenen Ringe geht. Weicht aber in der zweiten Lage des Fernrohres der Faden vom Gegenstande ab, so muß man die Hälfte der Abweichung durch die Stellschräubchen a a des Fadenkreuzes verbessern.

3) Die Axe des Fernrohres mit der Libelle parallel zu stellen. Unter der Axe des Fernrohres haben wir hier die Linie zu verstehen, welche durch die Mittelpuncte der glockenmetallenen Ringe geht, und in welcher zugleich der Durchschnitt beider Kreuzfäden liegt. Nachdem man die vorigen Correctionen alle vollbracht und das Instrument durch seine drei Fußschrauben horizontal gestellt hat, dreht man das Fernrohr in seinen Lagern um, so daß das Objectivglas dahin zu liegen kommt, wo vorhin das Ocular sich befand. Hat nun die Visiraxe gegen die Libelle eine Neigung, so wird hierdurch das Doppelte dieser Neigung sichtbar. Man corrigire also die Abweichung der Libelle zur Hälfte durch die Schraube **W** und führe sodann durch die Schraube Q die Blase auf ihren richtigen Stand zurück. Diesen Versuch wiederholt man so lange, bis die Blase in beiden Lagen des Fernrohres richtig einspielt. Endlich wird man noch einmal die in Nr. 1 beschriebene Prüfung vornehmen, um zu erfahren, ob die Umdrehungsebene noch senkrecht auf der Axe **F** steht. Findet sich eine kleine Abweichung, so ist nach Beseitigung derselben das Instrument vollkommen richtig.

Es ist nicht nöthig, die Rectificationen gerade in der hier angezeigten Ordnung vorzunehmen; zuerst kann man auch durch Umdrehen des Fernrohres um seine Axe den horizontalen Visirfaden mit dem Mittelpuncte der Lagerringe in eine Ebene bringen, alsdann die Visiraxe mit der Libelle nach Nr. 3 parallel stellen und zuletzt die in Nr. 1 angeführte Berichtigung vornehmen. Doch scheint mir der vorhin beschriebene Gang der Correctionen der Sache angemessener.

4) Die in Nr. 3 angezeigte Parallelstellung der Visiraxe mit der Libelle gründet sich auf die Voraussetzung, daß die Durchmesser beider Lagerringe vollkommen gleich sind; allein diese Voraussetzung ist gewiß oft irrig, und wenn auch nur ein Unterschied beider Ringdurchmesser von $\frac{1}{10000}$ Zoll Statt fände, so könnte hierdurch doch die Horizontalität der Visirlinie um mehrere Secunden

fehlerhaft werden. Deßhalb aber wird noch eine Prüfung der Gleichheit der Ringdurchmesser nöthig und eine Correction durch Verschiebung des Fadenkreuzes, wenn die Ringdurchmesser ungleich sind. Es sei also AB (Taf. XIV., Fig. 21) die Visirlinie in der einen Lage und CE die Libelle, welche gegen die Visirlinie um den Winkel BCE $= \varphi$ geneigt sein mag. Wird nun das Fernrohr umgedreht, so sollte die Visiraxe genau wieder mit AB zusammenfallen, und dieses wird auch der Fall sein, wenn beide Ringdurchmesser gleich sind; allein wenn diese Bedingung nicht statt hat, so wird jetzt die Visirlinie AB′ gegen AB um einen Winkel $B'AB = \vartheta$ geneigt sein, während die Libelle C′E′ immer noch mit der Visiraxe AB′ denselben Winkel $AC'E' = BCE = \varphi$ bildet. Die Libelle C′E′ weicht aber von ihrer vorigen Lage um den Winkel $C'GE = \zeta$ ab, welcher Abweichungswinkel eben von der Luftblase angezeigt wird. Im Dreiecke C′AH ist nun Winkel $C'HB = CHE' = AC'H + C'AH = \varphi + \vartheta$, und im Dreiecke CGH der Winkel $C'GE = HCG + CHG = (\varphi + \vartheta) + \varphi = 2\varphi + \vartheta = \zeta$. Verschwindet also der Winkel B′AB oder wird $\vartheta = 0$, so ist $\zeta = 2\varphi$, oder die Libelle zeigt ihren doppelten Neigungswinkel gegen die Visirlinie an; ist aber ϑ nicht gleich 0, so zeigt die Libelle durch ihre Abweichung nicht bloß ihre doppelte Neigung gegen die Visirlinie, sondern auch noch den Winkel ϑ an. Von dieser Abweichung der Libelle $= 2\varphi + \vartheta$ wird nun die Hälfte $\varphi + \frac{1}{2}\vartheta$ corrigirt, während man doch, um die Libelle mit der Visirlinie parallel zu stellen, ihre Abweichung nur um φ corrigiren sollte. Es ist daher $\frac{1}{2}\vartheta$ zu viel corrigirt worden, so daß die Libelle immer noch um den Winkel $\frac{1}{2}\vartheta$ gegen die Visirlinie geneigt bleibt. Wird alsdann das Fernrohr wieder umgelegt, so wird die Libelle noch richtig einspielen, ohngeachtet sie mit der Visirlinie nicht parallel ist. Denn durch die Correction um $\varphi + \frac{1}{2}\vartheta$ wird die Libelle aus der Lage C′E′ in die Lage C′K gebracht, wo $AC'K = \frac{1}{2}\vartheta$ ist. Dreht man dann das Fernrohr um, so kommt die Visirlinie aus AB′ wieder nach AB, und die Libelle hat die Richtung CK′, und weil hierbei BCK′ ebenfalls $= \frac{1}{2}\vartheta = AC'K$ ist, so sind CK′ und C′K beide mit der Halbirungslinie des Winkels $BAB' = \vartheta$ parallel, so daß die Blase in beiden Lagen des Rohres richtig einspielen muß.

Um nun auch die Visirlinie für diesen Fall mit der Libelle parallel zu stellen, beobachte man, wie in §. 179, das Gefälle einer etwa 500 Fuß langen Station von beiden Endpuncten aus. Findet man da auf dem einen Puncte die Lattenhöhe $= l$, die Instrumentenhöhe $= i$, ist ferner f die Reduction auf den wahren Horizont und x diejenige Größe, um welche die Lattenhöhe wegen der Neigung der Visirlinie zu klein gefunden wird, so hat man die wahre Lattenhöhe $= l + x - f$ und daher das wahre Gefälle $= l + x - f - i$. Beobachtet man am andern Endpuncte die Lattenhöhe l' und die Instrumentenhöhe i', so ist die wahre Lattenhöhe $= l' + x - f$ und daher die Steigung $= i' - (l' + x - f) = i' - x + f - l'$. Da nun beide Höhenunterschiede gleich sind, so hat man

$$l + x - f - i = i' - x + f - l'$$

woraus folgt

$$x = \frac{(i + i') - (l + l')}{2} + f \text{ (Vergl. §. 179.)}$$

Bei so langen Stationen kommt also auch die Correction wegen des scheinbaren Horizontes und der Strahlenbrechung in Frage, was bei der kurzen Distanz in §. 179 nicht erforderlich war. Kommt nun x positiv heraus, so geht die Visirlinie zu tief, zu hoch aber, wenn x negativ wird. An der zweiten Station wird man also die Zielscheibe um die Größe x höher oder tiefer rücken und dann mittelst der Schräubchen a a den horizontalen Visirfaden wieder auf die Zielmarke zurückführen müssen, wodurch die Visirlinie genau horizontal wird.

5) Manche Nivellirinstrumente werden mittelst einer starken Scheibe, welche auf Stellschrauben ruht, wie der Meßtisch horizontal gestellt. Hier bleibt begreiflich die Rectification gerade so, wie vorhin angezeigt worden. Mitunter aber ist die Libelle nicht mit dem Fernrohre, sondern mit dessen Trägern N und P verbunden, und in diesem Falle bleibt zwar das Correctionsverfahren in Nr. 1 und 2 dasselbe, allein die Parallelstellung der Visiraxe mit der Libelle kann auf die angezeigte Weise nicht bewirkt werden, weil letztere durch das Umlegen des Fernrohres ihre Stelle nicht ändert. In diesem Falle bemerkt man, nachdem das Instrument genau horizontal gestellt worden, im Fernrohre einen entfernten Gegenstand, welcher vom

horizontalen Faden gedeckt wird. Hierauf legt man das Fernrohr um und dreht es um den Zapfen F (Fig. 19) wieder auf den bemerkten Gegenstand. Weicht dieser jetzt vom Faden ab, so corrigirt man die halbe Abweichung durch die Schraube W und bringt die Libelle, welche dadurch aus ihrer Lage kommt, durch ihre Stellschraube Q wieder zum Einspielen. Hierbei muß jedoch durch eine Marke dafür gesorgt sein, daß das Fernrohr beide Mal mit derselben Seite nach unten zu liegen kommt. Die Gleichheit der Ringdurchmesser wird gerade so, wie vorhin, geprüft.

6) Bei manchen Instrumenten ist das Fernrohr nicht zum Umlegen eingerichtet, sondern dasselbe ist auf den feststehenden Träger P um zwei Stifte, die von beiden Seiten her in den Lagerring greifen, auf und ab beweglich. Bei der Art Instrumenten wird das Fadenkreuz nicht weiter berichtigt, als daß der eine Faden genau horizontal zu liegen kommt. Die Herstellung der senkrechten Lage der Libelle gegen die Umdrehungsaxe wird in eben der angezeigten Weise bewirkt, und um dann die Visirlinie mit der Libelle parallel zu stellen, wird man durch Beobachtung an beiden Endpuncten einer etwa 500 Fuß langen Station nach der Formel in Nr. 4 die Größe x ermitteln, um welche die Visirlinie an der Latte zu hoch oder zu tief einschneidet, worauf man an dem zweiten Stationspuncte mittelst der Schraube W das Fernrohr so weit hebt oder senkt, bis der Visirfaden genau die auf ihre richtige Höhe gestellte Zielmarke trifft, zuletzt aber die Libelle durch ihre Stellschraube Q wieder zum Einspielen bringt. In mancherlei Hinsichten möchten solche Instrumente denen, bei welchen sich das Fernrohr umlegen läßt, noch vorzuziehen sein.

7) Das einfachste, mir zu Gesicht gekommene Nivellirinstrument besteht aus einer messingenen ebenen Scheibe, welche, der Leichtigkeit halber, radförmig durchbrochen ist und auf drei Stellschrauben ruht, vermöge welcher sie, auf die bekannte Weise, horizontal gestellt werden kann. Die drei stählernen Schrauben sind conisch zugespitzt und ruhen in drei metallenen conischen Vertiefungen. Damit aber die Scheibe auf dem Stative, welches aus einem scheibenförmigen Kopfe mit drei beweglichen Füßen besteht, eine feste Stellung gewinne, so ist auf dem Stativkopfe eine starke elastische Stahllamelle befestigt, welche

mittelst eines an ihrem freien Ende befindlichen Schlitzes die gedachte radförmige Scheibe an einem, an der unteren Seite befindlichen, Knopfe faßt und sie auf diese Weise gegen den Stativkopf drückt.

Das Fernrohr ruht auf dem etwas breiten Kranze der radförmigen Scheibe bloß mittelst zweier, an der unteren Seite genau eben geschliffenen messingenen Klötzchen und kann nach allen Richtungen gedreht werden. Damit es aber nicht von der Scheibe abgleiten und bei'm Umdrehen nicht aus der Richtung des Scheibendurchmessers weichen könne, ist an ihm ein Stift senkrecht befestigt, welcher in ein, im Mittelpuncte der Scheibe befindliches Loch hinabreicht.

Auf dem Fernrohre ruht eine röhrenförmige Wasserwaage, mit derjenigen Correctionsschraube, durch welche man bewirkt, daß bei horizontaler Lage der Scheibe die Blase in der Mitte steht. Diese Wasserwaage kann auch vom Fernrohre abgenommen und unmittelbar auf die Scheibe gesetzt werden.

Vorrichtungen, um die Horizontalität der Visirlinie, bei horizontaler Lage der Scheibe, herzustellen, sind bei diesem Instrumente nicht vorhanden. Der Künstler muß also dafür gesorgt haben, daß bei horizontaler Lage der Scheibe die Visirlinie wenigstens beinahe horizontal ist. — Deßhalb wird man auch mit diesem Instrumente alle diejenigen Operationen nicht anstellen können, bei welchen die genaue Horizontalität der Visirlinie nothwendige Bedingung ist; man wird also lediglich auf das Nivelliren aus der Mitte oder aus beiden Endpuncten der Station beschränkt sein.

Indessen ist es doch nicht unmöglich, auch horizontale Visuren zu erhalten. Man kann nämlich, nach Nro. 4 und 6, die Größe x bestimmen, um welche die Visirlinie bei horizontaler Lage der Scheibe auf eine gewisse Weite an der Latte zu hoch oder zu tief geht, und wenn man dann die Scheibe mittelst ihrer Stellschrauben so weit hebt oder senkt, bis der Visirfaden um die Größe x an der Latte höher oder tiefer einschneidet, so hat man eine horizontale Visirlinie. Bemerkt man hiebei die Abweichung der Blase an der auf dem Fernrohre ruhenden Libelle, so hat man in der Folge immer eine horizontale Visur, wenn man die Scheibe erst horizontal gestellt hat

und dann die Blase wieder auf die bemerkte Abweichung bringt.

§. 183.

Ueber den Gebrauch eines solchen Instrumentes ist kaum etwas zu bemerken nöthig. Nachdem es möglichst genau rectificirt worden, hat man jedesmal, so oft man durch die Fuß- oder Stellschrauben die Libelle nach zwei verschiedenen Richtungen hin zum Einspielen gebracht hat, eine durch die Visirlinie gegebene scheinbare Horizontale, mag man das Fernrohr drehen, nach welcher Richtung man will. Wird dann im Fernrohre der Punct bemerkt, wo die Latte vom horizontalen Visirfaden geschnitten wird, so erhält man begreiflich unmittelbar die Lattenhöhe. Die Instrumentenhöhe ist die Lothrechte vom Standpuncte des Instrumentes bis zur Ziellinie, und es wird dieselbe mittels eines hölzernen Maßstabes gemessen.

§. 184.

Es läßt sich nicht leugnen, daß Nivellirinstrumente nach der vorhin beschriebenen Einrichtung ihrem Zwecke vollkommen entsprechen und eine Genauigkeit der Resultate gewähren, wie sie, in Rücksicht auf jedes practische Bedürfniß nur immer gefordert werden kann. Indessen läßt sich auch ebensowenig verkennen, daß noch manche zweckmäßige und die Arbeit erleichternde Vorrichtungen angebracht werden könnten, ohne daß eben das Instrument zu sehr überladen würde.

1) Die Schraube **W** (Taf. **XIV.**, Fig. 19) bleibt nach der Rectification des Instrumentes gewöhnlich unbenutzt; sie ist indessen gewiß das beste Mittel, die Horizontalität der Ziellinie jedesmal genau und ohne Zeitverlust zu erhalten. Denn es ist klar, daß bei'm Nivelliren die Horizontalität der ganzen Drehungsebene nicht nothwendig ist; es wird nur erfordert, daß die Visirlinie genau und der Visirfaden ungefähr horizontal seien. Die letztere Bedingung wird durch die Horizontalstellung des Instrumentes mittels seiner Fußschrauben erhalten; es ist aber dabei nicht der mindeste Einfluß auf die Genauigkeit des Resultates zu fürchten, wenn auch die Luftblase um ein Paar Theilstriche aus der Mitte der Röhre abweicht. Hat man nach dieser vorläufigen Horizontalstellung das Fernrohr gegen die Latte gerichtet, so wird mittels der Schraube

W das Fernrohr so weit gehoben oder gesenkt, bis die Libelle genau einspielt, wo dann die Visirlinie genau horizontal sein wird. Nur muß sich an der Schraube W eine Marke befinden, auf welcher sie stehen muß, wenn die Libelle gegen die Umdrehungsaxe senkrecht sein soll, damit man sie jedesmal, nach gemachter Beobachtung, wieder auf diese Marke zurückführen könne. —

Es ist wohl ohne Weiteres klar, daß auf diese Weise die Richtigkeit und Schnelligkeit der Arbeit bedeutend gefördert wird. Die genaue Horizontalstellung des Instrumentes mittels seiner Fußschrauben, die gewöhnlich nur ein grobes Gewinde haben, ist nicht nur oft sehr zeitraubend, sondern es wird die Horizontalität durch mehrfache Einwirkungen auf das Instrument, durch Wind, Nachgeben des Bodens u. dergl., auch leicht wieder gestört; meistens weicht auch die Blase ab, wenn, wie bei'm Nivelliren aus der Mitte der Stationen erfordert wird, das Fernrohr um 180° in der Horizontalebene gedreht werden muß. Man ist dann genöthigt, die verdrießliche Arbeit des Horizontalstellens von Neuem zu beginnen, und nach erhaltener Horizontalität kann wieder derselbe Uebelstand eintreten. Mittels der Schraube W kann man aber die Horizontalität der Ziellinie ohne allen Zeitverlust erhalten und augenblicklich wiederherstellen, wenn sie zufällig gestört werden sollte.

2) Dieselbe Schraube hat Stampfer als Micrometerschraube benutzt, um kleine Neigungswinkel der Ziellinie gegen die scheinbare Horizontale zu messen. Sie muß für diese Absicht sehr genau gearbeitet und durch eine besondere Vorrichtung gegen den todten Gang verwahrt sein, was bei Stampfer's Instrument durch eine Feder bewirkt wird, welche die Schraubenspindel mit ihrer Mutter in beständiger Spannung erhält. Desgleichen wird auch eine Vorrichtung erfordert, um nicht nur die Anzahl der Umdrehungen der Schraube zu zählen, sondern auch noch sehr kleine Theile, etwa 1000tel einer Umdrehung, abzumessen. Man hatte zwar schon früher versucht, den Abweichungswinkel des Fernrohres von der Horizontale durch Gradbogen zu messen; allein man erhielt nicht die Genauigkeit, die bei solchen Messungen erfordert wird.

Von der so vorgerichteten Micrometerschraube läßt sich nun für das Nivelliren ein wichtiger Gebrauch in den Fällen machen, wo man gern sehr lange Stationen neh-

men möchte, die horizontale Visirlinie aber allzubald den Boden trifft oder über der Latte weggeht. Man bedient sich in dieser Absicht einer Latte mit zwei Zielscheiben, deren Zielmarken einen bestimmten Abstand, z. B. von 6 oder 8 Fuß, haben. Es sei in Fig. 16 (Taf. XIV.) AB das Instrument, CG die Latte mit ihren Zielscheiben F und E, deren Abstand EF = a sein und von denen die unterste um das Stück CF vom Boden abstehen mag.

In A richte man die mittels der Fußschrauben beiläufig horizontal gestellte Visirlinie nach der Latte, stelle sie dann mittels der Schraube W (Taf. XIV., Fig. 19) genau horizontal und bemerke den Stand der Schraube, d. h. die vom Index angegebene Anzahl der Umdrehungen und der Theile einer Umdrehung. Der dießmalige Stand der Schraube sei $= \alpha$. Vermittels der Micrometerschraube W stelle man dann den Visirfaden auf die obere Zielscheibe E und bemerke den Stand der Schraube $= \beta$. Hier sieht man nun gleich, daß $\alpha - \beta$ Umdrehungen erforderlich waren, um das Fernrohr durch den Winkel GBE fortzuführen. Führt man endlich noch das Fernrohr auf die untere Zielscheibe F, und ist nun der Stand der Schraube $= \gamma$, so kommen auf den Winkel EBF $\beta - \gamma$ und auf den Winkel GBF $\alpha - \gamma$ Umdrehungen der Schraube. Die Winkel GBE, FBF und GBF verhalten sich aber, wie die zugehörigen Umdrehungszahlen der Schraube, wie $\alpha - \beta$, $\beta - \gamma$, $\alpha - \gamma$. Da diese Winkel nur klein sind, so werden sich ihre Tangenten GF und GE wie sie selbst, also auch wie die zugehörigen Umdrehungszahlen der Schraube verhalten. Man wird nämlich haben:

$$EF : GF = EBF : GBF$$

d. i. $$a : GF = \beta - \gamma : \alpha - \gamma$$

daher $$GF = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}\, a,$$

und wenn man hierzu CF = b addirt, so hat man $CG = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}\, a + b$. Dieses ist nun die Lattenhöhe, die, wenn sie um die Instrumentenhöhe AB vermindert wird, das Gefälle von A nach C giebt.

Um dieses durch ein Beispiel zu erläutern, sei an der Scala der Schraube bei horizontaler Richtung der Ziellinie $\alpha = 11{,}148$ Umdrehungen beobachtet worden; als

man ferner das Rohr auf die beiden Zielscheiben richtete, habe man $\beta = 21{,}252$ und $\gamma = 20{,}019$ gefunden. Der Abstand beider Zielscheiben sei 6 Fuß, und die untere 1 Fuß über den Boden erhaben. Hier ist nun $\alpha - \gamma = -8{,}871$, $\beta - \gamma = +1{,}233$, daher die Lattenhöhe $= \frac{-8{,}871}{1{,}233} \times 6 + 1$ $= -42{,}17$ Fuß. Daß hier die Lattenhöhe negativ wird, zeigt an, daß sie nicht **unter** der scheinbaren Horizontale, wie in Fig. 16, sondern **über** derselben liegt, wie in Fig. 15. Bei der horizontalen Richtung der Visirlinie **BG** nämlich zeigte die Scala $\alpha = 11{,}148$, bei der Richtung **BE** nach der oberen Zielscheibe $\beta = 21{,}252$, und bei der Richtung **BF** nach der unteren Zielscheibe $\gamma = 20{,}019$; es kommen folglich auf den Winkel **GBF** $20{,}019 - 11{,}148 = 8{,}871$, und auf den Winkel **FBE** $21{,}252 - 20{,}019 = 1{,}233$ Umdrehungen der Schraube. Da nun **EF : FG = EBF : FBG** $= 8{,}871 : 1{,}233$, so folgt **FG** $= 7{,}195 \times$ **EF** $= 43{,}17$ Fuß, und wenn hiervon **FC** $= 1$ Fuß abgezogen wird, so erhält man die Lattenhöhe **CG** $= 42{,}17$ Fuß. Zu dieser müßte nun die Instrumentenhöhe AB addirt werden, um die Steigung von **A** bis **B** zu erhalten, statt dessen man freilich auch die negative Lattenhöhe von der Instrumentenhöhe subtrahiren kann. Es lassen sich also auf diese Weise sehr große Höhenunterschiede durch eine einzige Beobachtung finden.

3) Weil aber hierbei auf sehr weite Distanzen nivellirt wird, so macht sich eine Correction wegen der Strahlenbrechung und die noch bedeutendere Reduction auf den wahren Horizont nöthig, zu welchem Behufe man die horizontale Entfernung **BG** (Taf. **XIV.**, Fig. 16) wissen muß. Dieses muß nun beim Nivelliren mit gewöhnlichen Instrumenten durch unmittelbares Messen mit der Kette, oder wenn dieses, wegen zwischenliegender Hindernisse, nicht anginge, auf irgend eine andere bekannte Weise ermittelt werden. Mittels der vorhin gedachten Micrometerschraube läßt sich jedoch die Entfernung **BG** $= d$ ohne weitere Mühe mit einer Genauigkeit finden, die der Messung mit einer gewöhnlichen Kette nur wenig nachgiebt.

Man hat nämlich **GF** $=$ **BG** $\cdot$ tg **GBF** $= d$ tg **GBF** und **GE** $= d \cdot$ tg **GBE**, also **EF** $= a = d$(tg **GBF** $-$ tg **GBE**). Weil aber hier nur kleine Winkel vorkommen, so kann man die Tangenten mit den Bögen verwechseln, und man

hat folglich, wenn man die Winkel in Secunden ausdrückt, $a = d \cdot \frac{GBF - GBE}{206265} = \frac{EBF}{206265} \times d$. Es sei nun der in Secunden ausgedrückte constante Winkel, um welchen das Fernrohr bei einer Schraubenumdrehung gehoben oder gesenkt wird, $= g$, so ist der Winkel EBF $= g\ (\beta - \gamma)$, weil nach dem Vorigen $\beta - \gamma$ Schraubenumdrehungen darauf gehen, und man hat also

$$a = \frac{g\ (\beta - \gamma)\ d}{206265}$$

und folglich $d = \frac{206265}{g\ (\beta - \gamma)}\ a$.

Um aber von dieser Formel Gebrauch machen zu können, muß man die constante Zahl $\frac{206265}{g}$ vorher aus Versuchen ermittelt haben. Zu diesem Behufe muß man, außer der Anzahl der Schraubengänge, die auf den Sehewinkel EBF des Zielscheibenabstandes gehen, noch die Distanz BG mit möglichster Genauigkeit abmessen, da man dann $\frac{206265}{g} = \frac{d}{a}\ (\beta - \gamma)$ hat, woraus sich auch g ergiebt. Diese Beobachtung muß man mehrmals und unter verschiedenen Verhältnissen, namentlich an verschiedenen Stellen der Schraube, wiederholen und aus den verschiedenen Resultaten das Mittel nehmen. Setzt man nun $\frac{206265}{g} = k$, so hat man

$$d = \frac{k\,a}{(\beta - \gamma)}.$$

Wäre, z. B., $k = 324{,}00$, so würde für das vorige Beispiel, wo $\beta - \gamma = 1{,}233$ und $a = 6$ Fuß war, $d = 1576{,}6$ Fuß folgen. — Auf den Winkel EBF hat die Strahlenbrechung keinen Einfluß, weil sie die beiden Zielscheiben E und F um gleichviel erhöht.

Aber der Winkel GBF wird durch die Wirkung der Strahlenbrechung zu klein gefunden und daher auch die entsprechende Anzahl von Schraubengängen zu klein. Dieß hat auch eine zu kleine Lattenhöhe zur Folge, während durch den Unterschied zwischen wahrer und scheinbarer Horizontale die Lattenhöhe zu groß gefunden wird. Die

Correction, wegen beider Ursachen, wird jedoch gerade so ausgeführt, wie wir in §. 173 gezeigt haben; es muß nämlich die nach voriger Rechnung gefundene Lattenhöhe noch um $0{,}4347 \cdot \frac{d^2}{r}$ (unter r den Erdhalbmesser verstanden) verkleinert werden. Setzt man daher statt d seinen Werth, so findet man die Verkleinerung $\frac{0{,}4347\, k^2 a^2}{r\,(\beta-\gamma)^2}$, was, für die obigen Werthe von k und a und für $r =$ 19597758 Fuß, $\frac{0{,}0838}{(\beta-\gamma)^2}$ beträgt. In dem obigen Beispiele wäre demnach die Lattenhöhe um 0,055 Fuß zu vergrößern.

Bei sehr großen Distanzen wird es rathsam sein, den Abstand der Zielscheiben bis auf 12 Fuß zu verkleinern.

Der Gebrauch der Micrometerscheibe läßt sich auch bis zur Messung größerer Höhen ausdehnen, wenn sie einen großen Spielraum, etwa von 8 Graden, hat. Da aber die Anzahl der Schraubengänge nicht eigentlich den Winkeln, sondern den Sehnen der Winkel proportional ist, so erfordert die Messung größerer Höhen- oder Tiefenwinkel noch besondere Rücksichten, die wir hier nicht weiter auseinandersetzen können.

Daß man übrigens mit Hülfe der Schraube ebenso gut aus der Mitte, wie aus den Endpuncten einer Station nivelliren könne, ist an sich klar.

Auch sieht man, daß man das Fernrohr des Nivellirinstrumentes zu einem Reichenbach'schen Distanzmesser einrichten und so die Längen der Stationen ohne unmittelbare Messung finden könne.

4) Endlich ist es noch sehr zweckmäßig, wenn das Instrument mit einer horizontalen Kreisscheibe und einem Nonius versehen ist, um Azimuthalwinkel wenigstens bis auf Minuten genau abzulesen. Die Anwendbarkeit des Instrumentes wird dadurch sehr viel ausgedehnter, indem man in den Stand gesetzt wird, mit dem Nivellement zugleich geometrische Horizontalaufnahmen zu verbinden. Besonders aber dürfte ein solches, mit Azimuthalkreis und Distanzmesser versehenes Instrument, zur Fertigung genauer Terraincharten sich eignen, weil es nicht nur die Aufnahme der Horizontalprojection sehr erleichtert, sondern

auch mit dessen Hülfe die horizontalen Durchschnitte der Berge sich sehr genau und leicht bestimmen lassen. — Für die Zwecke des Nivellirens von wesentlichem Nutzen ist aber der Horizontalkreis dann, wenn ein Nivellementszug nicht in gerader Richtung fortgesetzt wird, oder wenn mehre im Horizont umherliegende Puncte aus einem einzigen Standpuncte nivellirt werden sollen und man zugleich die Winkel verlangt, unter denen die nach verschiedenen Puncten gerichteten Ziellinien sich schneiden.

§. 185.

Wir kommen nun zur Beschreibung der oft erwähnten Nivellirlatten und der daran verschiebbaren Zieltafeln. Die Latten sind 12 Fuß lang und $1\frac{1}{2}$ Zoll in's Geviert, aus trockenem und geradfaserigem Tannenholze gearbeitet und an beiden Enden mit einem $\frac{1}{2}$ Zoll hohen eisernen Schuh beschlagen, damit sie desto besser gegen Abnutzung gesichert seien (Taf. XIV., Fig. 10). Gegen den Einfluß der Feuchtigkeit können sie mit siedendem Leinöl getränkt werden. Weil so lange Stangen bei'm Transport unbequem sind und leicht zerbrechen, so setzt man sie gern aus zwei Theilen zusammen, die man nach Belieben wieder auseinander nehmen kann. Oben und unten ist die Latte viereckig durchlocht und in die Löcher sind kleine Rollen eingesetzt, über welche eine Schnur geschlagen wird, deren beide Enden an der Zielscheibe C befestigt sind. Indem man also an der Schnur zieht, kann man nach Belieben die Zielscheibe heben oder senken. Auf derjenigen Seite, welche der Zielscheibe entgegengesetzt ist, wird die Latte von unten nach oben in Fuße und Zolle getheilt, so zwar, daß man die Theilstriche der Fuße von denen der Zolle leicht unterscheiden kann. Die Ziffern, womit die Theilstriche zu bezeichnen sind, werden in die Latte eingebrannt.

Die Zielscheibe C besteht entweder aus Holz oder aus Eisenblech und bildet entweder ein Quadrat von 1 Fuß Seite, oder einen Kreis von ebenso großem Durchmesser. Damit sie an der Latte stetig auf- und abgehe, sind auf ihrer Rückseite zwei Rippen a b und c d (Taf. XIV., Fig. 11) befestigt, welche eine Nuth bilden, in welche die Latte mit nur geringem Spielraume hineinpaßt. Zur Sicherung des steten Ganges können zwischen die Nuth und die Latte Federn eingelegt werden. Die Schrauben r r

dienen, die Zieltafel in jeder Stellung an der Latte zu befestigen.

Auf der Nuth ist eine messingene Platte e befestigt, welche bei f einen Ausschnitt hat, dessen Tiefe hn gerade 1 Zoll beträgt und in Linien abgetheilt ist. Die Kante tn des Ausschnittes reicht gerade bis zur Mitte der Scheibe und dient also, an der eingetheilten Seite der Latte die Höhe abzulesen, bis zu welcher die Mitte der Scheibe, als die eigentliche Zielmarke, erhoben wurde. Da die Latte nur bis auf Zolle getheilt ist, so dient die Scala nh, noch die Linien abzulesen, die begreiflich von oben nach unten gezählt werden müssen. Denn wenn, z. B., der Strich m der Latte eine Höhe von 7′9″ bezeichnete, so müßte doch das Stück nm dazu kommen, um die Höhe der Zielmarke zu erhalten.

Um die Mitte der Zielscheibe aus der Ferne möglichst wahrnehmbar zu machen, hat man mancherlei Vorschläge gethan. Das Beste ist ein Anstrich mit schwarzer und weißer Oelfarbe, nach Fig. 10 und 12 (Taf. **XIV.**). Hebt oder senkt man dann die Scheibe an der Latte so lange, bis der horizontale Visirfaden die beiden weißen Ausschnitte a und b halbirt, so ist die Mitte der Scheibe auf das Genaueste getroffen. Nach v. Mitis soll die Mitte der Scheibe als Zielmarke durch einen 2 Linien breiten horizontalen Strich von heller, z. B. rother Farbe bezeichnet werden; zu beiden Seiten desselben soll man 8 Linien breite Streifen von weißer, dann ebenso breite von schwarzer Farbe ziehen und hernach dem noch übrigen Theile der Tafel eine gleichmäßige Färbung geben.

Die so eingerichtete Nivellirlatte wird von einem Gehülfen auf den Pfahlkopf, womit das Ende der Station bezeichnet ist, senkrecht aufgestellt, zu welchem Zwecke er sich eines vom oberen Ende der Latte herabhängenden Lothes bedienen kann. Während nun der Geometer durch das horizontal gerichtete Diopter oder Fernrohr nach der Latte zielt, hebt oder senkt der Gehülfe, auf gegebene Winke, die Ziescheibe mittels des Fadens so lange, bis die Zielmarke genau in der horizontalen Ziellinie steht. Der Gehülfe stellt hierauf das Zielbret mittels der Schrauben rr (Taf. **XIV.**, Fig. 11), oder, wenn sein Arm nicht so hoch reicht, mittels Andrücken des Fadens an die Latte fest und lies't die beobachtete Lattenhöhe ab.

Weil das Einwinken der Zielscheibe, besonders auf weite Distanzen, mühsam ist und der Gehülfe aus Unachtsamkeit oder Ungeschicktheit die Maße oft falsch ablies't, so hat man für diejenigen Instrumente, welche mit kräftigen Fernröhren versehen sind, andere Einrichtungen der Latten vorgeschlagen, auf welchen man ihre beobachtete Höhe ohne Weiteres ablesen kann. Sie müssen dann breiter, etwa 5 Zoll breit, sein, und ihre Unterabtheilungen sind durch sehr sinnfällige Zeichen kenntlich zu machen, etwa wie in Fig. 25 (Taf. **XIV.**) angedeutet ist. **a**, **b**, **c**, **d** bedeuten Viertelfuße, welche durch die schwarzen und weißen Zwischenräume in Zolle abgetheilt sind. Jeder Zoll wird ferner durch die Spitzen der schwarzen und weißen Dreiecke in Viertel zerlegt, wodurch man in den Stand gesetzt wird, auch noch kleinere Theile nach dem Augenmaße zu schätzen. Um die Zahlen, womit die Fuße bezeichnet sind, im astronomischen Fernrohre aufrecht zu sehen, muß man begreiflich die Latte verkehrt aufstellen.

§. 186.

Das in §. 169 nachgewiesene Verfahren zur Ermittelung des Höhenunterschiedes zweier Oerter nennt man ein einfaches Nivellement, und es kann dasselbe, theils wegen der Unvollkommenheit des Gesichts und des Fernrohrs, theils aber auch wegen der beschränkten Höhe der Latte sich nur auf verhältnißmäßig kurze Entfernungen erstrecken, indem die zu weit entfernte Zieltafel nicht mehr deutlich wahrnehmbar sein, oder auch die Ziellinie zu bald den Boden treffen, oder über der Latte wegstreichen würde. Um nun den Höhenunterschied zweier sehr weit entfernter Oerter zu finden, muß man ein zusammengesetztes Nivellement anwenden, d. h., man muß von dem einen Ende bis zum andern das einfache Verfahren mehrmals wiederholen. Sind also **A** und **B** (Taf. **XIV.**, Fig. 27) zwei Oerter von solcher Entfernung, daß man ihren Höhenunterschied nicht mit einmaliger Anwendung des Instrumentes ermitteln kann, so muß man die ganze Entfernung in mehre Stationen von angemessener Länge **AC**, **CD**, **DE**, **EB** zerlegen und den Höhenunterschied der Endpuncte einer jeden Station besonders ermitteln. Hierbei dient als Grundsatz, daß man von Station zu Station immer nach derselben Richtung, z. B. von **A** nach **B**,

fortgehe, wodurch jeder Höhenunterschied entweder als ein Steigen oder ein Fallen bemerkbar wird. Werden beide Arten durch entgegengesetzte Vorzeichen characterisirt, so giebt die Summe der Höhenunterschiede aller Stationen den Höhenunterschied der Endpuncte A und B. Indessen ist es nicht gerade nöthig, zu jener Bezeichnung seine Zuflucht zu nehmen, sondern es ist hinreichend, bei jedem Höhenunterschiede zu bemerken, ob er nach der Richtung des ganzen Nivellementzugs ein Fallen oder ein Steigen ist. Summirt man dann alle Steigungen und ebenso auch alle Gefälle, so giebt der Unterschied beider Summen den Höhenunterschied der äußersten Puncte A und B, und zwar ist dieser nach der angenommenen Richtung eine Steigung oder ein Gefälle, je nachdem die Summe aller Steigungen, oder die aller Gefälle, die größere ist. Hat man, z. B.:

Station.	Gefälle.	Steigung.
von A nach C	7′ 8″ 9‴	
von C nach D	5 6 7	
von D nach E		0′ 11″ 2‴
von E nach B		6 3 5
so ist die Summe	13 3 4	7 2 7

also von A bis B 13′3″4‴—7′2″7‴=6′0″9‴ Gefälle.

Es ist hierbei nicht nothwendig, daß alle Stationspuncte in einer geraden Linie liegen. Wenn es nur darauf ankommt, den Höhenunterschied der äußersten Puncte A und B zu wissen, so wird man den Zug der Stationen so wählen, daß man am schnellsten zum Ziele kommt und auf die geringsten Hindernisse stößt. Begreiflich wird in dieser Hinsicht die gerade Linie zwischen A und B nicht immer die vortheilhafteste sein. Die Absicht, in welcher ein Nivellement ausgeführt wird, kann es aber auch mit sich bringen, daß der Zug der Stationen entweder gerade ist, oder durch bestimmte Zwischenpuncte geht, z. B., wenn auch die Höhenunterschiede solcher Zwischenpuncte ermittelt werden sollen.

Die Endpuncte der Stationen werden mit Pfählen bezeichnet, welche, dem Zwecke der Sache gemäß, am

besten so tief eingeschlagen werden, daß ihre Köpfe mit dem Boden gleich hoch sind. Um ihnen noch die erforderlichen Nummern beischreiben zu können, wird es zweckmäßig sein, ihnen die Gestalt in Fig. 20 (Taf. XIV.) zu geben. Auf die mit dem Boden gleich eingeschnittene Kerbe **A** wird die Nivellirlatte gesetzt.

§. 187.

Wie lang man die Zwischenstationen zu nehmen hat, hängt theils von der Beschaffenheit des Instrumentes, womit man arbeitet, theils von der Beschaffenheit des Bodens ab. Bei'm Gebrauche der Setzwaage oder der Rothischen Bergwaage kann begreiflich keine Station länger genommen werden, als das Richtscheit es erlaubt. Durch diese Instrumente erfährt man zugleich den Höhenunterschied der beiden Stationspuncte und ihre horizontale Entfernung, und wenn man daher in gerader Richtung fortwägt, so wird auch der Horizontalabstand der beiden äußersten Puncte gefunden.

Bei solchen Instrumenten, bei welchen durch bloße Dioptern in der Richtung der scheinbaren Horizontale nach der Latte visirt wird, wird man die Stationen nicht leicht länger, als etwa 10 Ruthen nehmen können, weil sonst das Zusammentreffen des Visirfadens mit der Zielmarke von dem unbewaffneten Auge nicht mehr mit Bestimmtheit wahrgenommen werden könnte. Beträchtlich längere Stationen kann man dann nehmen, wenn das Auge durch ein Fernrohr unterstützt wird; bis zu welcher Länge man aber ohne Gefahr für die Genauigkeit gehen dürfe, wird man am besten durch Prüfung des zu Gebote stehenden Instrumentes finden. In bergigtem Terrain wird man oft aus dem Grunde zu sehr kurzen Stationen genöthigt sein, weil sonst die Visirlinie den Boden treffen oder über die Latte hinweggehen würde, es müßte denn das Instrument mit einer Vorrichtung versehen sein, um die Abweichungswinkel **DCM** (Taf. XIV., Fig. 1) der Ziellinie **CM** von der scheinbaren Horizontale **CD** mit großer Genauigkeit zu messen, da man dann aus ihm und der horizontalen Stationslänge **CD** das Stück **DM** berechnen könnte, um welches die beobachtete Lattenhöhe **BM** vermehrt oder vermindert werden müßte, um die wahre Lattenhöhe **BD** zu erhalten. In dieser Hinsicht möchte sich das von Stampfer angegebene Instrument

(§. 184) am besten eignen. — Nivellirt man aus der Mitte der Stationen, so kann man oft längere Distanzen dadurch erhalten, daß man das Instrument nicht in der Mitte der Stationslinie, sondern seitwärts derselben aufstellt. —

Bei'm Gebrauche der Visirinstrumente ist es Regel, aus der Mitte der Stationen zu nivelliren, theils darum, weil dann die Stationen doppelt so lang werden können, als wenn man aus den Endpuncten nivellirt, theils auch besonders, weil bei dieser Methode die Correctionen wegen der Strahlenbrechung und die Reductionen auf den wahren Horizont wegfallen, und die Fehler wegen der Abweichung der Ziellinie von der Horizontale sich aufheben. Die Mitte der Stationen wird durch bloßes Abschreiten bestimmt, denn ein Nivellirinstrument darf nicht so mißweisend sein, daß einige Abweichung aus der Mitte einen merklichen Fehler im Gefälle hervorbrächte.

Nur in solchen Fällen, wo es nicht anders thunlich ist, z. B., wenn ein Sumpf oder ein breiter Fluß überschritten werden müßte, nivellirt man aus dem Endpuncte der Station; es ist aber alsdann gut, wenigstens bei längeren Stationen, auch aus dem anderen Endpuncte zurück zu visiren, um, nach §. 169, 3, das Gefälle ohne allen Einfluß der Mißweisung des Instrumentes und frei von der Correctur wegen der Strahlenbrechung und der Krümmung der Erdoberfläche zu erhalten.

Wenn mehre im Horizonte, um einen gewissen Centralpunct umherliegende Puncte nivellirt werden sollen, so nivellirt man meistens nur aus diesem Centralpuncte. Man muß aber dann von der Richtigkeit seines Instrumentes vollkommen überzeugt sein.

Jedes Nivellement soll wenigstens zweimal, und zwar nach entgegengesetzten Richtungen, wiederholt werden, damit über seine Richtigkeit nicht der mindeste Zweifel obwalte.

§. 188.

Jedes Nivellement erfordert bequeme und übersichtliche Register oder Tabellen, in welchen alle Data mit Sorgfalt eingetragen werden, um hernach die Hauptresultate, z. B. den Höhenunterschied der äußersten Puncte oder das Totalgefälle, daraus abzuleiten. Wie ein solches Register anzulegen sei, wenn mit Hülfe der Sez-

waage nivellirt wird, ist aus dem in §. 186 Gesagten unmittelbar klar. Da nämlich die Setzwaage das Steigen und Fallen der Stationen unmittelbar angiebt, so sind drei Rubriken erforderlich, eine für die Nummer der Station, eine zweite für das Steigen und eine dritte für das Fallen, zu welchem man noch eine vierte hinzufügen kann, um darin besondere Bemerkungen aufzuführen, welche für das Nivellement aus irgend einer Ursache von Wichtigkeit sind.

Bei'm Gebrauche der Rothe'schen Bergwaage müssen statt der wahren Steig- oder Fallhöhen zuerst die Böschungsgrade eingetragen werden, um ans denselben nachher die Steig- und Fallhöhen abzuleiten.

Bei'm Gebrauche der Visirinstrumente wird eine größere Anzahl von Rubriken nöthig. Da man meistens aus der Mitte der Stationen nivellirt, so werden außer der Rubrik für die Stationsnummer noch eine für die Stationslänge, dann eine für die vordere und eine für die hintere Lattenhöhe erforderlich; ferner eine Rubrik für die Steigungen uud eine für die Fallhöhen. Die in jeder Rubrik befindlichen Zahlen werden am Ende jeder Seite zusammengezählt, und die Summen zugleich auf die nächstfolgende Seite in die entsprechenden Rubriken gesetzt. Hierbei hat man eine wichtige Probe der Rechnung, indem der Unterschied zwischen der Summe aller vordern und der Summe aller hintern Lattenhöhen genau dem Unterschiede gleich sein muß, welchen man erhält, wenn man die Summe der Steighöhen von der der Fallhöhen abzieht. Beide Unterschiede geben nämlich die Höhe oder Tiefe des Anfangspunctes gegen den letzten auf der Seite angeführten Stationspunct. Die auf die folgende Seite übergetragenen Summen werden ebenfalls mit den auf dieser Seite befindlichen Zahlen zusammengezählt, wodurch man am Ende der Tabelle den Höhenunterschied zwischen dem Anfangs- und dem Endpuncte des Nivellementzuges erhält.

Weil man aber oft nicht bloß den Höheunnterschied der Endpuncte des Nivellementzuges, sondern auch die Höhenunterschiede zwischen je zwei beliebigen Stationspuncten verlangt, so wird für diesen Zweck eine neue Rubrik erforderlich. Man genügt dem Zwecke am besten, wenn man durch den höchsten Punct A (Taf. XIV., Fig. 27) des Terrains eine Horizontale A M (Haupt-

horizontale) zieht, wo dann jedweder nivellirte Punct unter diese Horizontale zu liegen kommt und hinsichtlich seiner Lage gegen dieselbe durch senkrechte Abscissen und Ordinaten **AN** und **NC** bestimmt wird. Durch die gemessenen Horizontalabstände der Stationspuncte werden die Abscissen und durch die beobachteten Höhenunterschiede auch die Ordinaten gefunden. Am besten wäre es wohl, gleich über den Anfangspunct des Nivellements die Haupthorizontale in einer beliebigen aber solchen Höhe zu legen, daß alle übrigen Puncte unter sie fallen, zu welchem Behufe man die Lage des höchsten Punctes gegen den Anfangspunct berücksichtigen muß. Fielen nicht alle Puncte unter die Haupthorizontale, so müßten ihre Ordinaten negativ angesetzt werden.

Folgendes Beispiel wird die Sache vollkommen deutlich machen:

Nummer der Stationen.	Länge der Stationen.	Lattenhöhen						Das Terrain						Tiefe unter der Hauptho-rizontale			Besondere Bemerkungen.
		vordere			hintere			steigt			fällt						
	R.	F.	Z.	L.	F.	Z.	L.	F.	Z.	L.	F.	Z.	L.	F.	Z.	L.	
0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10	—	—	Ordinate d. Anfangspunctes.
1	30	8	7	3	5	3	8	—	—	—	3	3	7	13	3	7	
2	60	10	6	5	7	2	8	—	—	—	3	3	9	16	7	4	
3	42	6	3	9	8	2	7	1	10	10	—	—	—	14	8	6	
4	20	3	8	6	7	2	11	3	6	5	—	—	—	11	2	1	
5	70	5	7	6	6	8	2	1	0	8	—	—	—	10	1	5	
6	48	6	3	5	5	7	2	—	—	—	0	8	3	10	9	8	Der bei Nr. 6 stehende Grenzstein liegt 2 Fuß höher, als Nr. 6.
7	50	3	8	7	6	5	3	2	8	8	—	—	—	8	1	0	
8	65	9	1	8	7	3	1	—	—	—	1	10	7	9	11	7	
Summe	385	53	11	1	53	11	6	9	2	7	9	2	2				

Die Tiefen unter der Hauptzhorizontale ergeben sich dadurch, daß man zur Ordinate des Anfangspunctes 10 die Fallhöhen der einzelnen Stationen successive zuzählt, die Steighöhen aber davon abzählt. Man sieht, daß hier der Punct 2 der tiefste, 7 aber der höchste ist, denn jener hat die größte, dieser die kleinste Ordinate; der Höhenunterschied beider ist 16′ 7″ 4‴ — 8′ 1″ 0‴ = 8′ 6″ 4‴. Der Höhenunterschied zwischen dem Anfangs- und dem Endpuncte ist 10′ 0″ 0‴ — 9′ 11″ 7‴ = 53′ 11″ 6‴ — 53′ 11″ 1‴ = 9′ 2″ 7‴ — 9′ 2″ 2‴ = 5‴ Steigung, und durch diese dreifache Berechnung hat man eine wichtige Rechnungsprobe. Die Sache bedarf übrigens keiner Erläuterung weiter.

Was die Rubrik: „besondere Bemerkungen" anlangt, so werden darin allerlei für das Nivellement und den Zweck desselben wichtige Data aufgeführt, besonders werden allerlei feste, um den Zug der Stationen umherliegende Puncte, als: Grenzsteine, Fachbäume (von Wehren und Gerinnen), Wasserstandsmesser (Pegel), steinerne Plinthen von ansehnlichen Gebäuden und dergleichen, mit eingewogen, indem man ihre Höhe rücksichtlich eines naheliegenden Stationspunctes angiebt. Diese Puncte dienen wesentlich zur nachmaligen Prüfung, sowie auch zur Benutzung des Nivellements für diejenigen technischen Zwecke, Behufs welcher es unternommen wurde. Wenn daher solche feste Puncte nicht in genügender Anzahl vorhanden sind, so sucht man sie durch starke, fest eingerammte Pfähle zu erhalten, in welche man Kerben einschneidet oder Nägel einschlägt.

Ueberhaupt ist die Anlage eines Nivellements jedesmal nach seinen technischen Zwecken einzurichten, und daher werden außer den geometrischen Kenntnissen, wie wir sie bisher vorgetragen haben, auch noch jene technischen, die meistenstheils mechanischen, hydrostatischen und hydrodynamischen Inhalts sind, wenigstens insoweit erfordert, daß eine klare Einsicht in die Zwecke des Nivellements möglich ist. Die Grenzen dieses Lehrbuches gestatten aber uns nicht, in diese mathematisch-technischen Wissenschaften einzugehen, die übrigens auch meist von solchem Umfange sind, daß sie nur in eigens dafür bestimmten Werken sich vollständig und gründlich abhandeln lassen.

Mit besonderer Sorgfalt und Genauigkeit wird das Abwägen des Wasserspiegels der Flüsse vorgenommen, weil hier das Gefälle, selbst auf bedeutende Strecken, meist nur gering ist, weßhalb man aber auch oft sehr lange Stationen nehmen kann. Der Zug der Stationen wird in der Richtung der Stromlinie (wo der Fluß die größte Geschwindigkeit hat) zu einer solchen Zeit genommen, wo ein mittlerer Wasserstand Statt findet. Ehe das eigentliche Nivelliren beginnt, wird der Wasserspiegel durch mehre Gehülfen normirt; es werden nämlich starke Pfähle zur Bezeichnung der Stationspuncte eingeschlagen, und an denselben wird der Wasserspiegel durch eingeschnittene Kerben nahe gleichzeitig bemerkt, so daß nämlich während dieser Arbeit das Wasser nicht merklich steigen oder fallen kann. Hierdurch wird man in den Stand gesetzt, auch bei eintretender Veränderung im Wasserstande das Nivellement, bezüglich des im Anfange der Arbeit Statt gehabten Wasserstandes, fortzusetzen. Doch soll ein solches Flußnivellement so rasch, als möglich, zu Ende geführt werden. Gewöhnlich wird damit zugleich auch ein Nivellement der Ufer verbunden.

§. 189.

Durch das Nivellement lernen wir nun eigentlich die Linie (Profil) ACDEB (Taf. XIV., Fig. 27) kennen, welche entsteht, wenn die Erdoberfläche durch Verticalebenen nach der Richtung des Stationszuges durchschnitten wird. Durch die auf der Haupthorizontale genommenen Abscissen und die zugehörigen Ordinaten ist jeder Punct dieser Linie bestimmt. Um aber diese Linie vollständig zu erhalten, dürfen bei'm Nivelliren diejenigen Stellen nicht übergangen werden, wo eine merkliche Aenderung des Terrains Statt findet, wenn auch sonst die Stationen länger genommen werden könnten, wie dieses, z. B., der Fall ist, wenn man auf sonst ziemlich ebenem Boden auf eine Schlucht K trifft. Indessen würde man hier am füglichsten mit dem Nivellement über die Vertiefung EKD wegsetzen und diese selbst nachher mittelst der Setzwaage oder der Bergwaage abwägen. — Weil die Stationen wenigstens nicht sämmtlich in gerader Linie liegen, so muß man auch noch ihre Neigungswinkel gegen einander kennen, um von dem nivellirten Profil

eine richtige Vorstellung zu bekommen. Diese Winkel werden bei kleineren und minder wichtigen Nivellements meist nur mit der Boussole gemessen. Sowie sich nun die Stationen brechen, bricht sich auch an denselben Stellen die zur Abscissenlinie gewählte Haupthorizontale, um mit der jedesmaligen Stationslinie immer in einerlei Verticalebene fortzugehen.

Man nennt das soeben beschriebene Profil vorzugsweise das Längenprofil. Wenn es aber auf eine noch genauere Kenntniß des Terrains ankommt, so verbindet man mit dem Längenprofil noch Querprofile, welche die Richtung des ersteren senkrecht durchschneiden und um so öfter sich wiederholen, je schneller das Terrain wechselt. Sie dehnen sich, in der Regel, nur auf kurze Strecken aus und werden immer nach gerader Richtung fortgeführt; auch bestimmt man ihre senkrechte Lage gegen das Längenprofil nur nach dem Augenmaße; zweckmäßig würde es jedoch sein, hierbei den Winkelspiegel anzuwenden. Das Abwägen der Querprofile kann meistentheils, besonders mit Vortheil in bergigem Terrain, mit Hülfe der Setzwaage oder der Bergwaage vorgenommen werden. Zur Bestimmung der Durchschnittslinie mittelst Coordinaten dient als Abscissenlinie die Horizontale desjenigen Punctes, wo das Längen- und Querprofil sich schneiden, welcher Punct meistentheils zugleich das Ende einer Station ist.

Um Querprofile von Flüssen zu messen, zieht man über den Fluß ein hänfenes, durch eingebundene Läppchen in Ruthen u. s. w. getheiltes Seil, das man durch Kähne unterstützt, wenn es sich zu sehr senken sollte. An demselben hinfahrend, mißt man dann die Tiefen mit langen, unten mit schwerem Eisenbeschlage versehenen Stangen.

§. 190.

Nach den Bemerkungen des §. 189 werden nun die Nivellementscharten oder Pläne entworfen. Auf denselben wird zuerst der Zug der Stationen, hinsichtlich der horizontalen Entfernungen, und der Winkel an den Stationspunkten besonders vorgestellt. Besser aber ist es, das Terrain zu beiden Seiten des Zuges bis auf eine gewisse Grenze vollständig aufzunehmen und zugleich die Stationspuncte in ihrer richtigen Lage zu einander dar-

auf zu verzeichnen. Wenn diese Charte, ihrer Ausdehnung halber, in mehre Sectionen zerfallen muß, so hat man dafür Sorge zu tragen, daß in der Natur die Enden der Sectionen durch feste Marken bezeichnet sind.

Dann wird das Längenprofil auf folgende Weise aufgetragen. Man zieht zuerst eine Linie A B (Tafel XIV., Figur 28), welche die Haupthorizontale oder die Abscissenlinie vorstellt, ohne weitere Berücksichtigung der an den Stationspuncten Statt findenden Biegungen. Auf dieser bestimmt man einen Punct A als Anfangspunct der Abscissen und trägt nach einem verjüngten Maßstabe die Abscissen auf, so wie sie sich aus den einzelnen Stationslängen ergeben. Mittelst eines langen Lineals und eines großen Dreiecks werden durch die Endpuncte der Abscissen Senkrechte gezogen und darauf die Maße der Ordinaten getragen, die man schon in der Nivellementstabelle unter der Rubrik: „Ordinaten oder Tiefen unter der Haupthorizontale" berechnet findet. Verbindet man die Endpuncte sämmtlicher Ordinaten, so erhält man das Bild des Längenprofils.

Nach dem Reglement für die preußischen Feldmesser sollen die Abscissen oder Längen nach dem 2500theiligen Maßstabe aufgetragen werden, und dieses ist auch der Maßstab des vorhin erwähnten Situationsplanes. —

Für die Ordinaten oder Tiefen wird der Maßstab zwölf Mal größer genommen, weil es eben bei der Art Plänen vorzüglich auf eine genaue Darstellung der Höhenunterschiede ankommt. Man übersieht leicht, daß hierbei das Bild des Terraindurchschnittes seinem Urbilde nicht ähnlich werden kann, sondern verzerrt erscheinen muß, weil die Höhen nicht die richtige Proportion zu den Längen haben.

Nach denselben Maßstäben werden auch die Querprofile aufgetragen, mit Beobachtung des Grundsatzes, daß das, was z. B. nach der Richtung des Längenprofils rechts liegt, in der Zeichnung ebenfalls rechts zu liegen kommt. Ist Q ein solcher Punct des Längenprofils, durch welchen ein Querprofil gelegt ist, so verlängert man die Ordinate P Q bis Q', zieht durch Q' eine Parallele mit der Haupthorizontale A B und nimmt sie für die Horizontale oder Abscissenlinie des Querprofils. Der Punct Q' des Querprofils ist also mit Q im Längenprofile identisch. Auf solche Weise zeichnet man alle

übrigen Querprofile theils näher am Längenprofile, theils weiter davon, damit für alle Raum gewonnen werde.

Uebrigens versteht sich, daß die Bezeichnung des Profilrisses mit der auf der Situationscharte in vollkommenem Einklange stehen muß, damit beide einander ergänzen und erläutern.

§. 191.

Ueber den Grad der Genauigkeit, mit welchem ein Nivellement ausgeführt werden kann, läßt sich wohl im Allgemeinen wenig sagen, denn es hängt derselbe nicht bloß von der Güte der Instrumente, sondern auch von der Beschaffenheit des Terrains sehr wesentlich ab. Jedesfalls aber läßt sich aus dem bisher Gesagten der Schluß ziehen, daß die Genauigkeit bei'm Gebrauche guter Instrumente, wenn bei günstiger Beleuchtung der Zieltafel und sonst vortheilhafter Witterung operirt wird, sehr groß sein kann, daß wenigstens die vorhandenen Fehler für alle technischen Zwecke unbedeutend sein werden. —

Das Reglement für die preußischen Feldmesser erklärt ein Nivellement für zulässig, wenn bei der Revision nicht größere Differenzen gefunden werden, als folgende:

Auf weniger als 10 Stationen $\frac{1}{8}$ Zoll auf jede Station;

Auf	10	bis	15	Stationen	einschließlich	im	Ganzen	2	Zoll
„	16	„	20	„	„	„	„	$2\frac{1}{2}$	„
„	21	„	30	„	„	„	„	3	„
„	31	„	40	„	„	„	„	$3\frac{3}{4}$	„
„	41	„	50	„	„	„	„	$4\frac{1}{2}$	„
„	51	„	65	„	„	„	„	$5\frac{1}{4}$	„
„	66	„	80	„	„	„	„	6	„
„	80	„	100	„	„	„	„	$6\frac{3}{4}$	„
„	100	„	120	„	„	„	„	$7\frac{1}{2}$	„
„	120	„	150	„	„	„	„	$8\frac{1}{2}$	„

und bei noch längeren Nivellements ist auf jede 150 Stationen ein Unterschied von 8 Zoll überhaupt zulässig. Es wird jedoch ausdrücklich vorausgesetzt, daß der Feldmesser nicht mehr Stationen genommen hat, als nach der Beschaffenheit des Bodens nothwendig sind. Namentlich soll in ebenem Lande die Entfernung des Instrumentes von der Tafel nie unter 10 Ruthen betragen.

§. 192.

Hierher gehört endlich noch die Aufgabe: **auf geneigtem Boden eine Linie abzustecken, die mit dem Horizonte einen bestimmten Winkel macht.** — Hier muß zuerst bemerkt werden, daß der Neigungswinkel der abzusteckenden Linie gegen den Horizont nicht größer sein kann, als derjenige Winkel, unter welchem die schiefe Ebene selbst gegen den Horizont geneigt ist. Es sei M N (Taf. XIV., Fig. 29) die geneigte Ebene und R N ihr Durchschnitt mit dem Horizonte N Q. Nimmt man auf M N nach Belieben den Punct A und zieht A B auf die Durchschnittslinie N R, A D auf den Horizont N Q senkrecht, so ist A B D der Neigungswinkel der Ebenen N M und N Q. Zieht man sodann willkürlich A E, bis sie die R N schneidet, so ist A E D der Neigungswinkel der A E gegen den Horizont N Q, und derselbe ist, nach Gründen der Elementargeometrie, offenbar kleiner, als A B D.

Um nun die Aufgabe selbst zu lösen, setze man das Nivellirinstrument über den Punct A, durch welchen die verlangte Linie gehen soll, nehme die zu ziehende Linie von einer bestimmten Länge a, z. B. 10 Ruthen, an, und berechne aus ihrem Neigungswinkel φ ihr Gefälle oder ihre Steigung $= a \cdot \sin \varphi$. Würde nun durch das horizontal gerichtete Fernrohr eine im andern Endpuncte der Linie a aufgerichtete Latte beobachtet, und wäre dabei die Instrumentenhöhe $= i$, so müßte bei einer Steigung des Bodens die Lattenhöhe $l = i - a \sin \varphi$, hingegen bei einem Gefälle $l = i + a \sin \varphi$ gefunden werden. Man lasse also die Zielscheibe der Latte auf die Höhe $i + a \sin \varphi$ oder $i - a \sin \varphi$ stellen, je nachdem die abzusteckende Linie von dem Puncte A aus steigt oder fällt; man lasse dann die Latte in der Entfernung a vom Instrumente an verschiedene Stellen bringen, so lange, bis man durch das horizontal gerichtete Fernrohr die Zielmarke vom Visirfaden gedeckt sieht, so ist der andere Punct der abzusteckenden Linie gefunden. Um die Latte immer in der bestimmten Entfernung a vom Instrumente zu halten, kann man sich einer langen Schnur bedienen.

Leichter erreicht man den Zweck, wenn das Instrument mit einer Vorrichtung zur Messung von Höhen-

winkeln versehen ist. Man stelle das Instrument über dem gegebenen Puncte A auf die gegebene Neigung φ, messe die Höhe des Oculars und lasse an der Latte die Zielscheibe auf eben diese Höhe stellen. Wird dann die Latte in beliebiger Entfernung vom Instrumente an verschiedenen Stellen des Bodens aufgestellt, und folgt man ihr mit dem immer in gleicher Neigung φ erhaltenen Fernrohre so lange, bis die Zielmarke vom Visirfaden gedeckt wird, so ist die verlangte Linie abgesteckt. Denn die durch die Fußpuncte des Instrumentes und der Latte gelegte Linie geht jetzt mit der Ziellinie des Rohres parallel.

Wollte man diese Aufgabe auf sehr große Distanzen mit vorzüglicher Genauigkeit lösen, so müßte noch auf die Strahlenbrechung und auf die Krümmung der Erde Rücksicht genommen werden; doch wird in der Anwendung, wenn, z. B., eine Fahrstraße an einer Anhöhe hin geführt werden soll, eine solche Genauigkeit nicht erfordert.

Zwölftes Capitel.

Vom Messen der Höhen mittelst des Barometers.

§. 193.

Wenn man eine cylindrische Glasröhre A B (Tafel XIV., Fig. 13), die oben bei A zugeschmolzen ist, mit Quecksilber füllt und dieselbe dann umgekehrt in ein Gefäß stellt, worin ebenfalls Quecksilber enthalten ist, so gewahrt man die merkwürdige Erscheinung, daß, wenn die Röhre länger ist, als 28 Par. Zoll, nur so viel Quecksilber ausläuft, daß die in der Röhre zurückbleibende Säule, vom Niveau des Quecksilbers im Gefäß an gerechnet, noch die gedachten 28 Pariser Zoll Höhe hat. Zwischen A und C bleibt dann ein leerer Raum, den man die torricellische Leere nennt, so wie der ganze Apparat von dem Erfinder Torricelli seinen Namen hat.

Man forschte lange nach der wahren Ursache dieser Erscheinung, bis man sie im Drucke der Luft erkannte.

Diese gasförmige Flüssigkeit ist, wie alle irdischen Körper, der Anziehungskraft der Erde unterworfen, d. h., sie ist schwer. Sie ist aber auch elastisch, d. h., sie kann in einen engeren Raum zusammengepreßt werden, dehnt sich aber sogleich in den vorigen Raum wieder aus, wenn die pressende Kraft nachläßt, und setzt diese Ausdehnung immer weiter und weiter fort, je mehr ihr Raum dazu geboten wird. Man hat bis jetzt den höchsten Grad der Verdichtung ebensowenig ermitteln können, als den höchsten Grad der Ausdehnung.

Man sieht nun, daß die an der Erdoberfläche befindliche Luft von der ganzen darüber liegenden Luftmasse einen bedeutenden Druck erleidet und in einem gewissen Grade der Zusammenpressung sich befindet. Deßhalb hat sie auch ein Bestreben, sich nach allen Seiten hin auszudehnen, vermöge dessen sie auf das Quecksilber im Gefäße einen Druck ausübt, der sich (wie das bei allen flüssigen Materien der Fall ist) gleich stark nach allen Seiten hin verbreitet und folglich auch auf die Quecksilbersäule **B C** wirkt. Befände sich in dem Raume **C A** Luft, die mit der äußeren gleichen Grad der Pressung, also auch der ausdehnenden Kraft besäße, so würde der auf die Quecksilbersäule von beiden Seiten her wirkende Druck sich aufheben und das Quecksilber, seiner Schwere folgend, zum Theil auslaufen. Dasselbe erfolgt ganz und gar, wenn die Röhre bei **A** geöffnet ist, so daß die Luft eindringen und auf die Säule drücken kann. Da aber der Raum **A C** luftleer und der Zugang der Luft von **A** her abgesperrt ist, so wirkt bloß der Druck, der am Ende der Röhre bei **B** Statt findet, und erhält die Quecksilbersäule in solcher Höhe, daß ihre abwärts gerichtete Schwere mit dem aufwärts gerichteten Luftdrucke im Gleichgewicht ist.

Biegt man die Röhre unten bei **B** (Fig. 14, Taf. **XIV.**) um, so hat man nicht nöthig, sie in ein Gefäß zu setzen; dieses dient nur, zu verhindern, daß Luft und Quecksilber an der Oeffnung der Röhre sich ausweichen und erstere in den leeren Raum **A C** dringe.

Die Quecksilbersäule ist also wirklich ein Maß des Statt habenden Luftdruckes, daher auch der Name B a r o m e t e r (τὸ βάρος, die Schwere), so viel als Luftschweremesser. Die Luft drückt nämlich an der Erdoberfläche mit derselben Gewalt auf eine bestimmte Fläche,

z. B. 1 Quadratzoll, als eine 28 Zoll hohe Quecksilbersäule auf dieselbe Fläche.

Je höher wir in der Atmosphäre aufsteigen, desto geringer wird die über uns herabdrückende Luftmasse; der Grad der Pressung und folglich auch die ausdehnende Kraft der Luft wird geringer, sie selbst auch weniger dicht; kurz der Luftdruck und seine Wirkungen nehmen ab, und die Barometersäule muß fallen. Kennen wir also das Gesetz, nach welchem bei zunehmender Höhe das Barometer fällt, so muß sich auch umgekehrt aus dem Falle des Barometers die Höhe, bis zu welcher man gestiegen ist, ermitteln lassen.

§. 194.

Ehe wir aber an den eigentlichen Gegenstand unserer Betrachtungen kommen, müssen wir noch Folgendes vorausschicken:

1) Je kleiner der Raum ist, in welchen eine gewisse Quantität Luft zusammengedrängt ist, desto größer ist ihre Dichtigkeit; dieselbe Luftmasse heißt doppelt so dicht, wenn der Raum (Volumen), den sie einnahm, bis zur Hälfte vermindert wurde. Demnach ist die Dichtigkeit im umgekehrten Verhältnisse des Volumens.

2) Die Dichtigkeit der Luft ist, wie die sorgfältigsten Versuche gelehrt haben, genau im Verhältnisse der Kraft, mit welcher sie zusammengepreßt wird. Man denke sich einen auf einer Seite verschlossenen Cylinder und in demselben einen genau schließenden Kolben, der mit einem Gewichte beschwert ist, so hat die abgesperrte Luft ein gewisses Volumen. Verdoppelt, verdreifacht man jenes Gewicht, so wird der Kolben so weit hinabgedrückt, daß das Volum der Luft auf die Hälfte, das Drittel reducirt und also ihre Dichtigkeit in gleichem Maße vermehrt wird. Vermindert man das Gewicht bis zur Hälfte, das Drittel, so hebt sich der Kolben so weit, bis das Volumen der Luft doppelt, dreimal so groß geworden ist. Dies ist das sogenannte Mariotte'sche Gesetz.

3) Mit derselben Kraft, mit welcher die Luft gepreßt wird, strebt sie sich auch wieder auszudehnen. Ihr nach allen Seiten hin wirkender Druck ist insofern genau im Verhältnisse der Dichtigkeit.

4) Jedoch wird durch Zunahme der Wärme die Luft ausgedehnt, durch Abnahme derselben zusammengezogen. Nennen wir den Raum, den eine gewisse Luftmasse bei der Temperatur des schmelzenden Eises (0°) einnimmt, V, ihre Dichtigkeit D, so wird ihr Volum bei t Graden der 100theiligen Thermometerscale (nach Celsius) $= V (1 + 0{,}00375\, t)$, ihre Dichtigkeit $\frac{D}{1 + 0{,}00375\, t}$, und es ist t bei Graden über 0 positiv, unter 0 negativ zu nehmen. — Bei größerer Temperatur vermag also Luft von gleicher Dichte einem größeren Drucke zu widerstehen oder eine größere Quecksilbersäule zu erhalten, als bei geringeren Wärmegraden, und aus dieser Ursache bleibt ihre Dichtigkeit auch nicht ihrem Drucke proportional, sondern diese ist vielmehr dem Drucke direct und der Größe $1 + 0{,}00375\, t$ umgekehrt proportional.

5) Das Quecksilber ändert mit der Temperatur ebenfalls sein Volumen, und es kann daher die Barometersäule nicht unmittelbar dazu dienen, den Luftdruck in verschiedenen Höhen oder zu verschiedenen Zeiten zu vergleichen, wenn nicht jedesmal das Quecksilber dieselbe Temperatur hat; denn die durch die Wärme ausgedehnte Quecksilbersäule wiegt eben nicht mehr, als die durch die Kälte zusammengezogene. Man reducirt daher jede Barometerhöhe auf diejenige, welche Statt finden würde, wenn das Quecksilber die Temperatur 0 Grad hätte. Sey also, wenn die Barometerhöhe $= h$ gefunden wird, die Temperatur des Quecksilbers nach Celsius $= \tau$, so ist die auf 0° reducirte Höhe $= h\left(1 - \frac{\tau}{5412}\right)$, und zwar ist τ positiv für Grade über 0, negativ für Grade unter 0.

6) Die Schwerkraft ist diejenige Kraft der Erde, durch welche alle Körper angetrieben werden, sich nach einer Richtung zu bewegen, die gegen die Erdoberfläche senkrecht ist. Sie ist so stark, daß, wenn sie eine Secunde lang auf einen fallenden Körper gewirkt hat und dann sogleich nachließe, letzterer sich mit einer Geschwindigkeit von 30,18656 Par. Fuß in einer Secunde bewegen würde. Diese Größe kann also füglich als das Maß der Schwerkraft im Vergleich mit andern Kräften angesehen werden; eine Kraft heißt dann halb so stark, als die Schwerkraft, wenn sie nach Verlauf von einer Secunde

nur halb so viel Geschwindigkeit erzeugt. Die Deutschen nehmen zum Maße der Schwerkraft nur die Hälfte jener Zahl, also 15,09328 Par. Fuß, welches der Raum ist, den ein Körper durchlaufen hat, nachdem er eine Secunde lang (im luftleeren Raume) gefallen ist, und bezeichnen diese Größe schlechtweg mit g.

Aber die Schwerkraft ist nicht an allen Orten der Erde gleich groß, vielmehr findet das gedachte Maß von 15,09328 = g nur unter 45° geographischer Breite oder Polhöhe Statt; nennen wir die Breite irgend eines Ortes ψ, so ist für ihn die Schwerkraft $= g' = g(1 - 0{,}0027 \cdot \cos 2\psi)$. Sie ist demnach unter dem Aequator (wo $\cos 2\psi = \cos 0° = +1$) am kleinsten, nimmt von hier aus nach den Polen hin zu und hat hier (wo $\cos 2\psi = \cos 180° = -1$) ihren größten Werth. Unter dem Aequator drücken also die Körper nicht so stark, als an den Polen, obschon die Waage keinen Unterschied zeigen wird, weil hier beide Arme gleich viel mehr oder weniger gedrückt werden.

Die Schwerkraft nimmt aber auch ab mit zunehmender Entfernung vom Erdmittelpuncte; die genannte Zahl g gilt nur für die auf dem Niveau des Meeres befindlichen Körper. Wenn aber die Entfernung von der Erdoberfläche = z und der Erdhalbmesser = r gesetzt wird, so ist die Schwerkraft in dieser Höhe nur noch $\frac{g\,r^2}{(r+z)^2}$; sie nimmt also ab nach dem umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen vom Erdmittelpuncte.

§. 195.

Das Gesetz, nach welchem die Dichtigkeit der Luft in höheren Regionen abnimmt, läßt sich zwar ohne höhere Analysis vollständig nicht entwickeln; doch können wir, so weit es für barometrische Höhenmessungen erforderlich ist, der Sache auf folgende Weise nahe kommen:

Man denke sich aus der Atmosphäre eine bis an ihr Ende reichende Säule herausgenommen und in feste Wände eingeschlossen. In der Luft sind zwar keine solchen Säulen vorhanden; weil sie aber im Gleichgewicht sein soll, so können wir uns Säulen darin denken, wie wir wollen, weil die umgebende Luft schon von selbst feste Wände

bildet. In dieser Säule nehmen wir nun von der Erdfläche aus den Abschnitt AZ (Taf. XIV., Fig. 18) und betrachten denselben als diejenige Höhe z, die man durch das Barometer bestimmen will. Wir theilen ferner die Säule AZ in parallele Schichten von durchaus gleicher Dicke, welche $\frac{1}{n}$ z heißen mag. Die Luft hat in den verschiedenen Schichten verschiedene Dichtigkeit, und selbst in derselben Schicht ist ihre Dichte verschieden; wenn wir aber die Höhe einer jeden Schicht sehr klein annehmen, so können wir auch die in ihr enthaltene Luft als gleichförmig dicht ansehen. Wir denken uns also die Höhe $\frac{1}{n}$ z einer jeden Schicht unendlich klein, haben daher unendlich viele Schichten, und ihre Anzahl ist n.

Um aber im Anfange die Untersuchung so viel, als möglich, zu vereinfachen, nehmen wir an, daß die ganze Luftsäule von A bis Z gleiche Temperatur habe, und daß in ihr die Schwerkraft der Erde allenthalben gleich stark wirke.

Die Grundfläche AB einer jeden Schicht sei = f, so ist ihr Volumen $= f \cdot \frac{z}{n}$. Die Cubikeinheit Quecksilber wiege q Pfund, und es sei die Luft in irgend einer Schicht mn, m mal weniger dicht, als Quecksilber, so wiegt die Cubikeinheit solcher Luft $\frac{q}{m}$ Pfund, und daher die Schicht mn, $\frac{q}{m} \times f \cdot \frac{z}{n}$ Pfund. Die über der Schicht mn stehende Luftsäule wiege so viel als eine Quecksilbersäule von gleicher Grundfläche und der Höhe P; der Inhalt dieser Quecksilbersäule ist fP, ihr Gewicht also = qfP, und so viel wiegt daher auch die gedachte Luftsäule.

Während also die Grundfläche mn von der Last qfP gedrückt wird, drückt auf m'n' nur die Last $qfP - \frac{q}{m} f \cdot \frac{z}{n}$, weil vom Gewichte, welches auf mn drückt, das Gewicht der Schicht mn abkommt. Wir haben daher nach dem Mariotte'schen Gesetze:

Dichte der Luft in mn : Dichte in m'n'

$$= qfP : qfP - \frac{q}{m} f \cdot \frac{z}{n} = P : P - \frac{1}{m} \cdot \frac{z}{n}.$$

Wenn aber die Dichte des Quecksilbers = 1 gesetzt wird, so ist die der Luft in mn = $\frac{1}{m}$ (m mal weniger dicht), welchen Bruch wir mit D bezeichnen wollen. In der Schicht m′n′ sei auf gleiche Weise die Dichte der Luft = D′, so ist

$$P : P - D\frac{z}{n} = D : D'$$

daher I) $D' = \frac{P - D\frac{z}{n}}{P} \cdot D = \left(1 - \frac{D}{P} \cdot \frac{z}{n}\right) D.$

Hier ist nun der Quotient $\frac{D}{P}$ für alle Luftschichten unveränderlich; denn wenn wir in einer andern Schicht die Höhe der Quecksilbersäule, die mit der darüber stehenden Luftsäule gleich stark drückt, p setzen, so ist ihr Gewicht q f p; ist ferner die Dichtigkeit der Luft in dieser Schicht = d, so haben wir $qfP : qfp = D : d$, daher $\frac{D}{P} = \frac{d}{p}$. Da nun auch die Dicke der Schichten $\frac{z}{n}$ sich immer gleich bleibt, so ist der Werth von $\frac{D}{P} \cdot \frac{z}{n}$, welchen wir kurz mit c bezeichnen wollen, an jeder Stelle der Luftsäule gleich. Die Gleichung 1 hat also die Form

$$D' = (1 - c)\, D,$$

d. h., um die Dichte D′ einer Schicht aus der Dichte D der zunächst darunter liegenden Schicht zu bestimmen, muß man diese mit einer sich immer gleich bleibenden Zahl 1 — c multipliciren.

Jetzt verstehe man unter D die Dichte, unter P die Höhe der drückenden Quecksilbersäule in der untersten Schicht 1; die Dichte der Schicht 2 wird sein (1—c) D, folglich die der Schicht 3 = $(1-c)^2 D$, die der Schicht 4 = $(1-c)^3 D$ u. s. w. Man sieht hieraus, daß die Dichtigkeit der Luft in einer geometrischen Progression abnimmt, wenn die Höhen nach arithmetischer Progression steigen.

Demnach ist die Dichte in der obersten oder n ten Schicht $(1 - c)^n D$.

Die Größe c läßt sich, wie wir eben gesehen haben, aus Druck und Dichte einer jeden Schicht bestimmen, daher wir am besten die unterste dazu wählen. Man hat dann $c = \frac{D}{P} \cdot \frac{z}{n}$. Nennen wir nun die Dichte der obersten Schicht d, so ist

$$\text{II)}\ d = \left(1 - \frac{D}{P} \cdot \frac{z}{n}\right)^n D,$$

eine Gleichung, in welcher die Schichtenzahl n unendlich groß zu nehmen ist.

Hieraus erhalten wir $\frac{d}{D} = \left(1 - \frac{D}{P} \cdot \frac{z}{n}\right)^n$, und wenn wir beiderseits die Logarithmen nehmen:

$$\log\left(\frac{d}{D}\right) = n \log\left(1 - \frac{D}{P} \cdot \frac{z}{n}\right).$$

Diese Gleichung gilt zwar für Logarithmen eines jeden Systems, doch werden wir am liebsten die gemeinen oder briggischen wählen. Nun ist bekanntlich, wenn x einen sehr kleinen Bruch und M die Zahl 0,4342945 bedeutet, log. brigg. $(1 \pm x) = \pm Mx$, und diese Gleichung ist um so richtiger, je kleiner x ist. Da nun wegen des unendlich großen n der Ausdruck $\frac{D}{P} \cdot \frac{z}{n}$ unendlich klein ist, so haben wir ganz genau $\log\left(1 - \frac{D}{P} \cdot \frac{z}{n}\right) = - M \cdot \frac{D}{P} \cdot \frac{z}{n}$, und daher

$$\log \frac{d}{D} = - \log\left(\frac{D}{d}\right) = - M \cdot \frac{D}{P} \cdot z$$

und hieraus folgt $z = \frac{P}{MD} \log\left(\frac{D}{d}\right)$.

Statt des Verhältnisses der Dichtigkeiten d und D der Luft an der oberen und unteren Station dürfen wir aber auch das der daselbst beobachteten Barometerhöhen setzen, welche jenen Dichtigkeiten proportional sind, da in der ganzen Luftsäule eine gleiche Temperatur herrschen soll. Die Barometerhöhe sei H an der untern, h an der obern Station, so ist

$$\text{III)}\ z = \frac{P}{MD} \log \left(\frac{H}{h}\right).$$

Die Höhe P der Quecksilbersäule und die Dichte D der Luft in der untersten Schicht müssen nun durch Versuche bestimmt werden, um den Werth des Coefficienten $\frac{P}{MD}$ zu finden, welcher schlechthin der Barometer-coefficient genannt wird. Nach Biot's und Arago's sehr sorgfältigen Versuchen ist die Dichte der Luft bei 28 Par. Zoll Barometerstand 10494,9mal geringer, als die des Quecksilbers, wenn die Luft sowohl, als das Quecksilber, die Temperatur 0° hat und die Beobachtung auf dem Niveau des Meeres unter 45° Breite gemacht wird. Daher wäre $P = 28$ und $D = \frac{1}{10494,9}$. Aber La Place äußert die Meinung, daß man $D = \frac{1}{10506,2}$ setzen müsse, weil die Luft im Freien allemal feucht sei und weniger wiege, als die ausgetrocknete, deren sich Biot und Arago bei ihren Versuchen bedienten, und in's besondere, weil Ramond's Barometerbeobachtungen diese Dichtigkeit als diejenige anzugeben scheinen, die im Freien bei 28 Zoll Barometerhöhe und 0° Temperatur Statt findet. Diesen Werth von D wird man also nehmen müssen, wenn man den größeren oder geringeren Grad der Feuchtigkeit einigermaßen berücksichtigen will.

Demnach ist $\frac{P}{D} = 28 \times 10506,2 = 294173,6$ Zoll $= 24514,5$ Fuß. Dieses ist eigentlich die Höhe einer Luftsäule, welche, wenn sie durchaus die gedachte Dichtigkeit hat, eben so viel wiegt, als die 28 Zoll hohe Quecksilbersäule von gleicher Grundfläche. — Man hat also $\frac{P}{MD} = 56446,7$ Fuß $= 9407,7$ Toisen, und daher

$$\text{IV)}\ z = 9407,7 \log \left(\frac{H}{h}\right)$$

welche Formel die Höhe z in französischen Toisen richtig geben muß, wenn die Luft durchaus die Temperatur 0° hat.

§. 196.

1) An dieser so einfachen Formel (IV) müssen nun mancherlei Correctionen angebracht werden, wenn sie in allen Fällen die gesuchte Höhe mit leidlicher Genauigkeit geben soll. Die erste und wichtigste dieser Correctionen ist die wegen der Temperatur der Luft. Wir wollen also voraussetzen, die Temperatur der Luft sei t Grad Cels., so erhält sie hierdurch das Bestreben, das Volumen, welches sie bei 0^{o} einnimmt, $1 + 0{,}00375 \cdot t$ mal zu vergrößern, und übt daher auch einen verhältnißmäßig stärkern Druck aus, so daß sie, wenn sie bei 0^{o} Temperatur eine Quecksilbersäule von 28 Zoll Höhe zu halten vermochte, nunmehr bei t Graden einer $28 \cdot (1 + 0{,}00375\ t)$ Zoll hohen Quecksilbersäule das Gleichgewicht hält, während ihre Dichtigkeit beide Mal dieselbe bleibt. Dies hat die Wirkung, daß der Barometercoefficient in IV $1 + 0{,}00375 \cdot t$ mal vergrößert wird, so daß man

$$z = 9407{,}7\ (1 + 0{,}00375\ t)\ \log\left(\frac{H}{h}\right) \text{ erhält.}$$

Hierbei liegt jedoch immer noch die Voraussetzung zu Grunde, daß die Luft durch die ganze Höhe z einerlei Temperatur habe, was in der Natur nie zutrifft. Vielmehr nimmt die Wärme der Luft in den höheren Regionen mehr und mehr ab, nach einem Gesetze, das man bis jetzt noch nicht vollständig erkannt hat. Man begnügt sich daher, die Temperatur an der untern und obern Station zu beobachten und das arithmetische Mittel beider als die Temperatur der ganzen Luftsäule anzusehen. Dies mag freilich oft irrig sein; indessen hat doch die Erfahrung gezeigt, daß man auf solche Weise in den meisten Fällen hinreichende Genauigkeit erhält. Ist daher die untere Temperatur t, die obere t′, so ist die mittlere $\frac{t + t'}{2}$, und dieses haben wir in die vorige Formel statt t zu setzen. Wir erhalten daher

$$\text{V)}\ \begin{cases} z = 9407{,}7\ \left(1 + 0{,}001875\ (t + t')\right)\ \log\left(\frac{H}{h}\right) \\ z = 9407{,}7\ \left(1 + \frac{3\,(t + t')}{1600}\right)\ \log\left(\frac{H}{h}\right). \end{cases}$$

2) Unserer Entwickelung lag ferner die Annahme zu Grunde, daß die Schwerkraft durch die ganze Höhe z hindurch gleich stark wirke, was ebenfalls nicht richtig ist; sie nimmt vielmehr in der Höhe ab, und hiervon ist die Folge, daß die oberen Luftschichten nicht so stark drücken, als die unteren.

Setzen wir die Schwerkraft an der Erdoberfläche = 1, so ist sie in der Höhe

$$z = \frac{r^2}{(r+z)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{z}{r}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{2z}{r}+\frac{z^2}{r^2}}$$

$= 1 - 2\frac{z}{r}$, wenn wir nämlich das Quadrat des Bruches $\frac{z}{r}$, seiner Kleinheit wegen, vernachlässigen. Der Unterschied beider Schwerkräfte ist $\frac{2z}{r}$, und die Hälfte dieses Unterschiedes $\frac{z}{r}$ von der unteren Schwerkraft 1 subtrahirt, giebt die mittlere $= 1 - \frac{z}{r}$. Diese mittlere Schwerkraft können wir aber ohne Bedenken als die durch die ganze Luftsäule Statt findende ansehen.

Bei dieser geringeren Schwerkraft würde natürlich eine verhältnißmäßig größere Barometerhöhe entstehen müssen, wenn sie eben die Dichtigkeit der Luft anzeigen sollte, die Biot und Arago bei 28 Zoll Barometerhöhe beobachteten. Dieß hat zur Folge, daß man den Barometercoefficienten $\frac{1}{1-\frac{z}{r}} = 1 + \frac{z}{r}$ Mal größer nehmen muß, weßhalb nun

$$\text{VI)}\ z = 9407{,}7\left(1 + \frac{3(t+t')}{1600}\right)\left(1+\frac{z}{r}\right)\log\left(\frac{H}{h}\right)$$

wird.

3) Weit bedeutender aber ist der Einfluß des Unterschiedes der Schwere unter verschiedenen Breitengraden. Wenn sie unter der Breite 45° = 1 gesetzt wird, so ist sie unter der Breite $\psi = 1 - 0{,}0027 \cos 2\psi$, und diese geringere Schwerkraft erfordert gleichfalls eine verhältniß-

mäßig größere Barometerhöhe, um eben die Dichtigkeit der Luft anzuzeigen, welche bei 28 Zoll Höhe unter 45° Breite Statt findet. Darum muß der Barometercoefficient nochmals $\frac{1}{1 - 0{,}0027 \cos 2\psi} = 1 + 0{,}0027 \cos 2\psi$ Mal vergrößert werden, und wir haben nun die Höhe

$$\text{VII)}\ z = 9407{,}7 \left(1 + \frac{3\,(t + t')}{1600}\right)$$
$$\times (1 + 0{,}0027 \cos 2\psi) \left(1 + \frac{z}{r}\right) \log \left(\frac{H}{h}\right).$$

4) Aber diese Formel kann, streng genommen, nur für den Fall gelten, daß die untere Station im Niveau des Meeres liegt, weil nur unter dieser Bedingung bei 28 Zoll Barometerhöhe die Dichtigkeit der Luft der oben angegebenen gleich ist und folglich der Barometercoefficient auch nur für solche Fälle gefunden wurde. Liegt die untere Station in der Höhe a über dem Meeresspiegel, so ist an ihr die Schwerkraft, welche man im Niveau des Meeres = 1 setzt, nur noch $\frac{r^2}{(a + r)^2}$, also im Verhältnisse $\frac{(a + r)^2}{r^2} = 1 + \frac{2a}{r}$ geringer. Wenn man also hier dieselbe Dichtigkeit der Luft beobachtete, die im Niveau des Meeres bei 28 Zoll Höhe Statt findet, so würde man offenbar die Barometerhöhe $1 + \frac{2a}{r}$ Mal größer finden, woraus abermals eine Vergrößerung des Barometercoefficienten durch Multiplication mit $1 + \frac{2a}{r}$ hervorgeht. Demnach

$$\text{VIII)}\ z = 9407{,}7 \left(1 + \frac{3\,(t + t')}{1600}\right)$$
$$\times (1 + 0{,}0027 \cos 2\psi) \left(1 + \frac{2a}{r}\right) \left(1 + \frac{z}{r}\right) \log \left(\frac{H}{h}\right).$$

5) Nun sind noch die beobachteten Barometerhöhen **H** und h auf die Temperatur 0° zu corrigiren. Wenn aber die Temperatur des Quecksilbers im Barometer unten = **T**, oben **T'** Grade C, gefunden wurde, so sind die auf 0° corrigirten Höhen, welche wir mit **H'** und h' bezeichnen wollen:

$$H' = H\left(1 - \frac{T}{5412}\right)$$

$$h' = h\left(1 - \frac{T'}{5412}\right).$$

6) Endlich ist begreiflich, daß, wegen des Unterschiedes der Schwerkraft an der unteren und oberen Station, die Barometerhöhen auch dann noch nicht das richtige Verhältniß der Expansivkraft der Luft ausdrücken können, wenn sie auf 0° der Temperatur reducirt sind, sondern daß die obere Barometerhöhe, wegen der geringeren Schwerkraft, im Vergleich zur unteren zu groß gefunden wird. Wir müssen daher entweder die obere Barometerhöhe in dem Verhältnisse, als die Schwere in der Höhe z abgenommen hat, nämlich im Verhältnisse $r^2 : (r+z)^2 = 1 : \left(1+\frac{z}{r}\right)^2$ verkleinern, oder die untere in eben dem Maße vergrößern. Vergrößern wir die untere, so ist $H'\left(1+\frac{z}{r}\right)^2$ statt H' zu setzen, und daher tritt an die Stelle von $\log\frac{H}{h}$ nunmehr

$$\log\frac{H'\left(1+\frac{z}{r}\right)^2}{h'} = \log H' - \log h' + 2\log\left(1+\frac{z}{r}\right),$$

daher

$$\text{IX)}\ z = 9407{,}7\left(1+\frac{3(t+t')}{1600}\right)(1 + 0{,}0027\cos 2\psi)$$
$$\times\left(1+\frac{z}{r}\right)\left(1+\frac{2a}{r}\right)\left(\log H' - \log h' + 2\log\left(1+\frac{z}{r}\right)\right),$$

welcher Ausdruck mit dem übereinstimmt, den Laplace in der **Mécanique céleste** gegeben hat.

§. 197.

1) Es kommt nun darauf an, den Ausdruck für z so zu entwickeln, daß er eine für die numerische Rechnung bequeme Gestalt gewinnt. Man sieht aber leicht, daß man die Höhe schon sehr genau erhalten müsse, wenn man die

unbedeutenden Brüche $\frac{2a}{r}$ und $\frac{z}{r}$ wegläßt; sie wird auf diese Weise gleich

$$9407{,}7\left(1+\frac{3\,(t+t')}{1600}\right)(1+0{,}0027\cos 2\,\psi)$$
$$\times(\log H' - \log h').$$

Diese vorläufig berechnete Höhe wollen wir mit ζ bezeichnen; sie ist so genau, daß wir ohne Bedenken statt des Bruches $\frac{z}{r}$ den genäherten $\frac{\zeta}{r}$ setzen dürfen. Man hat aber $\log\left(1+\frac{z}{r}\right)=\frac{Mz}{r}=\frac{M\zeta}{r}$, wo M die schon angegebene Zahl ist, und wenn wir, der Kürze halber, $9407{,}7\left(1+\frac{3\,(t+t')}{1600}\right)(1+0{,}0027\cos 2\,\psi)=A$ setzen, so wird

$$z=A\left(1+\frac{\zeta}{r}\right)\left(1+\frac{2a}{r}\right)\left(\log\frac{H'}{h'}+2M\cdot\frac{\zeta}{r}\right)$$

oder wenn wir die Multiplication der zusammengesetzten Factoren auflösen und dabei die Glieder mit den Factoren $\frac{\zeta^2}{r^2}$ und $\frac{a\zeta}{r}$ weglassen:

$$z=A\cdot\log\frac{H'}{h'}+A\cdot\log\frac{H'}{h'}\cdot\frac{\zeta}{r}+A\cdot\log\frac{H'}{h'}\cdot\frac{2a}{r}$$
$$+\frac{2AM\zeta}{r}$$

$$\text{d. i. } z=\zeta+\frac{\zeta^2}{r}+\frac{2a\zeta}{r}+\frac{2AM\zeta}{r},$$

$$\text{oder } z=\zeta\left(1+\frac{2a+\zeta}{r}+\frac{2AM}{r}\right).$$

In dem Gliede mit $\frac{2AM}{r}$ setzen wir abkürzend $A=9407{,}7\left(1+\frac{3\,(t+t')}{1600}\right)$, und finden es dadurch, weil der Erdhalbmesser 3268175 Toisen beträgt,

$$=0{,}0025\left(1+\frac{3}{1600}(t+t')\right)=0{,}0025+0{,}000005(t+t')$$

nächstens. So erhalten wir

$$z = \zeta\left(1{,}0025 + \frac{2a+\zeta}{r} + 0{,}000005\,(t+t')\right),$$

wofür wir wieder beinahe genau $z = 1{,}0025\zeta\left(1+\frac{2a+\zeta}{r}\right)$ setzen dürfen. Die Multiplication mit 1,0025 bringen wir sogleich am Barometercoefficienten an, wodurch dieser = 9432 wird.

Wenn wir nun noch das Product des Barometercoefficienten in $1+0{,}0027\cos 2\psi$, d. h., $9432\,(1+0{,}0027\cos 2\psi)$ darstellen durch $9432 + 25\cos 2\psi$, so haben wir folgende Formeln:

$$\text{X)}\quad\left\{\begin{aligned} &\zeta = (9432+25\cos 2\psi)\left(1+\frac{3\,(t+t')}{1600}\right)(\log H' - \log h') \\ &z = \zeta\left(1+\frac{2a+\zeta}{r}\right) \\ &H' = H\left(1-\frac{T}{5412}\right),\ h' = h\left(1-\frac{T'}{5412}\right) \\ &r = 3270000\ \text{Toisen.} \end{aligned}\right.$$

2) Diese Rechnung wird man theils mit Logarithmen führen, um sie möglichst leicht zu machen, und dann kann man die Logarithmen einiger Factoren durch eine sehr leichte Rechnung erhalten. — Zuerst ist nämlich

$$\log(9432+25\cos 2\psi) = \log 9432 + \log\left(1+\frac{25\cos 2\psi}{9432}\right)$$

$= \log 9432 + \frac{M\cdot 25\cos 2\psi}{9432}$. Dieses giebt aber sehr nahe

$$\text{XI)}\quad \log(9432 + 25\cos 2\psi) = 3{,}974604 = \frac{\cos 2\psi}{900},$$

was sich leicht berechnen läßt.

Ferner hat man $\log H' = \log H + \log\left(1-\frac{T}{5412}\right) = \log H - \frac{MT}{5412} = \log H - \frac{T}{12462}$, und ebenso auch $\log h' = \log h - \frac{T'}{12462}$, daher

$$\text{XII)}\ \log H' - \log h' = \log H - \log h - \frac{T-T'}{12462}.$$

Besonders bequem wird diese letzte Rechnung, wenn man ein Réaumur'sches Thermometer gebraucht; da hier die Anzahl der Grade $T - T'$ nur $\frac{4}{5}$ von der bei der 100theiligen Scala beträgt, so muß auch der Nenner 12462 um $\frac{1}{5}$ verkleinert werden, wodurch man äußerst nahe erhält

$$\log H' - \log h' = \log H - \log h - \frac{T-T'}{10000}.$$

§. 198.

Wir wollen nun das bisher Vorgetragene in eine practische Rechnungsregel zusammenfassen, womit wir vielleicht dem oder jenem Leser einen Gefallen erweisen können. Die Regeln, welche man bei den Thermometer- und Barometerbeobachtungen im Auge haben muß, geben wir nachher noch.

1) Man verbessere zuerst den Barometercoefficienten, wegen der geographischen Breite ψ, nach der Formel $9432 + 25 \cos 2\psi$. Den corrigirten Logarithmen dieses Coefficienten erhält man nahe genau durch die Formel $3{,}974604 + \frac{\cos 2\psi}{900}$.

2) Man suche die Summe der unteren Temperatur t und der oberen t' (der Luft nämlich) und berechne hieraus die Zahl $1 + \frac{3(t+t')}{1600}$, wodurch die Höhe wegen der Temperatur der Luft corrigirt wird. Dieses setzt eine 100theilige Thermometerscale voraus; gebraucht man das Réaumur'sche Thermometer, so ist dieselbe Zahl =

$$1 + \frac{3(t+t')}{1280} = 1 + \frac{t+t'}{427}.$$

3) Man corrigire jede Barometerhöhe auf die Temperatur des Quecksilbers 0°. Sind H und T die Barometerhöhe und die Temperatur des Quecksilbers an der unteren Station, bedeuten ferner h und T' dasselbe für die obere Station, und sind H' und h' die corrigirten Barometerhöhen, so ist $H = H\left(1 - \frac{T}{5412}\right)$, $h' = h\left(1 - \frac{T'}{5412}\right)$.

Dieses setzt wieder den Gebrauch eines Thermometers nach Celsius voraus; sind aber die Grade T und T' nach Réaumur gegeben, so ist $H' = H\left(1-\frac{T}{4440}\right)$ und $h' = h\left(1-\frac{T'}{4440}\right)$.

4) Man ziehe die Logarithmen der corrigirten Barometerhöhen von einander ab, d. h., man suche die Differenzen log H' — log h'. Diese Differenz erhält man leichter aus den beobachteten Barometerhöhen H und h durch die Formeln:

$\log H - \log h - \frac{T-T'}{12462}$, wenn T und T' in Graden nach Celsius gegeben sind;

$\log H - \log h - \frac{T-T'}{10000}$, wenn T und T' in Graden nach Réaumur gegeben sind.

5) Die nach Nro. 1, 2 und 4 gefundenen Zahlen multiplicire man (mit Hülfe der Logarithmen) miteinander, so giebt das Product die gesuchte Höhe in französischen Toisen schon sehr genau an.

6) Heißt endlich die in Nro. 5 berechnete Zahl ζ, und bedeutet a die Höhe der unteren Station über der Meeresfläche, r den Erdhalbmesser = 3270000 Toisen, so ist die corrigirte Höhe

$$z = \zeta\left(1+\frac{2a+\zeta}{r}\right),$$

wozu man noch das Glied $0{,}000005\,(t+t')\,\zeta$ hinzufügen könnte, wenn t und t' nach Celsius gegeben sind.

§. 199.

Wir wollen diese Rechnung nun durch ein Beispiel erläutern.

Bei Ramond's Bestimmung der Höhe des Pic de Bigorre über Tarbes (Pyrenäen) wurde auf dem Berge von Ramond, in Tarbes, von Dangos Folgendes beobachtet:

Auf dem Berge war die Barometerhöhe h=19,845 Zoll, die Temperatur des Quecksilbers T' = 7°,6 R., und die der Luft t' = 3°,2 R. In Tarbes war die

Barometerhöhe $H = 27,17$ Zoll, die Temperatur des Quecksilbers $T = 14,9^o$, und die der Luft $t = 15,3$. Die Beobachtung fand unter der Breite $\psi = 43^o$ statt.

1) Weil $\psi = 43^o$ und daher $\cos 2\psi = \cos 86^o = 0,06976$, so ist der corrigirte Logarithmus des Barometercoefficienten $= 3,974604 + \frac{0,06976}{900} =$

$$3,974604 + 0,000077 = 3,974681.$$

2) Die Summe der oberen und unteren Temperatur ist $15,3 + 3,2 = 18,5^o$ nach Réaumur, also der Correctionsfactor, wegen der Temperatur der Luft $= 1 + \frac{18,5}{427} = 1,043326$, und sein Logarithmus $= 0,018434$.

3) Da ein Réaumur'sches Thermometer gebraucht worden, so ist die Differenz der Logarithmen der corrigirten Barometerhöhen $= \log H - \log h - \frac{T - T'}{10000}$

$= 1,434090 - 1,297651 - \frac{14,9 - 7,6}{10000} = 0,136439 - 0,00073 = 0,135709$. Von dieser Differenz ist der Logarithmus $= 0,132608 - 1$.

4) Addirt man die in Nro. 1, 2 und 3 berechneten Logarithmen, so ist die Summe gleich $3,125723 =$ dem Logarithmus der genäherten Höhe ζ. Demnach $\zeta = 1335,74$ Toisen $= 8014,4$ Fuß.

5) Um diese Höhe noch zu verbessern, hat man $z = \zeta\left(1 + \frac{2a + \zeta}{r}\right)$. Lassen wir hier die Höhe a der unteren Station über dem Meeresspiegel weg, so ist $z = \zeta\left(1 + \frac{\zeta}{r}\right)$. Man findet aber $\frac{\zeta}{r} = 0,000408$, daher $z = 8014,4 \times 1,000408 = 8018$ Fuß. Die ganze Verbesserung beträgt also nur 3,3 Fuß.

Das Glied $0,000005\,(t + t')\,\zeta$ beträgt etwa 1 Fuß, so daß demnach die Höhe des Pic de Bigorre $= 8019$ Fuß wäre. Die trigonometrische Messung gab 8044 Fuß, also 25 Fuß mehr.

§. 200.

Auf gleiche Weise bestimmt man auch die Höhe eines Ortes über der Meeresfläche, indem man nach mittleren Temperaturen und Barometerhöhen rechnet. Für den

Meeresspiegel ist die mittlere (auf 0° Temperatur corrigirte) Barometerhöhe $H' = 337,4$ Pariser Linien, und die mittlere Temperatur $t = 12,8°$ C. $= 10,24°$ R. An dem Orte, dessen Höhe bestimmt werden soll, muß man eine große Anzahl Barometer- und Thermometerbeobachtungen anstellen und aus allen das Mittel nehmen.

So ist, z. B., für Genf $h' = 321,4'''$ und $t' = 12°$ C. $= 9,6°$ R. Die geographische Breite ist $\psi = 46° \, 12'$, und daher $\cos 2\psi = \cos 92° \, 24' = -0,042$. Daher der verbesserte Logarithmus des Barometercoefficienten $= 3,974572 + \frac{-0,042}{900} = 3,974525$. — Ferner $t + t' = 24,8°$ C., daher $1 + \frac{3\,(t + t')}{1600} = 1,04650$, wovon der Logarithmus $= 0,019739$. Endlich $\log H' - \log h' = 2,528145 - 2,507046 = 0,021099$, wovon wiederum der Logarithmus $0,324262 - 2$. Die Summe aller drei Logarithmen giebt $\log \zeta = 2,318526$, also die Höhe Genf's über der Meeresfläche $\zeta = 208,2$ Toisen $= 1249$ Fuß. Es ist nicht nöthig, die Höhe noch ferner zu corrigiren.

§. 201.

Die Unsicherheit in den Resultaten barometrischer Höhenmessungen ist oft sehr groß, und namentlich weit größer, als die kleinen Correctionen, die wir, wegen Abnahme der Schwere in höheren Regionen, an der Formel

$$\zeta = (9431 + 25 \cos 2\psi)\left(1 + \frac{3\,(t + t')}{1600}\right) \times \log \frac{H\left(1 - \frac{T}{5412}\right)}{h\left(1 - \frac{T'}{5412}\right)}$$

noch anbrachten. Die Ursachen hiervon sind:

1) Unrichtiges Messen der Barometerhöhen, wobei sehr leicht um $\frac{1}{10}$ Linie gefehlt werden kann.

2) Unrichtige Temperaturbestimmungen, sowohl der Luft, als des Quecksilbers, wobei, wegen plötzlich eintretender Witterungsveränderung, sehr leicht Fehler von 1° begangen werden können.

3) Der mehr oder minder feuchte Zustand der Luft, den wir bis jetzt noch nicht bestimmt in Rechnung zu nehmen wissen.

4) Die Annahme, daß das arithmetische Mittel zwischen der unteren und oberen Temperatur als die gleichförmig durch die ganze Luftsäule verbreitete angesehen werden könne, ist gewiß nicht richtig. Die Temperatur der Luft nimmt von unten nach oben ab, und zwar nach einem Gesetze, das schwerlich durch mathematische Formeln ausgedrückt werden wird, und eben darum so gut, wie gar kein Gesetz ist. Gewöhnlich nimmt man an, daß die Abnahme der Temperatur mit der Höhe gleichförmig sei, d. h., eine arithmetische Progression befolge, aber diese Progression ist unter verschiedenen Himmelsstrichen, zu verschiedenen Jahreszeiten, ja selbst zu verschiedenen Tagesstunden verschieden. Diese Annahme würde aber die barometrische Höhenmessungsformel um ein Merkliches ändern.

5) Das Schlimmste aber ist der oft Statt findende ganz regellose Temperaturwechsel, der durch ununterbrochene Luftströmungen herbeigeführt wird. Die unteren Schichten sind oft kälter, oft wärmer, als es nach Maßgabe der oberen Temperatur sein sollte; oft nimmt Anfangs die Temperatur mit der Höhe zu, und dann erst tritt Temperaturabnahme ein. Man begreift, daß unter solchen Umständen die Voraussetzung einer mittlern Temperatur der Luftsäule, die aus den an beiden Stationen beobachteten abgeleitet wird, oft gar sehr von der Wahrheit abweichen wird; aber bedeutender noch wird der Umstand, daß in Folge der Luftströmungen die Schichten von gleicher Dichte nicht mehr horizontal bleiben und also die Voraussetzung, worauf sich die Theorie des barometrischen Höhenmessens gründet, aufgehoben wird. Man hat gefunden, daß in den Morgen- und Abendstunden, kurz vor Sonnen-Auf- und Untergang, der regellose Temperaturwechsel größer ist, als des Mittags, und daß die geeignetste Zeit zu barometrischen Höhenmessungen des Morgens um 8 oder 9 Uhr und Nachmittags um 3 oder 4 Uhr Statt findet.

6) Das Barometer verändert seinen Stand an dem einen Orte oft bedeutend, ohne daß gleichzeitig auch eine Aenderung an dem anderen Orte einträte, und man darf daher an solchen Tagen, wo das Barometer bedeutend

schwankt, gar keine Beobachtungen anstellen. Deßhalb ist es auch am Besten, wenn zwei Beobachter an beiden Stationen ihre Beobachtungen gleichzeitig anstellen können. Liegen beide Stationen in bedeutender Entfernung von einander, so reicht man mit einer Beobachtung nicht aus, sondern muß aus mehren zusammengehörigen Beobachtungen den Höhenunterschied mehrmals berechnen und hieraus eine Mittelzahl ableiten. Die örtlichen Schwankungen des Barometers und Thermometers werden sich dann wahrscheinlich im Resultate ausgeglichen haben.

7) Auch hat die Richtung des Windes Einfluß auf den Barometerstand. Das Barometer steht in der Regel an dem Orte, woher der Wind kommt, zu hoch, und man begreift daher, daß man bei starkem Winde, besonders wenn seine Richtung durch beide Stationen hindurchgeht, solche Beobachtung nicht anstellen darf.

Dreizehntes Capitel.

Von der Ausgleichung der Fehler nach den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, oder die Methode der kleinsten Quadratsummen.

§. 202.

Man denke sich eine Urne mit 20 gleich großen und durch das Gefühl nicht weiter unterscheidbaren Kugeln, worunter 7 weiße und 13 schwarze befindlich sind. Greift man auf Gerathewohl in die Urne hinein, so kann der Zufall schon auf eine weiße Kugel führen, auch ist es denkbar, daß man selbst bei wiederholten Zügen mehr weiße als schwarze Kugeln treffen könne; aber da alle Gründe fehlen, warum eine weiße Kugel eher gezogen werden sollte, als eine schwarze, so urtheilen wir in vorliegendem Falle, daß es leichter sein werde, eine schwarze Kugel zu treffen, als eine weiße, w e i l j e n e h ä u f i g e r s i n d, a l s d i e s e. In der That sprechen 13 Fälle für den Zug einer schwarzen und nur 7 für den Zug einer

weißen Kugel. Wir nennen nun das Verhältniß der Anzahl von Fällen, die einem Ereignisse günstig sind, zur Anzahl aller möglichen Fälle die mathematische Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses und bezeichnen dieselbe durch einen Bruch, dessen Zähler die Anzahl der günstigen und dessen Nenner die Zahl aller möglichen Fälle ist. So ist in dem obigen Beispiele die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, $= \frac{7}{20}$; die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu treffen, ist $\frac{13}{20}$, und beide Brüche zusammen machen $\frac{7}{20} + \frac{13}{20} = 1$, welches das Zeichen der Gewißheit ist. Denn ein Zug muß doch entweder eine weiße oder eine schwarze Kugel bringen.

Wenn überhaupt n Fälle möglich sind und deren m für das Ereigniß A sprechen, so ist die Wahrscheinlichkeit desselben $= \frac{m}{n}$. Die Wahrscheinlichkeit des Gegentheiles aber $= 1 - \frac{m}{n}$.

§. 203.

Man denke sich ferner in der Urne 7 weiße, 10 rothe und 13 schwarze Kugeln und frage, wie wahrscheinlich es sei, entweder eine weiße oder eine rothe Kugel zu ziehen. Hier hat man außer den 7 Fällen, welche für den Zug einer weißen Kugel sprechen, offenbar auch noch die 10 Fälle für sich, in denen eine rothe Kugel gezogen wird; die Anzahl der dem Ereigniß günstigen Fälle ist also $7 + 10 = 17$, und da die Zahl aller möglichen Fälle $= 30$ ist, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{17}{30} = \frac{7}{30} + \frac{10}{30}$. Es ist aber $\frac{7}{30}$ die Wahrscheinlichkeit, eine weiße, und $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ die Wahrscheinlichkeit, eine rothe Kugel zu ziehen, und die fragliche Wahrscheinlichkeit ist also die Summe jener beiden.

Ist überhaupt a die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereigniß A, und b die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereigniß B sich zutragen werde, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß entweder A oder B erfolgen könne, $= a + b$.

§. 204.

Wir wollen uns nun noch zwei Urnen, die erste mit 7 weißen und 13 schwarzen, die ander mit 5 wei-

ßen und 11 schwarzen Kugeln denken und nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daß man aus der ersten Urne eine weiße und aus der andern eine schwarze Kugel ziehen werde, sei es nun, daß beide Züge gleichzeitig oder nach einander geschehen. Jede der 20 Kugeln in der ersten Urne kann mit jeder von den 16 in der andern gezogen werden, und daher sind im Ganzen 20 • 16 oder 320 Fälle möglich. Für den Zug einer weißen Kugel aus der ersten Urne sprechen 7, für den Zug einer schwarzen Kugel aus der andern Urne sprechen 11 Fälle, und daher giebt es 7 • 11 oder 77 Fälle, welche dem fraglichen Ereignisse günstig sind; denn jede der 7 weißen Kugeln der ersten Urne kann mit jeder der 11 schwarzen in der andern Urne verbunden werden. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{77}{360} = \frac{7}{20} \cdot \frac{11}{16}$, nämlich sie ist gleich dem Producte aus den Wahrscheinlichkeiten, daß aus der ersten Urne eine weiße, aus der andern eine schwarze Kugel gezogen werde. 320.

Die Wahrscheinlichkeiten, aus der ersten Urne eine schwarze und aus der andern eine weiße Kugel zu ziehen, sind bezüglich $\frac{13}{20}$ und $\frac{5}{16}$, daher die Wahrscheinlichkeit, daß beide Züge zugleich Statt haben werden, $= \frac{13}{20} \cdot \frac{5}{16} = \frac{65}{320}$. Auf gleiche Weise ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit, aus jeder Urne eine weiße Kugel zu ziehen, $= \frac{7}{20} \cdot \frac{5}{16} = \frac{35}{320}$, und die Wahrscheinlichkeit, in jeder Urne eine schwarze Kugel zu treffen, $= \frac{13}{20} \cdot \frac{11}{16} = \frac{143}{360}$. Die Wahrscheinlichkeit also, mit dem einen Zuge eine weiße, mit dem andern eine schwarze Kugel zu treffen, ist $\frac{77}{320} + \frac{65}{320} = \frac{142}{320}$, wobei es nicht darauf ankommt, aus welcher Urne die weiße oder die schwarze Kugel gezogen wird. Die Wahrscheinlichkeit, entweder zwei weiße oder zwei schwarze Kugeln zu treffen, ist $\frac{35}{320} + \frac{143}{320} = \frac{178}{320}$, und die Wahrscheinlichkeit endlich, eine weiße und eine schwarze, oder zwei weiße, oder zwei schwarze Kugeln zu ziehen, ist $\frac{142}{320} + \frac{178}{320} = 1$, also der Gewißheit gleich, weil einer von diesen Fällen nothwendig Statt haben muß.

Wenn also a die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, b die des Ereignisses B ist, so ist $a \times b$ die Wahrscheinlichkeit, daß A und B zugleich Statt haben werden.

§. 205.

Die practische Anwendbarkeit aller Wahrscheinlichkeitsrechnung gründet sich auf den durch die Erfahrung vielseitig bestätigten Satz, daß, wenn ein Versuch häufig genug wiederholt wird, die verschiedenen Fälle sich nahe in ihrem wahren Verhältnisse zeigen. Wenn, z. B., aus der Urne in §. 202 sehr oft eine Kugel gezogen und die gezogene Kugel immer wieder hinein gelegt würde, so würde endlich die Zahl der gezogenen weißen Kugeln zur Anzahl der schwarzen sich nahe wie 7 : 13 verhalten. Dies nennt man das Gesetz der großen Zahlen.

§. 206.

Alle unsere Messungen leiden an gewissen Fehlern, deren Ursachen wir in den bisherigen Vorträgen mit möglichster Vollständigkeit nachgewiesen haben, und die wir füglich in regelmäßige und zufällige abtheilen können. Die regelmäßigen folgen bestimmten Gesetzen, und man kann daher ihre Ursachen ausmitteln und sodann entfernen oder wenigstens die Beobachtungen darnach verbessern. Dahin gehören, z. B., die Fehler, welche durch unberichtigte Instrumente in die Messung kommen. Die Fehler der andern Art hängen von Umständen ab, die bei den Beobachtungen zufällig einwirken, und welche unserer sorgsamsten Aufmerksamkeit entgehen, so daß wir außer Stande sind, die Beobachtungen von ihnen rein zu halten. Dahin gehören, z. B., bei Winkelmessungen, Erschütterungen des Instrumentes und zufälliges Nachgeben seiner Theile, mangelhafte Beleuchtung der anvisirten Objecte, Luftzitterungen und Seitenausweichungen der Lichtstrahlen, so daß diese nicht in der Verticalebene des Beobachters bleiben, mangelhafte Schätzung solcher Theile, die der Nonius nicht unmittelbar angiebt, Theilungsfehler u. s. w. Um solche Fehler zu entdecken und so viel als möglich unschädlich zu machen, bleibt uns kein Mittel übrig, als die Vervielfältigung der Beobachtungen. Hierdurch bekommen wir Widersprüche in unsere Messungen, durch welche eben die Fehler nachgewiesen werden, und die Aufgabe ist nun, jene Widersprüche auf das Beste auszugleichen, so daß

wir für die gesuchten Größen gewisse wahrscheinliche Werthe bekommen, die wir aber keineswegs für die wahren halten dürfen.

§. 207.

Durch die Bemerkung des vorigen §. entsteht uns nnn die Ausgleichungsrechnung, deren sämmtliche Aufgaben sich in den drei folgenden zusammenfassen lassen.

Erstens: Der Werth einer Größe O wird durch unmittelbare Messung bestimmt. Hier mißt man O mehr als ein Mal und erhält dabei in den meisten Fällen Resultate $o_1\ o_2\ o_3\ \ldots\ o_n$, welche nicht mit einander übereinstimmen. Die Aufgabe ist dann, für O einen solchen Werth zu setzen, welcher mit allen Resultaten der Messung auf das Beste harmonirt.

Zweitens: Man hat p unbekannte Größen $x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_p$ zu bestimmen, kann sie aber nicht unmittelbar beobachten, sondern ist genöthigt, statt ihrer eine Größe L zu messen, welche aus $x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_p$ durch die Gleichung

$$F\,(x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_p) = L$$

berechnet wird. Hier ist klar, daß man, um alle p unbekannte Größen zu finden, p verschiedene Werthe von L beobachten muß, welche $l_1\ l_2\ l_3\ \ldots\ l_p$ heißen mögen. Man hat dann folgende p Gleichungen:

$$\begin{array}{l} F\,(x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_p) = l_1 \\ F\,(x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_p) = l_2 \\ F\,(x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_p) = l_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F\,(x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_p) = l_p \end{array}$$

die zur Bestimmung von $x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_p$ hinreichen. Mißt man nun aber außer $l_1\ l_2\ l_3\ \ldots\ l_p$ noch $l_{p+1}\ l_{p+2}\ l_{p+3}\ \ldots\ l_n$, so hat man zu den vorigen Gleichungen noch folgende:

$$\begin{array}{l} F\,(x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_p) = l_{p+1} \\ F\,(x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_p) = l_{p+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F\,(x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_p) = l_n \end{array}$$

und wenn man hierin links die vorhin gefundenen Werthe von $x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_p$ einsetzt, so wird die Rech-

nung F nicht solche Werthe liefern, welche mit den beobachteten l_{p+1} l_{p+2} .... l_n genau übereinstimmen. Hierdurch geräth man also auf Wiedersprüche, welche in der Mangelhaftigkeit der Beobachtungen von L ihren Grund haben. Man hat hier n Gleichungen, um p unbekannte Größen zu bestimmen, aber da zu solchem Zwecke schon p Gleichungen ausreichen, so ist das Problem mehr als bestimmt. Wir können von den n Gleichungen p beliebige ausheben und darnach x_1 x_2 x_3 .... x_p berechnen, und wenn alle Beobachtungen genau wären, so müßten auch immer dieselben Werthe von x_1 $x_2 x_3$ .... x_p gefunden werden, welche Zusammenstellung von p Gleichungen man auch wählen würde. Da aber eben die Beobachtungen um kleine Größen fehlerhaft sind, so werden auch x_1 x_2 x_3 ...... x_p aus verschiedenen Zusammenstellungen der Gleichungen verschieden gefunden, und die Aufgabe ist nun, die Werthe von x_1 x_2 x_3 .... x_p so zu bestimmen, daß allen n Gleichungen, also auch allen beobachteten Werthen der Größe L auf das Beste genügt wird.

Drittens. Es werden n unbekannte Größen O_1 O_2 O_3 .... O_n unmittelbar beobachtet, aber dieselben sind nicht durchweg von einander unabhängig, sondern zwischen ihnen bestehen p Gleichungen, vermöge deren p der beobachteten O aus den übrigen n — p durch bloße Rechnung sich ergeben. Das einfachste Beispiel hierzu bieten die drei Winkel A B C eines ebenen Dreiecks, für welche immer $A + B + C = 180^0$ sein muß; aber die Fehler der Beobachtungen bringen mit sich, daß die Winkelsumme nicht genau 180^0 beträgt, es sei denn, daß sich die Fehler in der Summe ausglichen. Die Aufgabe ist nun, statt der beobachteten O_1 O_2 O_3 .... O_n solche Werthe zu setzen, daß den p Gleichungen wirklich genügt wird, daß aber die substituirten Werthe der O von den beobachteten zugleich die möglichst geringe Abweichung zeigen.

Wie diese Aufgaben nun aufzulösen sind, soll im Folgenden nachgewiesen werden.

§. 208.

Man stelle sich vor, man habe eine Größe O, z. B. einen Winkel, sehr viele Mal, etwa 10000 Mal, ge-

messen und sei versichert, daß dabei keine anderen Fehler vorgekommen seien, als die unvermeidlichen, die eine gewisse Grenze nicht überschreiten können und bald positiv, bald negativ sein werden, je nachdem der Winkel zu klein oder zu groß gemessen wurde. Hat man durch die Messung nacheinander statt des wahren O die Größen o_0 o_1 o_2 o_3 .... o_z gefunden, und bezeichnet man die Fehler durch $\triangle_0$ $\triangle_1$ $\triangle_2$ $\triangle_3$ ..., $\triangle_z$, so hat man

$$(1)\begin{cases}\triangle_0 = O - o_0\\ \triangle_1 = O - o_1\\ \triangle_2 = O - o_2\\ \triangle_3 = O - o_3\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \triangle_z = O - o_z\end{cases}$$

Unter diesen Fehlern werden sich welche finden, welche $= 0$ sind; es sei $\triangle_0 = 0$ und komme im Ganzen n_0 Mal vor. Ferner werden einige Beobachtungen den kleinsten Fehler $\triangle_1$ zeigen; ihre Anzahl sei n_1. So wird eine Anzahl n_2 von Beobachtungen den Fehler $\triangle_2$, und überhaupt eine Anzahl n_r von Beobachtungen den Fehler $\triangle_r$ zeigen. Bei einer Anzahl n_{-1} von Beobachtungen werden wir den negativen Fehler $\triangle_{-1}$, dann bei n_{-2} Beobachtungen den negativen Fehler $\triangle_{-2}$ und überhaupt bei n_{-r} Beobachtungen den Fehler $\triangle_{-r}$ finden. So bildet sich uns folgende Reihe:

(2)

Beobachtete Werthe von O:

$$\ldots o_{-r} \ldots\ldots o_{-3}\, o_{-2}\, o_{-1}\, o_0\, o_1\, o_2\, o_3 \ldots\ldots o_r \ldots\ldots$$

Fehler der Beobachtungen:

$$\ldots\triangle_{-r}\ldots\triangle_{-3}\triangle_{-2}\triangle_{-1}\triangle_0\triangle_1\triangle_2\triangle_3\ldots\triangle_r\ldots$$

Häufigkeit jedes Fehlers:

$$\ldots n_{-r}\ldots n_{-3}\, n_{-2}\, n_{-1}\, n_0\, n_1\, n_2\, n_3 \ldots n_r \ldots$$

und in derselben ist $\triangle_0 = 0$, also o_0 dem wahren Werthe O gleich. Hierüber haben wir nun, in Folge des Gesetzes der großen Zahlen, Folgendes festzustellen:

1) Wenn $\triangle_{-1} = \triangle_1$, $\triangle_{-2} = \triangle_2 \ldots \triangle_{-r} = \triangle_r$, so ist $n_{-1} = n_1$, $n_{-2} = n_2 \ldots n_{-r} = n_r$, d. h., die gleichen, aber entgegengesetzten Fehler kommen gleich

häufig vor. Denn die Ursachen, wodurch die Fehler erzeugt werden, können eben so gut nach der einen, wie nach der andern Seite wirken, und da die Beobachtungen in hinlänglicher Anzahl vorausgesetzt werden, so müssen sie ihre Wirkungen nahe im wahren Verhältnisse ihres möglichen Auftretens geäußert haben.

Ist nun die Anzahl aller Beobachtungen $= N$, so sprechen unter ihnen n_r für den Fehler $\triangle_r$, die Wahrscheinlichkeit dieses Fehlers, oder diesen Fehler zu begehen, ist also $\frac{n_r}{N}$. Gleichergestalt ist die Wahrscheinlichkeit, den Fehler $\triangle_{-r}$ zu begehen, $= \frac{n_{-r}}{N}$, und wenn nun $\triangle_{-r} = \triangle_r$ ist, so ist auch $\frac{n_{-r}}{N} = \frac{n_r}{N}$, so daß die gleichen, aber entgegengesetzten Fehler gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

2) Ist $\triangle_t > \triangle_r$, so ist $n_t < n_r$, d. h., ein Fehler ist um so häufiger, je kleiner er ist. Im Allgemeinen läßt sich hiergegen nichts einwenden, denn könnten die größeren Fehler häufiger begangen werden, als die kleineren, so würde ihre Ursache einer regelmäßig wirkenden gleich kommen und deßhalb gefunden und beseitigt werden können. Willkürlicher aber scheint die Annahme, daß die Häufigkeit der Fehler mit ihrer Größe durchweg abnehme; wenn indessen vorausgesetzt werden darf, daß mit aller Sorgfalt und genauer Berücksichtigung aller Umstände gemessen worden, so werden die fehlererzeugenden Ursachen am öftersten fehlen und überhaupt desto weniger häufig sein, je größere Wirkungen sie hervorbringen. Daher wird in der Zusammenstellung (2), in welcher wir die Fehler ihrer Größe nach geordnet denken, n_0 unter allen n das größte sein, es wird $n_0 > n_1$, $n_1 > n_2$, $n_2 > n_3$ sein u. s. w.

Nun sind $\frac{n_0}{N}, \frac{n_1}{N}, \frac{n_2}{N} \ldots \frac{n_r}{N}$ die Wahrscheinlichkeiten der Fehler $\triangle_0\ \triangle_1\ \triangle_2 \ldots\ \triangle_r$, und das richtige Resultat $o_0 = O$ hat also die größte Wahrscheinlichkeit; die Wahrscheinlichkeiten der anderen Resultate werden um so geringer, je fehlerhafter sie sind.

§. 209.

Aus dem bisher Gesagten ergiebt sich leicht, wie man aus einer sehr großen Beobachtungsreihe, wie die in II vorausgesetzte, das wahre Resultat herausfinden kann. Man dürfte nämlich nur die beobachteten Werthe von O so ordnen, wie sie ihrer Größe nach aufeinander folgen und dann den in der Mitte stehenden auszählen. Noch allgemeiner aber wird folgendes Verfahren. Da in der ausgedehnten Beobachtungsreihe (2) die Größe O gleich oft um gleiche Differenzen zu groß und zu klein beobachtet wurde, so muß die Summe aller beobachteten Werthe das richtige N fache von O sein, wenn N die Zahl aller Beobachtungen ist. Man hat daher, wenn man die negativen Stellenzeiger aus (2) wieder fallen läßt:

$$O = \frac{o_1 + o_2 + o_3 + \ldots + o_N}{N}.$$

Man begreift leicht, daß durch dieses sogenannte arithmetische Mittel der richtige Werth von O selbst dann noch gefunden werden kann, wenn ihn die Beobachtungsreihe nicht enthält, wenn nur in derselben gleich große positive und negative Fehler gleich oft vorkommen, weßhalb selbst nur eine geringe Zahl von Beobachtungen auf einen sehr genäherten Werth von O führen kann. Denn wenn auch die Summe derselben nicht genau $N \cdot O$ ist, so wird sie doch von NO um weniger als das Nfache des größten Beobachtungsfehlers unterschieden sein, daher das so berechnete O einen geringeren Fehler zeigen muß, als die fehlerhafteste Beobachtung.

Aber wie günstig auch die Beobachtungsreihe zur Auffindung des wahren O sein mag, daß man das wahre O wirklich gefunden habe, läßt sich auf keine Weise entscheiden, denn es bleibt immer noch denkbar, daß sich die positiven und negativen Fehler in der Summe $o_1 + o_2 + o_3 \ldots + o_N$ nicht aufheben. Das arithmetische Mittel giebt uns nur einen Werth, welcher vor allen die meiste Wahrscheinlichkeit für sich hat, oder es ist der wahrscheinlichste Werth der gesuchten Größe O. Bezeichnen wir ihn mit M und setzen die Anzahl aller Beobachtungen = n, so ist:

$$(3)\ M = \frac{o_1 + o_2 + o_3 \ldots\ldots\ldots + o_n}{n}.$$

§. 210.

Die Beobachtungsreihe in (2) wollen wir nun als eine stetige uns vorstellen, d. h. als eine solche, in welcher die Fehler nicht in bestimmten Sprüngen auf einander folgen, sondern in unendlich kleinen Abstufungen neben einander liegen, so daß jeder Fehlerwerth, der überhaupt noch möglich ist, darin vorkommt. Die Anzahl aller Fehlerwerthe ist dann begreiflich unendlich groß. Nur aus der stetigen Fehlerreihe läßt sich die wahre Häufigkeit jedes Fehlers entnehmen; die wirklich beobachtete kann nur das Verhältniß der Häufigkeiten gewisser Fehler annäherungsweise geben.

Da die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers $\triangle$ mit dessen Größe veränderlich ist, so können wir sie als eine Function des Fehlers betrachten und durch $\varphi\ (\triangle)$ bezeichnen. Die Eigenschaften, welche wir an der Beobachtungsreihe (2) bemerkt haben, kommen nun auch der Function $\varphi\ (\triangle)$ zu, es wird also $\varphi (\triangle)$ seinen größten Werth für $\triangle = 0$ erhalten und bei gleichen aber entgegengesetzten Werthen von $\triangle$ gleiche Werthe zeigen, so daß nämlich $\varphi\ (-\triangle) = \varphi\ (\triangle)$ ist. Wenn der Fehler $\triangle$ seinen größten Werth hat, so sollte eigentlich $\varphi\ (\triangle) = 0$ werden, weil die Wahrscheinlichkeit, den größten Fehler begangen zu haben, unendlich viel geringer als bei den kleineren Fehlern ist. Für alle noch größere Werthe von $\triangle$ müßte $\varphi (\triangle)$ ebenfalls $= 0$ sein, aber da dieses kein analytischer Ausdruck leisten kann, so müssen wir uns begnügen, für $\varphi\ (\triangle)$ eine solche Form zu finden, welche bei dem größten Werthe von $\triangle$ einen sehr kleinen Werth annimmt und dann noch unausgesetzt kleiner wird, wenn $\triangle$ über den größten Fehlerwerth steigt, so daß ein Verschwinden von $\varphi\ (\triangle)$ erst bei $\triangle = \infty$ eintritt.

§. 211.

Man betrachte jetzt die arithmetische Fehlerreihe

$$\triangle,\ \triangle + \frac{\delta}{m},\ \triangle + \frac{2\delta}{m},\ \triangle + \frac{3\delta}{m} \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \triangle + \delta$$

so sind die Wahrscheinlichkeiten dieser Fehler der Reihe nach

$$\varphi(\triangle),\ \varphi\left(\triangle+\frac{\delta}{m}\right),\ \varphi\left(\triangle+\frac{2\delta}{m}\right),\ \varphi\left(\triangle+\frac{3\delta}{m}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \varphi(\triangle+\delta)$$

und die Gesammthäufigkeit aller Fehler, d. h. die Wahrscheinlichkeit, einen derselben, gleichviel welchen, begangen zu haben, ist:

$$\varphi(\triangle)+\varphi\left(\triangle+\frac{\delta}{m}\right)+\varphi\left(\triangle+\frac{2\delta}{m}\right)+\varphi\left(\triangle+\frac{3\delta}{m}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\varphi(\triangle+\delta).$$

Nimmt man nun, damit die Fehlerreihe eine stetige werde, m unendlich groß, so giebt die Summe die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler zwischen die Grenzen $\triangle$ und $\triangle+\delta$ falle, nämlich die Gesammthäufigkeit aller Fehlerwerthe zwischen $\triangle$ und $\triangle+\delta$. Da das letzte Glied $\varphi(\triangle+\delta)$ das kleinste und die Anzahl aller Glieder $m+1$ ist, so ist die Summe der Reihe größer $(m+1)\,\varphi(\triangle+\delta)$, woraus sogleich folgt, daß die Wahrscheinlichkeit, ein Fehler liege zwischen den Grenzen $\triangle$ und $\triangle+\delta$, unendlich groß ist im Vergleich zu der Wahrscheinlichkeit, daß er einen bestimmten Werth habe.

Multiplicirt man die Reihe

$$\varphi(\triangle)+\varphi\left(\triangle+\frac{\delta}{m}\right)+\varphi\left(\triangle+\frac{2\delta}{m}\right)+\varphi\left(\triangle+\frac{3\delta}{m}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots+\varphi(\triangle+\delta)$$

mit $\frac{\delta}{m}$, so verwandelt sie sich bekanntlich in das bestimmte Integral

$$\int_{\Delta}^{\Delta+\delta}\varphi(x)\,.\,dx$$

wenn m unendlich groß genommen wird. Die Summe ist folglich

$$\frac{1}{\frac{\delta}{m}}\int_{\Delta}^{\Delta+\delta}\varphi(x)\,.\,dx$$

Dieß ist nun die Gesammthäufigkeit aller Fehlerwerthe, die zwischen den Grenzen $\triangle$ und $\triangle+\delta$ lie-

gen. Bezeichnen wir sie mit w, die Wahrscheinlichkeit des einzelnen Fehlers △ aber mit v, so ist

$$v = \varphi(\triangle)$$

$$(4) \quad w = \frac{1}{\frac{\delta}{m}} \int_{\Delta}^{\Delta + \delta} \varphi(x) \, . \, dx$$

Daher ist auch die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler zwischen die Grenzen △′ und △′ + δ′ falle, =

$$w' = \frac{1}{\frac{\delta'}{m'}} \int_{\Delta'}^{\Delta' + \delta'} \varphi(x) \, . \, dx$$

wo m′ die Theilungszahl des Intervalles δ′ ist. Der Quotient

$$\frac{w}{w'} = \frac{\frac{\delta'}{m'}}{\frac{\delta}{m}} \frac{\int_{\Delta}^{\Delta + \delta} \varphi(x) \, . \, dx}{\int_{\Delta'}^{\Delta' + \delta'} \varphi(x) \, . \, dx}$$

drückt dann eine relative Wahrscheinlichkeit aus, sofern er nämlich angiebt, der wievielste Theil die Gesammthäufigkeit aller Fehlerwerthe zwischen △ und △ + δ von der Gesammthäufigkeit aller Fehlerwerthe zwischen △′ und △′ + δ′ ist. Aber hierbei müssen wir die Sprünge $\frac{\delta}{m}$ und $\frac{\delta'}{m'}$, um welche wir die Fehler △ und △′ successive wachsen lassen, für gleich annehmen, damit in gleichen Intervallen gleichviele Fehler liegen und eine directe Vergleichung der Häufigkeiten möglich wird. Denn man darf nicht übersehen, daß w und w′ aus den Summen:

$$\varphi(\triangle) + \varphi\left(\triangle + \frac{\delta}{m}\right) + \varphi\left(\triangle + \frac{2\,\delta}{m}\right) + \ldots\ldots + \varphi(\triangle + \delta)$$

$$\varphi(\triangle') + \varphi\left(\triangle' + \frac{\delta'}{m}\right) + \varphi\left(\triangle' + \frac{2\delta'}{m'}\right) + \ldots\ldots + \varphi(\triangle' + \delta')$$

abgeleitet sind. Man vergleicht also eigentlich die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler einer der Werthe

$$\triangle, \ \triangle + \frac{\delta}{m'}, \ \triangle + \frac{2\,\delta}{m} \ \ldots\ldots\ldots \ \triangle + \delta$$

sei, mit der, daß er unter den Werthen

$$\triangle', \triangle' + \frac{\delta'}{m'}, \triangle' + \frac{2\,\delta'}{m'} \,\ldots\ldots\ldots \triangle' + \delta'$$

sich finde. Indem man nun in jeder Reihe die Theilungszahlen m und m′ unendlich nimmt, beabsichtigt man, daß keiner der möglichen Werthe zwischen $\triangle$ und $\triangle + \delta$, und zwischen $\triangle'$ und $\triangle' + \delta'$ ausgelassen werde, aber wenn dabei $\frac{\delta'}{m'}$ nicht $= \frac{\delta}{m}$, etwa $= \frac{\delta}{2\,m}$ wäre, so würde damit gesagt sein, daß in der ersten Reihe Sprünge um $\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{m}\right)$ ausfallen sollen, es würde also der ersten Voraussetzung, daß kein möglicher Werth zwischen $\triangle$ und $\triangle + \delta$ fehlen soll, widersprochen. Demnach hat man $\frac{\delta'}{m'} = \frac{\delta}{m}$ zu nehmen, so daß

$$\frac{w}{w'} = \frac{\int_{\Delta}^{\Delta + \delta} \varphi\,(x)\,.\,dx}{\int_{\Delta'}^{\Delta' + \delta'} \varphi\,(x)\,.\,dx}$$

wird. Dehnen wir dann das Integral im Nenner auf die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ aus, so wird $w' = 1$, denn es bedeutet nun die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liege, also die Gewißheit. Daher ist

$$(5)\ w = \frac{\int_{\Delta}^{\Delta + \delta} \varphi\,(x)\,.\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\,(x)\,.\,dx}$$

wo nun der Nenner eine constante Größe ist.

§. 212.

Es kommt nun darauf an, die Function $\varphi\,(x)$ näher kennen zu lernen und ihre Form genau zu bestimmen. Man habe daher eine Größe O, n mal beobachtet und die Resultate $o_1\ o_2\ o_3 \ldots . o_n$ erhalten, so folgen daraus die Fehler $O - o_1 = \triangle_1$, $O - o_2 = \triangle_2 \ldots .\ O - o_n =$

$\triangle_n$, und ihre Wahrscheinlichkeiten sind der Reihe nach $\varphi(\triangle_1)$, $\varphi(\triangle_2)$, $\varphi(\triangle_3)$ ..... $\varphi(\triangle_n)$. Die Wahrscheinlichkeit also, daß $\triangle_1$ der Fehler der ersten und $\triangle_2$ der der zweiten Beobachtung sei, ist $\varphi(\triangle_1) \cdot \varphi(\triangle_2)$ *) und so findet man leicht für die Wahrscheinlichkeit, daß der Reihe nach die Fehler $\triangle_1\ \triangle_2\ \triangle_3$ ..... $\triangle_n$ begangen wurden, den Ausdruck:

(6)

$$W = \varphi(\triangle_1) \cdot \varphi(\triangle_2) \cdot \varphi(\triangle_3) \ldots\ldots \varphi(\triangle_n).$$

Derselbe stellt also die Häufigkeit der bestimmten Fehlerreihe $\triangle_1\ \triangle_2\ \triangle_3$ .... $\triangle_n$ im Vergleich mit der gesammten Häufigkeit aller möglichen Fehlerreihen dar. Je nachdem man nun für **O** verschiedene Werthe denkt, erhalten auch die Fehler $\triangle_1\ \triangle_2\ \triangle_3$ .... $\triangle_n$ verschiedene Werthe, und damit ändert sich auch **W**. Als Princip für die gesammte Ausgleichungsrechnung wird aber festgesetzt, daß man diejenigen Werthe der gesuchten Größen für die wahrscheinlichsten halte, bei denen die Häufigkeit der aus ihnen folgenden Fehlerreihe die möglichst größte wird. Dieses Princip ist ein willkührlich zu Grunde gelegtes und läßt sich auf keinerlei Weise noch rechtfertigen, außer etwa dadurch, daß es durchschnittlich die kleinsten Fehler liefert.

Demnach muß **W** durch **O** ein Größtes und folglich nach den Principien der Differentialrechnung

---

*) Dem Anfänger zu Gefallen soll dieser Ausdruck noch einmal erklärt werden. Deßhalb stelle er sich die Beobachtungsreihe (2) als eine Urne vor, in welcher Kugeln von verschiedener Farbe oder sonstigen Unterscheidungszeichen liegen, durch welche die verschiedenen Fehler versinnlicht werden. Die Anzahl aller Kugeln ist **N**, und davon vertreten ihrer n_1 den Fehler $\varDelta_1$ und ihrer n_2 den Fehler $\varDelta_2$. Das Begehen eines Fehlers ist mit dem Zuge einer Kugel zu vergleichen, die aber immer wieder in die Urne gelegt wird, damit die Fehlerreihe vollständig bleibe. Die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel $\varDelta_1$ zu treffen, ist $\frac{n_1}{N}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß der Zug eine der Kugeln $\varDelta_2$ bringen werde, ist $\frac{n_2}{N}$, daher die Wahrscheinlichkeit, daß der erste Zug eine Kugel $\varDelta_1$ und der andere eine Kugel $\varDelta_2$ treffen werde, $= \frac{n_1}{N} \cdot \frac{n_2}{N} = \varphi(\varDelta_1) \cdot \varphi(\triangle_2)$, nach dem Schlusse des §. 204.

$$\frac{dW}{dO} = 0$$

werden. Nimmt man nun von W den natürlichen Logarithmus, so bekommt man, wenn man der Kürze halber $\varphi(\triangle_1)$ $\varphi(\triangle_2)$ $\varphi(\triangle_3)$ .... $\varphi(\triangle_n)$ mit v_1 v_2 v_3 ..... v_n ausdrückt:

$$\log W = \log v_1 + \log v_2 + \log v_3 \ldots\ldots + \log v_n$$

also auch:

$$\frac{1}{W} \cdot \frac{dW}{dO} = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{dv_1}{dO} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{dv_2}{dO} + \frac{1}{v_3} \cdot \frac{dv_3}{dO} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{v_n} \cdot \frac{dv_n}{dO}$$

also

$$0 = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{dv_1}{dO} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{dv_2}{dO} + \frac{1}{v_3} \cdot \frac{dv_3}{dO} \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{v_n} \cdot \frac{dv_n}{dO}.$$

Da aber allgemein $\triangle_r = O - o_r$ und o_r constant ist, so hat man $dO = d\triangle_r$, und folglich:

$$0 = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{dv_1}{d\triangle_1} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{dv_2}{d\triangle_2} + \frac{1}{v_3} \cdot \frac{dv_3}{d\triangle_3} \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{v_n} \cdot \frac{dv_n}{d\triangle_n}.$$

Diese Gleichung entscheidet noch nichts über die Beschaffenheit der Function v, man kann daher noch festsetzen, daß aus $\left(\frac{dW}{dO}\right) = 0$ der wahrscheinlichste Werth von O folgen soll. Da nun dieser das arithmetische Mittel aller beobachteten Werthe ist, so muß die letzte Gleichung die auf 0 reducirte Gleichung des arithmetischen Mittels geben, welche nach (3):

$$0 = k\left(nO - (o_1 + o_2 + o_3 \ldots\ldots + o_n)\right)$$

$$= k\left(O - o_1 + O - o_2 + O - o_3 \ldots\ldots + O - o_n\right)$$

$$= k\left(\triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3 \ldots\ldots + \triangle_n\right)$$

ist, wo k irgend eine Constante bedeutet. Bezeichnet also ψ (x) eine solche Function von x, welche verschwindet, wenn x = 0 wird, so muß man haben:

$$\frac{1}{v_1} \cdot \frac{dv_1}{d\triangle_1} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{dv_2}{d\triangle_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{v_n} \cdot \frac{dv_n}{d\triangle_n}$$

$$= \psi\, k \left(\triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3 \ldots\ldots \triangle_n\right)$$

Setzt man nun hierin $\triangle_1 = \triangle_2 = \triangle_3 \ldots\ldots = \triangle_n = x$ und bezeichnet φ (x) mit v, so bekommt man

$$\frac{n}{v} \cdot \frac{dv}{dx} = \psi\,(nkx)$$

$$\text{oder } \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{n}\, \psi\,(nkx)$$

Da aber $v = \varphi(x)$ von der Anzahl der Beobachtungen unabhängig sein muß, so kann auch $\frac{1}{n}\, \psi\,(nkx)$ von n nicht abhängen, woraus folgt, daß $\psi\,(nkx)$ nur Function des ersten Grades von n, also auch nur Function des ersten Grades von nkx sein kann. Man darf daher nkx statt ψ (nkx) setzen, so daß man erhält:

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx} = kx$$

$$\frac{dv}{v} = kxdx$$

also wenn man integrirt:

$$\log v = \tfrac{1}{2} kx^2 + \text{const.}$$

oder wenn e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bedeutet:

$$v = \varphi\,(x) = e^{\text{const.}}\, e^{\frac{1}{2} k x^2}.$$

Da aber φ (x) abnehmen muß, wenn x wächst, so muß der Exponent $\frac{1}{2} k x^2$ eine negative Zahl sein, was nur bei einem negativen Werthe von k möglich ist. Setzen wir also $\frac{1}{2} k = -h^2$ und überdieß $e^{\text{const.}} = C$, so wird

$$\varphi\,(x) = C\,.\,e^{-h^2 x^2}.$$

Hieraus folgt zunächst die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler zwischen die Grenzen $\triangle$ und $\triangle + \delta$ falle, nach (5):

$$w = \frac{\int_{\Delta}^{\Delta+\delta} Ce^{-h^2x^2}\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} Ce^{-h^2x^2}\,dx} = \frac{\int_{\Delta}^{\Delta+\delta} e^{-h^2x^2}\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}\,dx}.$$

Aber $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$*), wo π die Ludolph'sche Zahl 3,14 . . . . bedeutet, daher

---

*) Man findet diesen Ausdruck durch die Doppelintegration

$$\iint e^{-s(1+x^2)}\,ds\,dx,$$

worin die Veränderlichen x und s von einander unabhängig sind. Integrirt man erst nach s, so bekommt man

$$\iint e^{-s(1+x^2)}\,ds\,dx = \int dx \int e^{-s(1+x^2)}\,ds = \int dx\,\frac{-e^{-s(1+x^2)}}{1+x^2}.$$

Dehnen wir aber dieses erste Integral von $s = 0$ bis $s = \infty$ aus, so erhält es den Werth $\frac{1}{1+x^2}$, indem $e^{-s(1+x^2)} = 1$ für $s = 0$ und $= 0$ für $s = \infty$, und wir bekommen also:

$$\int dx \int_0^\infty e^{-s(1+x^2)}\,ds = \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc gt } x.$$

Wird auch das zweite Integral von $x = 0$ bis $x = \infty$ ausgedehnt, so wird endlich

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-s(1+x^2)}\,ds = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(1+x^2)}\,ds\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Einen zweiten Ausdruck für dieses Doppelintegral erhalten wir, wenn wir erst nach x und dann nach s integriren, nämlich:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(1+x^2)}\,dx\,ds = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s}\,ds\,.\,e^{-sx^2}\,dx =$$

$$\int_0^\infty e^{-s}\,ds \int_0^\infty e^{-sx^2}\,dx.$$

$$(7)\ w = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{\Delta}^{\Delta+\delta} e^{-h^2x^2}\, dx$$

für welches Integral sich kein endlicher Ausdruck geben läßt. Da nun nach (4) auch

---

Macht man $sx^2 = y^2$, so ist $x = \frac{y}{\sqrt{s}}$ und $dx = \frac{dy}{\sqrt{s}}$ und es wird y mit x zugleich 0 und unendlich; daher

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-s(1+x^2)}\, dx\, ds = \int_0^\infty e^{-s}\, ds \int_0^\infty e^{-y^2} \cdot \frac{dy}{\sqrt{s}} =$$

$$\int_0^\infty e^{-s} \frac{ds}{\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-y^2}\, dy.$$

Bezeichnen wir den constanten Werth von

$$\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy$$

mit T, so haben wir jetzt:

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-s(1+x^2)}\, dx\, ds = T \cdot \int_0^\infty e^{-s} \frac{ds}{\sqrt{s}}.$$

Setzen wir nun noch $s = z^2$, so wird $\frac{ds}{\sqrt{s}} = 2\,dz$, und es wird z mit s zugleich Null und unendlich, daher:

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-s(1+x^2)}\, dx\, ds = 2\,T \int_0^\infty e^{-z^2}\, dz = 2\,T^2.$$

Eben dieses Doppelintegral ist aber oben auch $= \frac{\pi}{2}$ gefunden worden, daher $2\,T^2 = \frac{\pi}{2}$, oder $T = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, d. h.

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Weil e^{-x^2} für positive und negative x gleiche Werthe bekommt, so ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

$$w = \frac{1}{\frac{\delta}{m}} \int_{\triangle}^{\triangle+\delta} \varphi(x)\, dx$$

so folgt zugleich, indem man für $\varphi(x)$ seinen Werth setzt:

$$w = \frac{C}{\frac{\delta}{m}} \int_{\triangle}^{\triangle+\delta} e^{-h^2x^2}\, dx.$$

Daher $\frac{C}{\frac{\delta}{m}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$, oder $C = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\delta}{m}$.

Bezeichnen wir also die unendlich kleine Größe $\frac{\delta}{m}$, welche mit $\triangle$ gleichartig ist, durch μ, so hat man

$$(8) \quad \varphi(x) = \frac{\mu h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2x^2}$$

wo μh und $h^2 x^2$ unbenannte Zahlen sind. Wegen des unendlich kleinen constanten μ ist also die Wahrscheinlichkeit eines jeden Fehlers unendlich klein, dennoch aber bleiben die Wahrscheinlichkeiten verschiedener Fehler unter sich vergleichbar, und deßhalb kann man den Factor μ in (8) auch ganz weglassen und bloß

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2x^2}$$

schreiben, nur muß man sich hüten, die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Fehlers mit der zu vergleichen, daß er zwischen bestimmten Grenzen liege.

Hat man nun $A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}\, dx$ zu finden, so setze man $hx = z$, also $dx = \frac{dz}{h}$. Da dann z mit x zugleich 0 und unendlich wird, so findet sich

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \frac{dz}{h} = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

§. 213.

Wenn wir nun in (6) statt $\varphi(\triangle)$ seinen Werth aus (8) setzen, so bekommen wir:

(9)

$$W = \mu^n \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2(\triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2 \ldots + \triangle_n^2)}$$

woraus sogleich folgt, daß wenn W ein Größtes werden soll, der Exponent von e, positiv genommen, ein Kleinstes seyn muß. Man muß also O so wählen, daß $\triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2 + \ldots + \triangle_n^2$ ein Kleinstes wird, d. h. **derjenige Werth von O ist der wahrscheinlichste, welcher die kleinste Quadratsumme aller Fehler liefert.**

Dieses ist das sogenannte **Princip der kleinsten Quadratsummen.** Es führt unmittelbar wieder auf das arithmetische Mittel zurück, aus welchem es hervorgegangen ist. Denn wenn

$$\triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \triangle_n^2$$

oder

$$(O-o_1)^2 + (O-o_2)^2 + (O-o_3)^2 \ldots\ldots + (O-o_n)^2$$

ein Kleinstes werden soll, so muß man O so bestimmen, daß das nach O genommene Differential dieser Summe verschwindet, daß also

$$2(O-o_1) + 2(O-o_2) + \ldots + 2(O-o_n) = 0$$

oder

$$nO - (o_1 + o_2 + o_3 + \ldots + o_n) = 0$$

also

$$O = \frac{o_1 + o_2 + o_3 \ldots\ldots + o_n}{n} = M$$

wird. Man kann auch leicht auf elementarem Wege zeigen, daß $\triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2 \ldots\ldots + \triangle_n^2 = \Sigma(\triangle^2)$ ein Kleinstes wird, wenn man $O = M$ nimmt. Denn setzt man $O = M + z$, so verwandelt sich $\Sigma(\triangle^2)$ in

$$(M+z-o_1)^2 + (M+z-o_2)^2 \ldots\ldots + (M+z-o_n)^2$$
$$= (M-o_1)^2 + (M-o_2)^2 + \ldots\ldots (M-o_n)^2$$
$$+ 2(M-o_1)z + 2(M-o_2)z + \ldots\ldots + 2(M-o_n)z$$
$$+ z^2 + z^2 + z^2 + \ldots\ldots + z^2.$$

Bezeichnet man also den Werth von $(\Sigma \triangle^2)$, welcher für $O = M$ statt hat, mit Σ und bemerkt, daß $(M - o_1) + (M - o_2) + \ldots\ldots + (M - o_n) = nM - (o_1 + o_2 + o_3 \ldots\ldots + o_n) = 0$ ist, so hat man

$$\Sigma (\triangle^2) = \Sigma + n z^2$$

also in allen Fällen $\Sigma < \Sigma (\triangle^2)$.

§. 214.

In dem Ausdrucke

$$\frac{\mu h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}$$

für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers $\triangle$ wollen wir die Größe h den Modulus der vollständigen, stetigen Beobachtungsreihe nennen, aus welcher der Fehler $\triangle$ entnommen ist. Die Wahrscheinlichkeit der bestimmten Fehlerreihe $\triangle_1 \triangle_2 \triangle_3 \ldots \triangle_n$ ist nach (8)

$$W = \frac{\mu^n h^n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2 (\triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2 \ldots + \triangle_n^2)}$$

und dasselbe Princip, nach welchem wir aus dieser Gleichung die wahrscheinlichsten Werthe beobachteter Größen bestimmen, wenden wir auch auf h an, d. h., wir bestimmen h so, daß W bei der bestimmten Fehlerreihe $\triangle_1 \triangle_2 \triangle_3 \ldots\ldots \triangle_n$ seinen größten Werth erhält. Obgleich dieses Verfahren sehr willkührlich erscheint, so muß man doch bedenken, daß jede wirkliche Reihe von Werthen einer beobachteten Größe noch keine vollständige, stetige Beobachtungsreihe ist, in welcher die Häufigkeit eines jeden Fehlers bestimmt vorliegt; vielmehr können wir sie als Bestandtheil zahlloser vollständiger Reihen denken. Denn wenn auch die beobachteten Fehler ein gewisses Verhältniß ihrer Häufigkeit zeigen, so kann man doch nicht wissen, ob dieses Verhältniß unter den bei der Beobachtung obwaltenden Umständen das wahre sei oder nicht; wir müssen uns vielmehr eine vollständige Beobachtungsreihe vorstellen, aus welcher die Beobachtungen $o_1\ o_2\ o_3 \ldots\ldots o_n$, wie Loose aus Urnen, gezogen sind. Da diese eingebildete Beobachtungsreihe einen beliebigen Modulus haben kann, so können wir ihr auch den beilegen, wodurch W ein Größtes wird. Diesen wollen wir den wahrscheinlichsten nennen.

Damit nun W durch h ein Größtes werde, muß $\left(\frac{dW}{dh}\right) = 0$ sein, d. h., es muß sein:

$$0 = n h^{n-1} e^{-h^2(\triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2 + \ldots + \triangle_n^2)}$$
$$- 2 h^{n+1}(\triangle_1 + \triangle_2 + \ldots \triangle_n) e^{-h^2(\triangle_1^2 + \ldots + \triangle_n^2)}$$

oder

$$0 = n - 2(\triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2 + \ldots + \triangle_n^2) h^2$$

woraus folgt:

$$h = \sqrt{\left(\frac{n}{2(\triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2 \ldots + \triangle_n^2)}\right)}$$

Bezeichnen wir also den wahrscheinlichsten Modulus immer mit H, so haben wir

$$\textbf{(10)}\ H = \sqrt{\frac{n}{2(\triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2 \ldots + \triangle_n^2)}}$$

Setzen wir

$$\textbf{(11)}\ \triangle_m = \sqrt{\frac{\triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2 \ldots + \triangle_n^2}{n}},$$

so wird

$$\textbf{(12)}\ H = \frac{1}{\triangle_m \sqrt{2}}.$$

Die Größe $\triangle_m$ nennen wir den **mittleren Fehler** oder die **mittlere Abweichung vom Mittel**. Denken wir uns, es sei statt der wahren Fehler $\triangle_1\ \triangle_2\ \triangle_3 \ldots \triangle_n$, wie sie nämlich aus dem arithmetischen Mittel folgen, der Fehler $\triangle_m$, n Mal beobachtet worden, so ist die Wahrscheinlichkeit dieser Fehlerreihe =

$$\frac{\mu^n h^n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2(\triangle_m^2 + \triangle_m^2 + \ldots + \triangle_m^2)}$$
$$= \frac{\mu^n h^n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2 \cdot n \triangle_m^2}$$
$$= \frac{\mu^n h^n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2(\triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2 + \ldots + \triangle_m^2)}$$

also eben so groß, als die Wahrscheinlichkeit der aus dem arithmetischen Mittel sich ergebenden Fehlerreihe $\triangle_1\ \triangle_2\ \triangle_3 \ldots \triangle_n$.

§. 215.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler zwischen den Grenzen $-\triangle$ und $+\triangle$ liege, ist nach (7):

$$w = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\triangle}^{+\triangle} e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\triangle}^{+\triangle} e^{-(hx)^2}\,d(hx)$$

oder weil die Function $e^{-(hx)^2}$ für gleich große entgegengesetzte Werthe des Exponenten sich gleich bleibt:

$$w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\triangle} e^{-(hx)^2}\,d(hx).$$

Da aber

$$e^{-(hx)^2} = 1 - (hx)^2 + \frac{(hx)^4}{1\cdot 2} - \frac{(hx)^6}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{(hx)^8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \cdots$$

so erhält man leicht die Reihe

$$w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(h\triangle - \frac{(h\triangle)^3}{3} + \frac{(h\triangle)^5}{1\cdot 2\cdot 5} - \frac{(h\triangle)^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7} + \frac{(h\triangle)^9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 9} - \cdots \right).$$

Setzen wir $\frac{1}{2} w \sqrt{\pi} = q$ und $h\triangle = p$, so haben wir

$$q = p - \frac{p^3}{1\cdot 3} + \frac{p^5}{1\cdot 2\cdot 5} - \frac{p^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7} + \frac{p^9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 9} - \cdots$$

woraus man durch Umkehrung erhält:

$$p = q + \tfrac{1}{3}q^3 + \tfrac{7}{30}q^5 + \tfrac{127}{630}q^7 + \tfrac{4369}{22680}q^9 + \cdots$$

oder

$$h\triangle = \frac{w\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{w\sqrt{\pi}}{2}\right)^3 + \frac{7}{30}\left(\frac{w\sqrt{\pi}}{2}\right)^5 + \frac{127}{630}\left(\frac{w\sqrt{\pi}}{2}\right)^7 + \frac{4369}{22680}\left(\frac{w\sqrt{\pi}}{2}\right)^9 + \cdots$$

Nimmt man hier $w = \frac{1}{2}$, so findet sich

$$h\triangle = 0{,}47694$$

$$\triangle = \frac{0{,}47694}{h}.$$

Daß also ein Fehler zwischen $\frac{-0{,}47694}{h}$ und

$\frac{+0{,}47694}{h}$ liege, davon ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, oder die gesammte Häufigkeit aller Fehler, die größer als $\frac{0{,}47694}{h}$ sind, ist der gesammten Häufigkeit aller Fehler gleich, die kleiner als $\frac{0{,}47694}{h}$ sind. Man nennt deßhalb die Größe $\frac{0{,}47694}{h}$ den wahrscheinlichen Fehler der Beobachtungen. Setzen wir für h den wahrscheinlichsten Modulus H, so bekommen wir den wahrscheinlichsten Werth des wahrscheinlichen Fehlers, den wir mit R bezeichnen wollen. Man hat also

$$R = \frac{0{,}47694}{H} = 0{,}67449\ \triangle_m$$

$$R = 0{,}67449 \sqrt{\frac{\triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2 \cdots\cdots + \triangle_n^2}{n}}$$

§. 216.

Die Wahrscheinlichkeit W einer bestimmten Fehlerreihe $\triangle_1\ \triangle_2\ \triangle_3 \cdots\cdots \triangle_n$ ist also mit dem Modulus h veränderlich, d. h., sie fällt verschieden aus, wenn wir die Fehlerreihe aus verschiedenen vollständigen Beobachtungsreihen entnommen denken. Man kann nun noch fragen, ob nicht das unendlich kleine μ bei verschiedenen vollständigen Beobachtungsreihen ebenfalls verschieden sei; indessen findet man durch ähnliche Betrachtungen, wie in §. 211, leicht, daß μ überall constant sein muß, wenn man der Voraussetzung nicht widersprechen will, daß in allen vollständigen Beobachtungsreihen dieselben Fehlerwerthe, wenn auch mit verschiedener Häufigkeit, sich vorfinden.

Man habe nun die Fehlerreihen:

$$\underset{1}{\triangle_1}\ \underset{1}{\triangle_2}\ \underset{1}{\triangle_3} \cdots\cdots \underset{1}{\triangle_n}$$

$$\underset{2}{\triangle_1}\ \underset{2}{\triangle_2}\ \underset{2}{\triangle_3} \cdots\cdots \underset{2}{\triangle_n}$$

$$\triangle_1\ \triangle_2\ \triangle_3 \cdots\cdots \triangle_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und ihre Häufigkeiten seien $r\ r_1\ r_2 \ldots\ldots$ bei dem Modul h, $\overset{1}{r}_1\ \overset{1}{r}_2\ \overset{1}{r}_3 \ldots\ldots$ bei dem Modul h_1, $\overset{2}{r}\ \overset{2}{r}_1\ \overset{2}{r}_2 \ldots\ldots$ bei dem Modul h_2 u. s. w., so ist klar, daß der Modulus

$$\begin{array}{llll} h & \text{vorhanden ist} & r + r_1 + r_2 \ldots\ldots = \int r & \text{Mal} \\ h_1 & \text{"} \quad \text{"} & \overset{1}{r} + \overset{1}{r}_1 + \overset{1}{r}_2 \ldots\ldots = \int \overset{1}{r} & \text{"} \\ h_2 & \text{"} \quad \text{"} & \overset{2}{r} + \overset{2}{r}_1 + \overset{2}{r}_2 \ldots\ldots = \int \overset{2}{r} & \text{"} \end{array}$$

. . . .

Daraus folgt, z. B., die Häufigkeit des Moduls h_m im Vergleiche mit der gesammten Häufigkeit aller Moduln =

$$\frac{\int \overset{m}{r}}{\int r + \int \overset{1}{r} + \int \overset{2}{r} + \int \overset{3}{r} + \ldots\ldots}$$

und dieser Ausdruck liefert daher die Wahrscheinlichkeit des bestimmten Moduls h_m, wenn für keine bestimmte Fehlerreihe entschieden wird. Für unsere gegenwärtigen Zwecke ist er jedoch unbrauchbar, denn wir haben uns schon für diejenige Fehlerreihe entschieden, deren Quadratsumme die kleinste ist; wir haben also auch nur die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Moduls in Bezug auf diese wahrscheinlichste Fehlerreihe in Betracht zu ziehen.

Hier haben wir nun jeden Modulus eben so viel Mal, als die Fehlerreihe bei demselben vorhanden ist, d. h., der Ausdruck, welcher die Häufigkeit der Fehlerreihe bei einem bestimmten Modulus angiebt, ist zugleich auch die Häufigkeit eben dieses Moduls. Ist also die Fehlerreihe $\triangle_1\ \triangle_2\ \triangle_3 \ldots\ldots \triangle_n$ bei den Moduln $h\ h_1\ h_2 \ldots\ldots h_m$, $r\ r_1\ r_2\ r_3 \ldots\ldots r_m$ Mal vorhanden, so sind auch diese Moduln eben so viel Mal vorhanden, und die Häufigkeit des Moduls h_m, z. B., ist im Vergleich mit der gesammten Häufigkeit aller Moduln =

$$\frac{r_m}{r + r_1 + r_2 \ldots\ldots + r_m}.$$

Dieser Ausdruck ist also die Wahrscheinlichkeit des bestimmten Moduls h_m bei der bestimmten Fehlerreihe $\triangle_1\ \triangle_2\ \triangle_3 \ldots\ldots \triangle_n$.

Die Wahrscheinlichkeit der wahrscheinlichsten Fehlerreihe $\triangle_1\ \triangle_2 \ldots\ldots \triangle_n$ ist nach (9) und (11) bei dem Modulus h:

$$(14)\quad W_h = \frac{\mu^n h_n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2 \cdot n \Delta_m^2}$$

und diesen Ausdruck kann man auch für die Häufigkeit des Moduls h nehmen, sofern er nämlich angiebt, ein wievielster Theil die Häufigkeit von h bei der bestimmten Fehlerreihe $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3 \ldots\ \Delta_n$ von der gesammten Häufigkeit aller Fehlerreihen bei dem Modulus h ist. Ist nun N_h die, freilich unendlich große, Zahl, welche das gesammte Vorhandensein aller Fehlerreihen bei dem Modulus h angiebt, so ist $N_h W_h$ die absolute Zahl des Vorhandenseins des Moduls h bei der bestimmten Fehlerreihe $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3 \ldots\ \Delta_n$. Setzen wir statt h nach und nach die Werthe $0, \frac{\delta}{i}, \frac{2\delta}{i}, \frac{3\delta}{i} \ldots \delta$, so erhalten wir

$$N_0 W_0 + N_1 W_1 + N_2 W_2 \ldots + N_i W_i,$$

welches die absolute Zahl des Vorhandenseins aller Moduln $0, \frac{\delta}{i}, \frac{2\delta}{i} \ldots \delta$ ist. Nehmen wir dabei i unendlich groß, so bekommen wir den Ausdruck

$$\frac{1}{\frac{\delta}{i}} \int_0^\delta N_1 W_1 \cdot dx$$

und dieser giebt das absolute Vorhandensein aller Moduln von 0 bis δ bei der bestimmten Fehlerreihe $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3 \ldots\ \Delta_n$ an. Dehnen wir also das Integral von 0 bis ∞ aus, so wird

$$\frac{1}{\frac{\delta}{i}} \int_0^\infty N\ W_x\, dx$$

das absolute Vorhandensein aller Moduln. Daher wird, wenn man die unendlich kleine Größe $\frac{\delta}{i}$ mit ν bezeichnet, der Quotient

$$\frac{\nu\, W_h N_h}{\int_0^\infty W_x N_x\, dx}$$

die Häufigkeit des Moduls h in Bezug auf die gesammte Häufigkeit aller Moduln angeben; er ist also die

Wahrscheinlichkeit des Moduls h bei der bestimmten Fehlerreihe $\triangle_1 \triangle_2 \triangle_3 \ldots \triangle_n$. Bezeichnen wir sie mit v_h, so ist:

$$v_h = \frac{\nu\, W_h\, N_h}{\int_0^\infty W_x\, N_x\, dx}$$

Es sei T_h die Anzahl aller Glieder in der vollständigen Beobachtungsreihe mit dem Modul h, so ist $(T_h)^n = N_h$. Denn setzt man alle Glieder als ungleich voraus, so hat man offenbar $T_h = T_h^1$ eingliedrige Fehlerreihen. Setzt man dann jedem Gliede jedes Glied vor, so erhält man $T_h \cdot T_h = T_h^2$ Reihen, welche alle zweigliedrigen Fehlerreihen vorstellen. Setzt man dann wieder jeder zweigliedrigen Fehlerreihe jeden Fehler vor, so bekommt man alle dreigliedrigen Fehlerreihen, deren Anzahl also T_h^3 ist u. s. w., so daß T_h^n die Anzahl aller n gliedrigen Fehlerreihen sein wird. Nun sind aber nicht alle Glieder der vollständigeu Beobachtungsreihe verschieden; wenn man also die vorhin als ungleich gezählten Glieder wieder gleich setzt, so wird man jede Fehlerreihe mehre Mal erhalten, und die Anzahl des Vorkommens ist eben ihre absolute Häufigkeit. Wir haben also, um N_h zu erhalten, immer noch T_h^n Fehlerreihen zu zählen.

Allen Beobachtungsreihen aber können wir, unbeschadet der Allgemeinheit, gleichviele Glieder beilegen, so daß T_h für alle Werthe von h constant ist. Dann ist auch N_h constant, und die obige Formel für v_h verwandelt sich in:

$$v_h = \frac{\nu\, W}{\int_0^\infty W_x\, dx}$$

oder wenn wir für W_h und W_x ihre Werthe aus (14) einsetzen:

$$\textbf{(15)}\quad v_h = \frac{\nu\, h^n\, e^{-h^2 \cdot n\triangle_m^2}}{\int_0^\infty x^n\, e^{-x^2 \cdot n\triangle_m^2}\, dx}$$

Dieser Ausdruck, welcher die Wahrscheinlichkeit des Moduls h in dem oben erklärten Sinne ist, giebt zugleich an, ein wievielster Theil die Wahrscheinlichkeit der

bestimmten Fehlerreihe $\triangle_1\ \triangle_2\ \triangle_3 \ldots \triangle_n$ bei dem Modul h von ihrer Gesammtwahrscheinlichkeit bei allen Moduln ist *).

§. 247.

Es kommt nun darauf an, den Ausdruck in (15) weiter zu entwickeln, was ziemlich schwierig ist. Setzen wir H + z statt x, wo H den wahrscheinlichsten Modulus bedeutet, so wird $x^2 . n \triangle_m^2 = (H+z)^2 n . \triangle_m^2 = (H+z)^2 . \frac{n}{2H^2}$ (nach 12) $= \frac{n}{2} + n . \frac{z}{H} + n . \frac{z^2}{2H^2}$.

Dann ist $x^n = H^n \left(1 + \frac{z}{H}\right)^n = H^n . e^{n \log \left(1 + \frac{z}{H}\right)}$

$$= H^n . e^{n . \frac{z}{H} - \frac{nz^2}{2H^2} + \frac{nz^3}{3H^3} - \ldots},$$

wenn man nämlich die bekannte logarithmische Reihe einsetzt. Daher

---

*) Die Gesammtwahrscheinlichkeit der Fehlerreihe $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3 \ldots \Delta_n$ bei allen Moduln von 0 bis δ ist nämlich $W_0 + W_1 + W_2 + \ldots + W_i$, wo die Bezeichnung dieselbe, wie im Texte ist. Dieses aber giebt, wenn die unendlich kleine Größe $\frac{\delta}{i} = \nu$ gesetzt wird:

$$\frac{1}{\nu} \int_0^{\delta} W_x\, dx.$$

Dehnen wir aber das Integral von 0 bis ∞ aus, so wird

$$\frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} W_x\, dx$$

die Gesammtwahrscheinlichkeit der Fehlerreihe bei allen Moduln. Dividiren wir damit die Wahrscheinlichkeit der Fehlerreihe bei dem Modul h, so erhält der Quotient

$$\frac{\nu\, W_h}{\int_0^{\infty} W_x\, dx}$$

die im Texte angegebene Bedeutung. Daß aber derselbe auch die Wahrscheinlichkeit des Moduls h sei, geht aus dieser Betrachtung nicht klar hervor.

$$x^n e^{-x^2 \cdot n \triangle_m^2} = H^n e^{n \log\left(1 + \frac{z}{H}\right)} e^{-\frac{n}{2} - \frac{nz}{H} - \frac{nz^2}{2H^2}} =$$

$$H^n e^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{nz^2}{H^2} + \frac{nz^3}{3H^3} \cdot \cdot \cdot \cdot},$$

oder wenn wir auch noch das Glied $\frac{n z^3}{3H^3}$ weglassen:

$$x^n e^{-x^2 \cdot n \triangle_m^2} = H^n e^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{nz^2}{H^2}}.$$

Dieß gilt näherungsweise, wenn $\frac{z^2}{H^2}$ ein kleiner Bruch ist. Dürften wir die Gleichung für vollkommen genau halten, so würden wir noch $dx = d(H + z) = dz$ und dann

$$\int_0^\infty x^n e^{-x^2 \cdot n \triangle_m^2} dx = H^n e^{-\frac{n}{2}} \int_{-H}^\infty e^{-\frac{n}{H^2} z^2} dz$$

oder wenn wir auch noch die untere Integrationsgrenze bis zum Unendlichen ausdehnen:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x^2 \cdot n \triangle_m^2} dx = H^n e^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n}{H^2} z^2} dz$$

$$= H^n e^{-\frac{n}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\left(\frac{n}{H^2}\right)}} = \frac{H^{n+1} e^{-\frac{n}{2}} \sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$$

So unrichtig dieß bei'm ersten Anblick auch scheint, so ist das Resultat doch näherungsweise wahr, wenn n eine sehr große Zahl ist, und um so richtiger, je größer eben n ist. Der Ausdruck $X = x^n e^{-x^n \cdot n \triangle_m^2}$ wird ein Größtes, wenn x dem wahrscheinlichsten Modulus $H = \frac{1}{\triangle_m \sqrt{2}}$ gleich ist, und dieses Größte ist $G = H^n e^{-\frac{n}{2}}$.

Setzt man H + z an die Stelle von x, so erhält man leicht

$$X = G \left(1 + \frac{z}{H}\right)^n e^{-n \cdot \frac{z}{H} - n \cdot \frac{z^2}{2H^2}}$$

Man setze nun $\frac{z}{H} = \frac{y}{\sqrt{n}}$, und denke sich n so groß, daß bei endlichem y mit beliebiger Annäherung $\log\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) = \frac{y}{\sqrt{n}} - \frac{y^2}{2(\sqrt{n})^2}$ genommen werden könne, so erhält man

$$X = G\, e^{-y^2}$$

woraus man sieht, daß, wenn y nur einigermaßen groß ist, X gegen G verschwindet, und um so mehr, je größer y ist. Da nun $dx = d(H + z) = dz = \frac{H\,dy}{\sqrt{n}}$, so findet sich

$$\int X\,dx = \frac{HG}{\sqrt{n}} \int e^{-y^2}\,dy.$$

Dieses Integral, welches eigentlich von $x = 0$ bis $x = \infty$ auszudehnen ist, werden wir schon nahe richtig finden, wenn wir die Grenzen nicht weit von H entfernt nehmen, weil bei solchen x, die schon mehr von H abweichen, X sehr klein wird. Man wird also auch die Integrationsgrenzen im Bezug auf y, welche eigentlich $-\sqrt{n}$ und $+\infty$ sind, nicht sehr weit auszudehnen brauchen, nämlich etwa von $-a$ bis $+a$ so, daß a, obschon groß an sich, doch gegen $\sqrt{n}$ nur unbeträchtlich, und daher $\frac{a}{\sqrt{n}} = \frac{y}{\sqrt{n}}$ immer ein kleiner Bruch bleibt. Aber dann kann auch $\int_{-a}^{+a} e^{-y^2}\,dy$ von $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}$ nicht beträchtlich abweichen, so daß $\frac{HG\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}} = \frac{H^{n+1} e^{-\frac{n}{2}} \sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$ ein genäherter Werth von $\int_{-\infty}^{+\infty} X\,dx$ sein wird.

Wird nun noch H + x statt H im Zähler von (15) gesetzt, so verwandelt sich derselbe nach eben dem Verfah-

ren, wie vorhin, in $H\, e^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{nx^2}{H^2}}$,
folglich

$$(16)\ v_h = \frac{\nu \sqrt{n}}{H \sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{n x^2}{H^2}}$$

für die Wahrscheinlichkeit des Moduls $H + x$ bei der bestimmten Fehlerreihe $\triangle_1\ \triangle_2\ \triangle_3 \ldots \triangle_n$, doch gilt diese Formel nur für ein sehr großes n.

§. 218.

Wenn wir nun in (16) statt $\frac{n}{H^2}$ einfacher f^2 setzen, so bekommen wir

$$(17)\ v_h = \frac{\nu f}{\sqrt{\pi}}\, e^{-f^2 x^2}$$

woraus alsbald die Wahrscheinlichkeit w_h aller Moduln von $H - \lambda$ bis $H + \lambda$, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß der Modul zwischen $H - \lambda$ und $H + \lambda$ liege, nach (7):

$$(18)\ w_h = \frac{f}{\sqrt{\pi}} \int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{-f^2 x^2}\, dx = \frac{2f}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-f^2 x^2} dx$$

folgt. Nach §. 215 wird $w_h = \frac{1}{2}$ für $fx = 0{,}47694 = f\lambda$, und daraus erhält man leicht:

$$(19)\ \lambda = \frac{0{,}47694}{f} = \frac{0{,}47694}{\sqrt{n}}\, H.$$

Um also für den Modulus die halbe Gewißheit zu erhalten, muß man seinen Werth zwischen $H - \lambda$ und $H + \lambda$ unentschieden lassen. Hier nennt man $\lambda = \frac{0{,}47694}{\sqrt{n}} H$ die wahrscheinliche Unsicherheit des Moduls. Da dieselbe im umgekehrten Verhältnisse von $\sqrt{n}$ steht, so wird sie bei sehr vielen Beobachtungen sehr klein, so daß dann die halbe Gewißheit beinahe auf H allein kommt, sofern wir nämlich $H \pm \lambda$ für H nehmen dürfen.

Indem man sich nun den Modul zwischen $H - \lambda$ und $H + \lambda$ schwanken denkt, schwankt der wahrscheinliche

Fehler R in (13) zwischen den Grenzen $\frac{0{,}47694}{H-\lambda}$ und $\frac{0{,}47694}{H+\lambda}$, d. h. annäherungsweise zwischen $\frac{0{,}47694}{H}\left(1+\frac{\lambda}{H}\right)$ und $\frac{0{,}47694}{H}\left(1-\frac{\lambda}{H}\right)$ oder zwischen $R\left(1+\frac{0{,}47694}{\sqrt{n}}\right)$ und $R\left(1-\frac{0{,}47694}{\sqrt{n}}\right)$, und man nennt nun die Größe

$$(20)\quad \pm\frac{0{,}47694}{\sqrt{n}}\,R$$

die wahrscheinliche Unsicherheit des wahrscheinlichen Fehlers jeder Beobachtung. Doch bemerken wir nochmals, daß diese Formeln nur für sehr große Werthe von n genäherte Resultate geben.

§. 219.

Das bisher Vorgetragene wollen wir noch durch folgendes Beispiel erläutern. Littrow erhielt für die Polhöhe O der Ofener Sternwarte folgende Resultate:

$$\begin{aligned}
o_1 &= 47^\circ\ 29'\ 11'',5\\
o_2 &= 12,2\\
o_3 &= 12,8\\
o_4 &= 11,2\\
o_5 &= 11,7\\
o_6 &= 12,3\\
o_7 &= 11,5\\
o_8 &= 11,9\\
o_9 &= 12,4\\
o_{10} &= 12,5
\end{aligned}$$

Mittel $M = 47^\circ\ 29'\ 12'',00$ wahrscheinlichster Werth von O. Hieraus folgt:

$\Delta_1 = M - o_1 =$	$0'',5$	$\Delta_1^2 = 0{,}25$
Δ_2	$-0{,}2$	Δ_2^2 $0{,}04$
Δ_3	$-0{,}8$	Δ_3^2 $0{,}64$
Δ_4	$0{,}8$	Δ_4^2 $0{,}64$
Δ_5	$0{,}3$	Δ_5^2 $0{,}09$
Δ_6	$-0{,}3$	Δ_6^2 $0{,}09$
Δ_7	$0{,}5$	Δ_7^2 $0{,}25$
Δ_8	$0{,}1$	Δ_8^2 $0{,}01$
Δ_9	$-0{,}6$	Δ_9^2 $0{,}36$
Δ_{10}	$-0{,}5$	Δ_{10}^2 $0{,}25$
		Summe $= 2{,}62$

$\triangle_m = \sqrt{\frac{2,62}{10}} = 0'',512$; wahrscheinlicher Fehler R der Beobachtungen $= 0'',33$, wahrscheinliche Unsicherheit des wahrscheinlichen Fehlers $= 0'',016$.

§. 220.

Der Modulus h in dem Ausdrucke (8) für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers läßt sich noch aus einem anderen bemerkenswerthen Gesichtspuncte betrachten. Man denke sich zwei vollständige, stetige Beobachtungsreihen für dieselbe Größe O, die sich durch ihre Moduln h und h' unterscheiden. In der einen ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler zwischen den Grenzen $-\triangle$ und $+\triangle$ liege, nach (7) =

$$w = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\triangle}^{+\triangle} e^{-h^2 x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-h\triangle}^{+h\triangle} e^{-z^2}\, dz$$

wenn man nämlich $hx = z$ setzt. Auf gleiche Weise ist die Wahrscheinlichkeit, daß in der anderen Reihe der Fehler zwischen $-\triangle'$ und $+\triangle'$ liege, =

$$w' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-h'\triangle'}^{+h'\triangle'} e^{-z^2}\, dz.$$

Beide Wahrscheinlichkeiten sollten $= 1$ werden, wenn man für $\triangle$ und $\triangle'$ die größten noch möglichen Beobachtungsfehler setzt, sie bekommen aber diesen Werth erst für $\triangle$ und $\triangle' = \infty$. Hierüber ist schon das Nöthige gesagt worden, aber nun bleibt immer noch die Möglichkeit, daß w und w' innerhalb der größten Beobachtungsfehler gleiche Werthe bekommen können, die sich von der Einheit nur wenig unterscheiden. Diese Bedingung muß auch, wenn der Ausdruck die erforderliche Strenge bekommen soll, wirklich erfüllt werden, denn wenn man den Fehler in der einen wie in der anderen Reihe zwischen den äußersten Werthen sucht, so hat man in beiden Fällen gleiche Wahrscheinlichkeit, die nur wegen der Unzulänglichkeit unserer Formeln nicht zur Gewißheit wird.

Offenbar wird nun w eine Function von $h\triangle$, die durch $w = \psi(h\triangle)$ bezeichnet werden kann. Auf gleiche Weise hat man $w_1 = \psi(h'\triangle')$, und es muß nun,

wenn $w_1 = w$ sein soll, auch $h'\triangle' = h\triangle$ sein. Man sieht hieraus, daß sich die Moduln zweier verschiedenen Beobachtungsreihen für dieselbe Größe umgekehrt wie die entsprechenden größten Fehler jeder Reihe verhalten müssen. Man hat dann in beiden Reihen immer gleiche Wahrscheinlichkeit, wenn die Grenzen, innerhalb deren man einen Fehler sucht, sich umgekehrt wie die Moduln verhalten.

Es ist klar, daß nach dem größten möglichen Fehler die Genauigkeit der Beobachtungen beurtheilt werden muß, und da diese dem größten Fehler umgekehrt proportional gesetzt werden kann, so nennt man h das Maß der Genauigkeit der Beobachtung. h^2 nennt man das Gewicht der Beobachtung, gewöhnlich versteht man aber unter dem Gewichte nicht das Quadrat des Moduls selbst, sondern nur Größen, die im quadratischen Verhältnisse der Moduln stehen.

§. 221.

Bei den bisherigen Betrachtungen ist angenommen worden, daß alle Beobachtungen gleiches Gewicht haben, das heißt, daß sie alle Glieder derselben vollständigen Beobachtungsreihe sind, und dann führt das arithmetische Mittel zu dem wahrscheinlichst wahren Werthe. Anders aber wird die Sache bei Beobachtungen von verschiedenem Gewicht, also solchen, welche Glieder verschiedener vollständiger Beobachtungsreihen sind. Für diesen Fall findet man den wahrscheinlichsten Werth, wenn man jede Beobachtung mit ihrem Gewichte multiplicirt und die Summe aller Producte durch die Summe aller Gewichte dividirt. Diesen so berechneten Werth wollen wir das allgemeine arithmetische Mittel nennen, im Gegensatze zu dem in (3), welches das einfache heißen mag.

Es seien $h_1\ h_2\ h_3 \ldots .\ h_n$ die Moduln der vollständigen Beobachtungsreihen, aus welchen die Beobachtungen $o_1\ o_2\ o_3 \ldots .\ o_n$ der Größe O, wie Loose aus Urnen, gegriffen sind. Man hat dann die Fehler $O - o_1 = \triangle_1$, $O - o_2 = \triangle_2$, $O - o_3 = \triangle_3 \ldots . O - o_n = \triangle_n$, deren Wahrscheinlichkeiten der Reihe nach

$\frac{\mu h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 \triangle_1^2}, \frac{\mu h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 \triangle_2^2}, \frac{\mu h_3}{\sqrt{\pi}} e^{-h_3^2 \triangle_3^2} \ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\mu h_n}{\sqrt{\pi}} e^{-h_n^2 \triangle_n^2}$

sind. Hieraus folgt die Wahrscheinlichkeit der Fehlerreihe $\triangle_1 \triangle_2 \triangle_3 \ldots\ldots \triangle_n$

(21)

$$W = \frac{\mu^n h_1 h_2 h_3 \ldots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-(h_1^2 \triangle_1^2 + h_2^2 \triangle_2^2 + h_3^2 \triangle_3^2 \ldots + h_n^2 \triangle_n^2)}$$

Bezeichnen wir die als bekannt vorauszusetzenden Gewichte, die im quadratischen Verhältniß der Moduln stehen, mit $q_1\ q_2\ q_3 \ldots q_n$, so haben wir

$$h_2^2 = \frac{q_2}{q_1} h_1^2, h_3^2 = \frac{q_3}{q_1} h_1^2 \ldots\ldots h_n^2 = \frac{q_n}{q_1} h_1^2$$

also wenn h statt h_1 gesetzt nnd zur Bedingung gemacht wird, daß das Gewicht der ersten Beobachtung, d. h. q_1, immer = 1 sein soll:

(22)

$$W = \frac{\mu^n h^n \sqrt{q_1 q_2 q_3 \cdots q_n}}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2(q_1 \triangle_1^2 + q_2 \triangle_2^2 + \ldots + q_n \triangle_n^2)}$$

Nun bestimmen wir O so, daß W ein Größtes, also

$$q_1 \triangle_1^2 + q_2 \triangle_2^2 + q_3 \triangle_3^2 \ldots\ldots + q_n \triangle_n^2$$

ein Kleinstes wird. Wir bekommen also:

$$0 = 2 q_1 \triangle_1 \cdot \frac{d \triangle_1}{d O} + 2 q_2 \triangle_2 \cdot \frac{d \triangle_2}{d O} \ldots + 2 q_n \triangle_n \cdot \frac{d \triangle_n}{d O}$$

daher, weil $d \triangle_n = d\,(O - o_n) = d\,O$ ist,

$$0 = q_1 (O - o_1) + q_2 (O - o_2) \ldots + q_n (O - o^n),$$

woraus folgt:

(23)

$$O = M = \frac{q_1 o_1 + q_2 o_2 + q_3 o_3 \ldots q_n o_n}{q_1 + q_2 + q_3 \ldots q_n}.$$

Nun können wir uns einen mittleren Fehler $\triangle_m$, den man statt der wahren $\triangle_1\ \triangle_2\ \triangle_3 \ldots \triangle_n$ aus allen Beobachtungsreihen greifen müßte, so denken, daß die Fehlerreihe $\triangle_m\ \triangle_m\ \triangle_m \ldots$ eben die Wahrschein-

lichkeit hat, wie die wirkliche $\triangle_1\ \triangle_2\ \triangle_3 \ldots\ldots \triangle_n$. Zur Bestimmung dieses mittleren Fehlers hat man aus (22): $W =$

$$\frac{\mu^n h^n \sqrt{q_1 q_2 q_3 \ldots q_n}}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2(q_1 \triangle_1^2 + q_2 \triangle_2^2 + \ldots + q_n \triangle_n^2)}$$

$$= \frac{\mu^n h^n \sqrt{q_1 q_2 q_3 \ldots q_n}}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2(q_1 + q_2 + q_3 \ldots + q_n)\triangle_m^2}$$

woraus sogleich folgt:

$$(23)\quad \triangle_m = \sqrt{\frac{q_1 \triangle_1^2 + q_2 \triangle_2^2 + q_3 \triangle_3^2 \ldots + q_n \triangle_n^2}{q_1 + q_2 + q_3 \ldots + q_n}}\ ^{*)}$$

Dann bestimmen wir den Modulus h der ersten Beobachtungsreihe (deren Gewicht $q_1 = 1$ ist), so daß die Fehlerreihe $\triangle_1\ \triangle_2\ \triangle_3 \ldots \triangle_n$ die größte Wahrscheinlichkeit erhält. Es muß zu diesem Behufe

$$\frac{\mu^n h^n \sqrt{q_1 q_2 q_3 \ldots q_n}}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2(q_1 + q_2 + q_3 \ldots + q_n)\triangle_m^2}$$

d. h auch

$$h^n e^{-h^2(q_1 + q_2 + q_3 \ldots + q_n)\triangle_m^2}$$

ein Größtes werden. Ist also wieder H der wahrscheinlichste Modulus, so findet man nach dem bekannten Verfahren:

(24)

$$H = \frac{1}{\triangle_m \sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{q_1 + q_2 + q_3 \ldots + q_n}}$$

$$H^2 = \frac{n}{2(q_1 \triangle_1^2 + q_2 \triangle_2^2 + q_3 \triangle_3^2 \ldots + q_n \triangle_n^2)}.$$

---

*) Bei diesem mittleren Fehler ist die Voraussetzung, daß er aus jeder Beobachtungsreihe gegriffen sei. Statt dessen können wir uns auch denken, er sei bloß der ersten Beobachtungsreihe mit dem Modul h entnommen, wodurch er einen von dem vorigen verschiedenen Werth

$$\triangle'_m \sqrt{\left(\frac{q_1 \triangle_1^2 + q_2 \triangle_2^2 + \ldots + q_n \triangle_n^2}{n}\right)}$$

erhält. Indessen wird dadurch weder der Werth von H noch der von R_n geändert.

Daher ist auch der wahrscheinliche Fehler bei der ersten Beobachtung (in der ersten vollständigeu Beobachtungsreihe) =

$$R_1 = \frac{0,47694}{H}.$$

Um ein Gleiches auch für die übrigen Beobachtungen zu erhalten, muß man überlegen, daß nach Obigem der Modulus der Beobachtungsreihe, aus welcher die nte Beobachtung o_n genommen ist, $= h_n = h \sqrt{\frac{q_n}{q_1}} = h \sqrt{q_n}$ ist, daher der wahrscheinliche Fehler der nten Beobachtung =

$$R_n = \frac{0,47694}{H\sqrt{q_n}}.$$

Wird in dem Ausdrucke für die Wahrscheinlichkeit des Moduls h (§. 215):

$$v_h = \frac{\nu\, W_h}{\int_0^\infty W_x \cdot dx}$$

statt W der Werth aus (22) eingesetzt, so bekommt man

$$v_h = \frac{\nu h^n e^{-h^2(q_1 \triangle_1^2 + q_2 \triangle_2^2 + \ldots + q_n \triangle_n^2)}}{\int_0^\infty x^n dx\, e^{-x^2(q_1 \triangle_1^2 + q_2 \triangle_2^2 + \ldots + q_n \triangle_n^2)}}$$

und wenn man an die Stelle von x und h, H + z setzt, unter H den Werth in (24) verstanden, so kommt man auf eben die Reductionen und eben die Ausdrücke, die in §. 217 und §. 218 entwickelt worden sind. Daher ist auch jetzt:

$$\lambda = \frac{0,47694}{\sqrt{n}} H$$

die wahrscheinliche Unsicherheit von H, nämlich des Moduls der ersten Beobachtungsreihe, aus welcher o_1 stammt. Desgleichen ist

$$\frac{0,47694}{\sqrt{n}} H \sqrt{q_n}$$

die wahrscheinliche Unsicherheit des Moduls und

$$\frac{0,47694}{\sqrt{n}} R_n$$

die wahrscheinliche Unsicherheit des wahrscheinlichen Fehlers in derjenigen vollständigen Beobachtungsreihe, aus welcher die Beobachtung o_n entnommen ist.

§. 222.

Man kann aber noch die Frage aufwerfen, wie man zur Kenntniß der Gewichte beobachteter Größen gelangen kann. Das einfachste Mittel, welches sich zu diesem Zwecke darbietet, geben die größten möglichen Beobachtungsfehler; diese sind nämlich, nach §. 220, den Moduln und also auch den Quadratwurzeln aus den Gewichten umgekehrt proportional, daher die Gewichte den Quadraten der größten Beobachtungsfehler umgekehrt proportional. Man müßte also durch geeignete Versuche zu ermitteln suchen, welcher Fehler mit einem gegebenen Instrumente unter gegebenen Umständen höchstens möglich wäre, wobei denn freilich auch die Geschicklichkeit des Beobachters mit in Anschlag gebracht werden muß.

Dagegen hat man vorgezogen, die Gewichte nach den mittleren Fehlern abzuschätzen. Ein Beobachter also, welcher, z. B., für seine Winkelmessungen mit einem bestimmten Instrumente das Gewicht wissen will, hat den mittleren Fehler zu suchen, indem er denselben Winkel sehr viele Mal beobachtet und sodann nach Berechnung des arithmetischen Mittels die Fehler der Beobachtungen und hieraus wieder den mittleren Fehler $\triangle_m$ nach (11) ermittelt, da dann das Gewicht das Quadrat des reciproken mittleren Fehlers ist. Dieses Verfahren ist auf die schon früher gestellte Bemerkung gegründet, daß jede Reihe von Beobachtungen aus beliebigen vollständigen Beobachtungsreihen entnommen gedacht und daher auch als derjenigen gehörig angesehen werden kann, welche den wahrscheinlichsten Modulus hat, besonders da dieser beinahe die halbe Gewißheit für sich in Anspruch nimmt. Alle anderen Beobachtungen, welche der Beobachter nachher mit demselben Instrumente und unter gleich günstigen Umständen macht, sind als Glieder der Reihe mit dem vorhin gefundenen wahrscheinlichsten Modulus zu betrachten, und dieser ist dem mittleren Fehler umgekehrt proportional.

Darnach wird also die Genauigkeit verschiedener Beobachtungen nach dem mittleren Fehler abgemessen.

§. 223.

Außer dem bereits erklärten mittleren und wahrscheinlichen Fehler kann man noch einen dritten ähnlichen anführen, der eigentlich das arithmetische Mittel aus allen positiven Gliedern der vollständigen Beobachtungsreihe ist. Es seien $\triangle_0\ \triangle_1\ \triangle_2 \ldots\ \triangle_r$ die Fehler, und es kommen dieselben der Reihe nach $n_0\ n_1\ n_2 \ldots n_r$ Mal vor, so ist die Summe aller Fehler

$$n_0 \triangle_0 + n_1 \triangle_1 + n_2 \triangle_2 \ldots\ldots + n_r \triangle_r$$

und ihre Anzahl $n_0 + n_1 + n_2 \ldots + n_r$. Wird also der fragliche mittlere Fehler mit ∇ bezeichnet, so ist:

$$\nabla = \frac{n_0 \triangle_0 + n_1 \triangle_1 + n_2 \triangle_2 \ldots + n_r \triangle_r}{n_0 + n_1 + n_2 \ldots + n_r}$$

oder $\nabla = \frac{n_0}{N} \triangle_0 + \frac{n_1}{N} \triangle_1 + \frac{n_2}{N} \triangle_2 \ldots + \frac{n_r}{N} \triangle_r$.

Da aber die positiven und negativen Fehler gleich häufig sind, so ist N die halbe Anzahl aller Glieder der vollständigen Beobachtungsreihe und $\frac{n_0}{N}, \frac{n_1}{N}, \frac{n_2}{N} \ldots \frac{n_r}{N}$ sind die doppelten Wahrscheinlichkeiten der Fehler $\triangle_0\ \triangle_1\ \triangle_2 \ldots \triangle_r$. Lassen wir nun die Fehler nach unendlich kleinen Sprüngen $= \frac{\delta}{m}$ wachsen, setzen für die Wahrscheinlichkeit eines jeden den Ausdruck aus (8) und bemerken dabei, daß μ dem Sprunge $\frac{\delta}{m}$ gleich ist, so erhalten wir:

$$\nabla = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \left(\left(\frac{\delta}{m}\right) e^{-h^2 \cdot \left(\frac{\delta}{m}\right)^2} + \left(\frac{2\delta}{m}\right) e^{-h^2 \left(\frac{2\delta}{m}\right)^2} + \left(\frac{3\delta}{m}\right) e^{-h^2 \left(\frac{3\delta}{m}\right)^2} + \ldots\ldots \right) \frac{\delta}{m},$$

welches nach bekannten Gründen in

$$\nabla = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x e^{-h^2x^2} dx$$

sich verwandelt, indem die Anzahl der Glieder unendlich groß ist. Setzt man $x^2 = z$, so wird $2x\,dx = dz$ und

$$2\int_0^\infty x\,e^{-h^2x^2}\,dx = \int_0^\infty e^{-h^2 z}\,dz = \frac{1}{h^2},$$ daher

$$(25)\quad \nabla = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}.$$

Dieses wäre denn der oben besprochene mittlere Fehler, zu dessen Berechnung man statt h den wahrscheinlichsten Modulus H setzen wird. Anderwärts rechnet man dafür nur halb so viel, indem man die Producte der positiven Fehler in ihre Wahrscheinlichkeiten summirt, wornach man

$$\nabla = \frac{1}{2h\sqrt{\pi}}$$

erhält.

§. 224.

Endlich kann man nun noch nach dem Grade der Genauigkeit des arithmetischen Mittels selbst fragen; damit man aber diese Frage gehörig verstehe, muß man überlegen, daß das allgemeine arithmetische Mittel

$$M = \frac{q_1 o_1 + q_2 o_2 + q_3 o_3 + \cdots q_n o_n}{q_1 + q_2 + q_3 + \cdots q_n}$$

für den wahren Werth O genommen wurde. Daraus folgte die Fehlerreihe

$$\begin{array}{lll}
\triangle_1 = M - o_1 & \text{statt} & O - o_1 \\
\triangle_2 = M - o_2 & ,, & O - o_2 \\
\triangle_3 = M - o_3 & ,, & O - o_3 \\
\cdots\cdots & & \cdots \\
\triangle_n = M - o_n & ,, & O - o_n
\end{array}$$

deren Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{\mu^n h^n \sqrt{q_1 q_2 q_3 \cdots q_n}}{(\sqrt{\mu})^n} e^{-h^2(q_1\triangle_1^2 + q_2\triangle_2^2 \cdots + q_n\triangle_n^2)}$$

eben die größte wird. Setzen wir $M + u$ an die Stelle von O, so erhalten wir offenbar die Fehlerreihe

$\triangle_1 + u, \triangle_2 + u, \triangle_3 + u \ldots . \triangle_n + u$
und deren Wahrscheinlichkeit: $W_u =$

$$\frac{\mu^n h^n \sqrt{q_1 q_2 q_3 \cdots q_n}}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2\left(q_1(\triangle_1+u)^2 \ldots + q_n(\triangle_n+u)^2\right)}$$

Nun ist aber

$$q_1 (\triangle_1 + u)^2 + q_2 (\triangle_2 + u)^2 + q_3 (\triangle_3 + u)^2 \ldots . + q_n(\triangle_n + u)^2 = q_1 \triangle_1^2 + q_2 \triangle_2^2 + q_3 \triangle_3^2 + \ldots . q_n \triangle_n^2 + 2(q_1 \triangle_1 + q_2 \triangle_2 + q_3 \triangle_3 \ldots . + q_n \triangle)u + (q_1 + q_2 + q_3 \ldots . + q_n) u^2$$

oder, weil $q_1 \triangle_1 + q_2 \triangle_2 + \ldots . + q_n \triangle_n = 0$ ist,

$$q_1 (\triangle_1 + u)^2 + q_2 (\triangle_2 + u)^2 + \ldots . + q_n (\triangle_n + u)^2 = q_1 \triangle_1^2 + q_2 \triangle_2^2 + q_3 \triangle_3^2 + \ldots + q_n \triangle_n^2 + (q_1 + q_2 + q_3 \ldots . + q\ ) u^2$$

$$(26)\quad W_u = W e^{-h^2 (q_1 + q_2 + q_3 \ldots . + q_n) u^2}.$$

Sofern wir nun M für den wahren Werth von O annehmen dürfen, ist also W_u die Häufigkeit des Fehlers u im Vergleich zur gesammten Häufigkeit aller Fehlerreihen, denn so viele Mal die Fehlerreihe $\triangle_1 + u$, $\triangle_2 + u$, $\triangle_3 + u \ldots . \triangle_n + u$ vorkommt, eben so viele Mal ist auch der Fehler u zu zählen. Daher ist, wenn μ' eine unendlich kleine Größe bedeutet, die mit u gleichartig ist:

$$\frac{1}{\mu'}\int_{-\infty}^{+\infty} W_u \cdot du$$

$$= \frac{1}{\mu'} W \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 (q_1 + q_2 + q_3 \ldots + q_n) u^2} du$$

oder $\displaystyle {}^{\infty}W_u = \frac{W \sqrt{\pi}}{\mu' h \sqrt{(q_1 + q_2 + q_3 \ldots . + q_n)}}$

die Häufigkeit aller möglichen Werthe des u im Bezug auf die gesammte Häufigkeit aller Fehlerreihen, der Quotient

$$\frac{\mu' W^u}{{}^{\infty} W_u}$$

also, den wir mit v_m bezeichnen wollen, die Häufigkeit des Fehlerwerthes u im Bezug auf die gesammte Häufigkeit aller Werthe des u, d. h., es ist v_m die Wahr=

scheinlichkeit, daß u der Fehler des arithmetischen Mittels M sei. Wir haben also, wenn statt W_u und $^{\infty}W_u$ ihre Werthe gesetzt werden:

(27)

$$v_m = \frac{\mu' h \sqrt{q_1 + q_2 + q_3 \cdots + q_n}}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(q_1 + q_2 + q_3 \cdots + q_n) u^2}$$

Daraus ist ersichtlich, daß die Fehler u des arithmetischen Mittels, und mit ihnen dieses selbst, einer vollständigen Beobachtungsreihe angehören, deren Modulus $h\sqrt{q_1 + q_2 + q_3 \ldots + q_n}$ ist. Da sich nun die Genauigkeiten beobachteter Größen, wie die Moduln der vollständigen Beobachtungsreihen verhalten, aus denen sie entnommen sind, so sieht man, daß die Genauigkeit des arithmetischen Mittels im Verhältnisse $1 : \sqrt{q_1 + q_2 + q_3 \ldots + q_n}$ größer ist, als diejenige unmittelbare Beobachtung, deren Gewicht $= 1$ ist. Auch ist $q_1 + q_2 + q_3 \ldots + q_n$ das Gewicht des arithmetischen Mittels im Vergleich mtt der Beobachtung, deren Gewicht $= 1$ ist, Bei'm einfachen arithmetischen Mittel ist $q_1 = q_2 = q_3 = \ldots 1$, und daher sein Gewicht $= n$, der Grad seiner Genauigkeit $= \sqrt{n}$.

Die Genauigkeit des einfachen arithmetischen Mittels wächs't also, wie die Quadratwurzel, aus der Zahl der Beobachtungen. Es folgt daraus, z. B., daß die Genauigkeit eines repetirten Winkels, wie die Quadratwurzel, aus der Repetitionszahl zunimmt, und daß das Gewicht eines n Mal repetirten Winkels $= n$ ist.

Auch läßt sich von hier aus noch ein tieferer Blick in das Wesen des allgemeinen arithmetischen Mittels thun, als bisher geschehen konnte. Sind nämlich $q_1\ q_2\ q_3 \ldots q_n$ die Gewichte der Beobachtungen $o_1\ o_2\ o_3 \ldots o_n$, so denke man sich ganze Zahlen $t_1\ t_2\ t_3 \ldots t_n$, welche sich wie $q_1\ q_2\ q_3 \ldots q_n$ verhalten. Man kann dann, z. B., die Beobachtung o_1 als das arithmetische Mittel aus t_1 Beobachtungen von gleicher Genauigkeit ansehen, so daß wir also, wenn wir aus allen Beobachtungen das arithmetische Mittel nehmen wollen, t_1 mal o_1, t_2 mal o_2 u. s. w. zu zählen haben. Da

für diesen Fall die Anzahl aller Beobachtungen $= t_1 + t_2 + t_3 \ldots + t_n$ ist, so ist das arithmetische Mittel

$$\frac{t_1 o_1 + t_2 o_2 + t_3 o_3 \ldots + t_n o_n}{t_1 + t_2 + t_3 \ldots + t_n}$$

oder $$\frac{q_1 o_1 + q_2 o_2 + q_3 o_3 \ldots + q_n o_n}{q_1 + q_2 + q_3 \ldots + q_n}.$$

In der vollständigen Beobachtungsreihe mit dem Modul $h \sqrt{q_1 + q_2 + q_3 \ldots + q_n}$, in welcher das arithmetische Mittel **M** ein Glied ist, giebt es einen wahrscheinlichen Fehler

$$\frac{0.47694}{h \sqrt{q_1 + q_2 + q_3 \ldots + q_n}} \ldots$$

und diesen nennen wir, wenn H statt h gesetzt wird, den wahrscheinlichen Fehler des arithmetischen Mittels. Derselbe ist also

(28)

$$\frac{0{,}47694}{H \sqrt{(q_1 + q_2 + q_3 \ldots + q_n)}} = \frac{R_1}{\sqrt{q_1 + q_2 + q_3 \ldots + q^n}}$$

wenn R_1 der wahrscheinliche Fehler in derjenigen Beobachtungsreihe bedeutet, aus welcher die Beobachtung mit dem Gewicht 1 entnommen ist. Nimmt man dabei noch Rücksicht auf die wahrscheinliche Unsicherheit des wahrscheinlichsten Moduls H, indem man $H \left(1 \pm \frac{0{,}47694}{\sqrt{n}}\right)$ statt H setzt, so erhält man für die wahrscheinliche Unsicherheit des wahrscheinlichen Fehlers des arithmetischen Mittels den Ausdruck:

$$(29) \quad \frac{0{,}47694}{\sqrt{n} \sqrt{q_1 + q_2 + q^3 \ldots + q_n}} R_1$$

Bei'm einfachen arithmetischen Mittel, wo $q_1 + q_2 + q_3 \ldots + q_n = n$ ist, wird der wahrscheinliche Fehler $=$

$$\frac{0{,}47694}{H \sqrt{n}} = \frac{R_1}{\sqrt{n}}$$

und dessen wahrscheinliche Unsicherheit $=$

$$\frac{0{,}47694}{n} R_1$$

In dem Beispiele des §. 219 ist der wahrscheinliche Fehler des arithmetischen Mittels $= \frac{0'',33}{\sqrt{10}} = 0'',10$ und dessen wahrscheinliche Unsicherheit $= 0{,}0157 \ldots$

§. 225.

Wir kommen nun zur zweiten Hauptaufgabe der Ausgleichungsrechnung, zur Ausgleichung der vermittelnden Beobachtungen. Es sei daher eine Größe L durch folgende Gleichung des ersten Grades bestimmt:

(30)

$$L = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_p x_p$$

wo $a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_p$ bekannte und mit keiner weiteren Ungenauigkeit behaftete Größen sind, $x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_p$ aber p unbekannte Größen vorstellen, welche aus Beobachtungen bestimmt werden müssen. Man kann aber nicht $x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_p$ selbst, sondern muß L beobachten und deßhalb wenigstens p verschiedene Werthe von L suchen. Um aber größere Genauigkeit in der Bestimmung der x zu erhalten, beobachtet man L weit mehr als p mal, wir wollen setzen n mal. Man erhält dadurch, wenn die beobachteten und daher fehlerhaften Werthe der L mit l bezeichnet werden, folgende Gleichungen:

(31)

$$l_1 = \overset{1}{a}_1 x_1 + \overset{1}{a}_2 x_2 + \overset{1}{a}_3 x_3 + \ldots + \overset{1}{a}_p x_p$$
$$l_2 = \overset{2}{a}_1 x_1 + \overset{2}{a}_2 x_2 + \overset{2}{a}_3 x_3 + \ldots + \overset{2}{a}_p x_p$$
$$l_3 = \overset{3}{a}_1 x_1 + \overset{3}{a}_2 x_2 + \overset{3}{a}_3 x_3 + \ldots + \overset{3}{a}_p x_p.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$l_n = \overset{n}{a}_1 x_1 + \overset{n}{a}_2 x_2 + \overset{n}{a}_3 x_3 + \ldots + \overset{n}{a}_p x_p$$

Nun denke man sich, man setze in jede Gleichung die wahren Werthe der x, so wird nicht $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$ herauskommen, weil eben diese Werthe fehlerhaft sind; man wird vielmehr die wahren Werthe $L_1\ L_2\ L_3 \ldots \ldots L_n$ erhalten. Denn eigentlich ist:

(32)

$$L_1 = \overset{1}{a}_1\, x_1 + \overset{1}{a}_2\, x_2 + \overset{1}{a}_3\, x_3 + \ldots\ldots + \overset{1}{a}_p\, x_p$$
$$L_2 = \overset{2}{a}_1\, x_1 + \overset{2}{a}_2\, x_2 + \overset{2}{a}_3\, x_3 + \ldots\ldots + \overset{2}{a}_p\, x_p$$
$$L_3 = \overset{3}{a}_1\, x_1 + \overset{3}{a}_2\, x_2 + \overset{3}{a}_3\, x_3 + \ldots\ldots + \overset{3}{a}_p\, x_p$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_n = \overset{n}{a}_1\, x_1 + \overset{n}{a}_2\, x_2 + \overset{n}{a}_3\, x_3 + \ldots\ldots + \overset{n}{a}_p\, x_p$$

und man hat also der Reihe nach folgende Beobachtungsfehler

(33)

$$\triangle_1 = L_1 - l_1,\ \triangle_2 = L_2 - l_2,\ \triangle_3 = L_3 - l_3 \ \ldots\ldots\ldots \triangle_n = L_n - l_n.$$

Sind dann $h_1\ h_2\ h_3 \ldots\ldots h_n$ die Moduln der vollständigen Beobachtungsreihen, aus denen die Fehler $\triangle_1\ \triangle_2\ \triangle_3 \ldots\ldots \triangle_n$ herausgenommen sind, so haben wir die Wahrscheinlichkeit dieser Fehlerreihe:

(34)

$$W = \frac{\mu^n h_1\, h_2\, h_3 \ldots\ldots h_n}{(\sqrt{\pi})^n)}\, e^{-(h_1^2 \triangle_1^2 + h_2^2 \triangle_2^2 \ldots\ldots + h_n^2 \triangle_n^2)}$$

oder wenn wir die Gewichte $q_1\ q_2\ q_3 \ldots\ldots q_n$ einführen und dabei immer $q_1 = 1$ setzen:

$$W = \frac{\mu^n h^n \sqrt{q_1\, q_2\, q_3 \ldots\ldots q_n}}{(\sqrt{\pi})^n}\, e^{-h^2(q_1 \triangle_1^2 + q_2 \triangle_2^2 + \ldots\ldots + q_n \triangle_n^2)}$$

Um nun die wahrscheinlichsten Werthe der x zu erhalten, wird man wieder W zu einem Größten, also $q_1\ \triangle_1^2 + q_2\ \triangle_2^2 + q_3\ \triangle_3^2 + \ldots\ldots + q_n\ \triangle_n^2$ zu einem Kleinsten machen. Differentiirt man also diesen Ausdruck nach $x_1\ x_2\ x_3 \ldots\ldots x_p$, so folgt:

$$q_1 \triangle_1 \left(\frac{d\triangle_1}{d\,x_1}\right) + q_2 \triangle_2 \left(\frac{d\triangle_2}{d\,x_1}\right) + \ldots + q_n \triangle_n \left(\frac{d\triangle_n}{d\,x_1}\right) = 0$$

$$q_1 \triangle_1 \left(\frac{d\triangle_1}{d\,x_2}\right) + q_2 \triangle_2 \left(\frac{d\triangle_2}{d\,x_2}\right) + \ldots + q_n \triangle_n \left(\frac{d\triangle_n}{d\,x_2}\right) = 0$$

$$q_1 \triangle_1 \left(\frac{d\triangle_1}{d x_3}\right) + q_2 \triangle_2 \left(\frac{d\triangle_2}{d x_3}\right) + \ldots + q_n \triangle_n \left(\frac{d\triangle_n}{d x_3}\right) = 0$$

. . . .

$$q_1 \triangle_1 \left(\frac{d\triangle_1}{d x_p}\right) + q_2 \triangle_2 \left(\frac{d\triangle_2}{d x_p}\right) + \ldots + q_n \triangle_n \left(\frac{d\triangle_n}{d x_p}\right) = 0$$

Man hat aber nach (33):

$$\triangle_1 = L_1 - l_1$$

$$= \overset{1}{a}_1 x_1 + \overset{1}{a}_2 x_2 + \overset{1}{a}_3 x_3 \ldots . + \overset{1}{a}_p x_p - l_1$$

also

$$\left(\frac{d\triangle_1}{d x_1}\right) = \overset{1}{a}$$

und ebenso folgt:

$$\left(\frac{d\triangle_2}{d x_1}\right) = \overset{2}{a}_1; \left(\frac{d\triangle_3}{d x_1}\right) = \overset{3}{a}_1 \ldots \left(\frac{d\triangle_n}{d x_1}\right) = \overset{n}{a}_1$$

$$\left(\frac{d\triangle_1}{d x_2}\right) = \overset{1}{a}_2; \left(\frac{d\triangle_2}{d x_2}\right) = \overset{2}{a}_2; \left(\frac{d\triangle_3}{d x_2}\right) = \overset{3}{a}_2 \ldots \left(\frac{d\triangle_n}{d x_2}\right) = \overset{n}{a}_2$$

$$\left(\frac{d\triangle_1}{d x_3}\right) = \overset{1}{a}_3; \left(\frac{d\triangle_2}{d x_3}\right) = \overset{2}{a}_3; \left(\frac{d\triangle_3}{d x_3}\right) = \overset{3}{a}_3 \ldots \left(\frac{d\triangle_n}{d x_3}\right) = \overset{n}{a}_3$$

. . . .

$$\left(\frac{d\triangle_1}{d x_p}\right) = \overset{1}{a}_p; \left(\frac{d\triangle_2}{d x_p}\right) = \overset{2}{a}_p; \left(\frac{d\triangle_3}{d x_p}\right) = \overset{3}{a}_p \ldots \left(\frac{d\triangle_n}{d x_p}\right) = \overset{n}{a}_p$$

Daher verwandeln sich die vorigen Gleichungen, wenn der Kürze halber

(35)

$$q_1 \triangle_1^2 + q_2 \triangle_2^2 + q_3 \triangle_3^2 + \ldots + q_n \triangle_n^2 = S$$

gesetzt wird, in:

$$(L_1 - l_1)\, q_1 \overset{1}{a}_1 + (L_2 - l_2)\, q_2 \overset{2}{a}_1 + \ldots + (L_n - l_n)\, q_n \overset{n}{a}_1 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dS}{dx_1}\right) = 0$$

$$(L_1 - l_1)\, q_1 \overset{1}{a}_2 + (L_2 - l_2)\, q_2 \overset{2}{a}_2 + \ldots + (L_n - l_n)\, q_n \overset{n}{a}_2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dS}{dx_2}\right) = 0$$

$$(L_1 - l_1)\, q_1 \overset{1}{a}_3 + (L_2 - l_2)\, q_2 \overset{2}{a}_3 + \dots + (L_n - l_n)\, q_n \overset{n}{a}_3 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dS}{dx_3}\right) = 0$$

. . . .

$$(L_1 - l_1)\, q_1 \overset{1}{a}_p + (L_2 - l_2)\, q_2 \overset{2}{a}_p + \dots + (L_n - l_n)\, q_n \overset{n}{a}_p = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dS}{dx_p}\right) = 0.$$

Statt $L_1\ L_2\ L_3 \dots\dots L_n$ führen wir jetzt die Werthe dieser Größen aus (32) ein, bezeichnen

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{dS}{dx_1}\right),\ \tfrac{1}{2}\left(\frac{dS}{dx_2}\right),\ \tfrac{1}{2}\left(\frac{dS}{dx_3}\right) \dots \tfrac{1}{2}\left(\frac{dS}{dx_p}\right)$$

der Reihe nach mit $P_1\ P_2\ P_3 \dots P_p$, und setzen, der Kürze halber,

$$\overset{1}{a}_1 l_1 q_1 + \overset{2}{a}_1 l_2 q_2 + \overset{3}{a}_1 l_3 q_3 + \dots + \overset{n}{a}_1 l_n q_n = \left[\overset{n}{a}_1 l_n q_n\right]$$

$$\overset{1}{a}_1 \overset{1}{a}_1 q_1 + \overset{2}{a}_1 \overset{2}{a}_1 q_2 + \overset{3}{a}_1 \overset{3}{a}_1 q_3 + \dots + \overset{n}{a}_1 \overset{n}{a}_1 q_n = \left[\overset{n}{a}_1 \overset{n}{a}_1 q_n\right]$$

$$\overset{1}{a}_1 \overset{1}{a}_2 q_1 + \overset{2}{a}_1 \overset{2}{a}_2 q_2 + \overset{3}{a}_1 \overset{3}{a}_2 q_3 + \dots + \overset{n}{a}_1 \overset{n}{a}_2 q_n = \left[\overset{n}{a}_1 \overset{n}{a}_2 q_n\right]$$

u. s. w.,

so daß also, z. B., $\left[\overset{n}{a}_1 \overset{n}{a}_2 q_n\right]$ die Summe aller Producte bedeutet, die man erhält, wenn man nach und nach $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ u. s. w. nimmt. Dadurch bekommt man folgende p Bestimmungsgleichungen für die gesuchten Größen $x_1\ x_2\ x_3 \dots x_p$:

(36)

$$-\left[\overset{n}{a}_1 l_n q_n\right] + \left[\overset{n}{a}_1 \overset{n}{a}_1 q_n\right] x_1 + \left[\overset{n}{a}_1 \overset{n}{a}_2 q_n\right] x_2 + \left[\overset{n}{a}_1 \overset{n}{a}_3 q_n\right] x_3 + \dots + \left[\overset{n}{a}_1 \overset{n}{a}_p q_n\right] x_p = P_1 = 0$$

$$-\left[\overset{n}{a}_2 l_n q_n\right] + \left[\overset{n}{a}_2 \overset{n}{a}_1 q_n\right] x_1 + \left[\overset{n}{a}_2 \overset{n}{a}_2 q_n\right] x_2 + \left[\overset{n}{a}_2 \overset{n}{a}_3 q_n\right] x_3 + \dots + \left[\overset{n}{a}_2 \overset{n}{a}_p q_n\right] x_p = P_2 = 0$$

$$-\left[\overset{n}{a}_3 l_n q_n\right] + \left[\overset{n}{a}_3 \overset{n}{a}_1 q_n\right] x_1 + \left[\overset{n}{a}_3 \overset{n}{a}_2 q_n\right] x_2 + \left[\overset{n}{a}_3 \overset{n}{a}_3 q_n\right] x_3 + \dots + \left[\overset{n}{a}_3 \overset{n}{a}_p q_n\right] x_p = P_3 = 0$$

. . . .

$$-\left[\overset{n}{a}_p l_n q_n\right]+\left[\overset{n}{a}_p \overset{n}{a}_1 q_n\right] x_1+\left[\overset{n}{a}_p \overset{n}{a}_2 q_n\right] x_2+\left[\overset{n}{a}_p \overset{n}{a}_3 q_n\right] x_3$$
$$+\ldots\ldots+\left[\overset{n}{a}_p \overset{n}{a}_p q_n\right] x_p=P_p=0.$$

Diese Gleichungen lösen wir aus Gründen, die nachher erklärt werden, so auf, daß wir nicht $P_1 = P_2 = P_3 \ldots = P_p = 0$ setzen, sondern daß wir diese Größenform erst als unbestimmt ansehen. Die bekannten Reductionsmethoden geben dann für $x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_p$ folgende Ausdrücke:

(37)

$$x_1=\overset{1}{g}_0+\overset{1}{g}_1 P_1+\overset{1}{g}_2 P_2+\overset{1}{g}_3 P_3 \ldots+\overset{1}{g}_p P_p$$
$$x_2=\overset{2}{g}_0+\overset{2}{g}_1 P_1+\overset{2}{g}_2 P_2+\overset{2}{g}_3 P_3 \ldots+\overset{2}{g}_p P_p$$
$$x_3=\overset{3}{g}_0+\overset{3}{g}_1 P_1+\overset{3}{g}_2 P_2+\overset{3}{g}_3 P_3 \ldots+\overset{3}{g}_p P_p$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_p=\overset{p}{g}_0+\overset{p}{g}_1 P_1+\overset{p}{g}_2 P_2+\overset{p}{g}_3 P_3 \ldots+\overset{p}{g}_p P_p$$

Da aber für die wahrscheinlichsten Werthe der x alle $P = 0$ gesetzt werden müssen, so hat man:

(38)

$$x_1=\overset{1}{g}_0;\ x_2=\overset{2}{g}_0;\ x_3=\overset{3}{g}_0 \ldots\ldots x_p=\overset{p}{g}_0.$$

Die sämmtlichen g werden aus den Coefficienten der Gleichungen (36) gefunden und sind demnach bekannte Größen.

§. 226.

Es kommt nun vornehmlich darauf an, den Grad der Genauigkeit jeder der so bestimmten Größen $x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_p$ zu ermitteln, wobei wir folgenden Gedanken zu Grunde legen müssen. Der Ausdruck W bedeutet die Häufigkeit der bestimmten Fehlerreihe $\triangle_1\ \triangle_2\ \triangle_3 \ldots \triangle_n$, also auch der bestimmten Werthe $x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_p$ in Bezug auf die gesammte Häufigkeit aller möglichen Fehlerreihen. Wir können also W als die Wahrscheinlichkeit auffassen, daß die bestimmten Werthe $x_2\ x_3\ x_4 \ldots x_p$ statt haben, wenn zugleich x_1 einen bestimmten

Werth hat. Legen wir dem x_1 verschiedene Werthe bei, so ändern sich die Fehler $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3 \ldots \Delta_n$ und mit ihnen auch W, aber wenn wir alle Werthe von W, die bei den verschiedenen x_1 statt haben, zusammen nehmen, so bekommen wir die Wahrscheinlichkeit der bestimmten Werthe $x_2\ x_3\ x_4 \ldots x_p$, wenn für keinen der angenommenen Werthe von x_1 entschieden wird. Setzen wir dabei für x_1 alle möglichen Werthe zwischen $-\infty$ und $+\infty$, so bekommen wir die Wahrscheinlichkeit, daß die bestimmten Werthe $x_2\ x_3\ x_4 \ldots x_p$ statt haben, ohne daß für irgend einen Werth von x_1 entschieden wird, also die gesammte Häufigkeit des Systems der Werthe $x_2\ x_3\ x_4 \ldots x_p$ im Bezug auf die gesammte Häufigkeit aller möglichen Fehlerreihen $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3 \ldots \Delta_n$. Dieselbe sei $= W_1$. Nun können wir aber wieder für x_2 alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ denken, für jeden das entsprechende W_1 berechnen und alle W_1 addiren. Wir erhalten dadurch die Wahrscheinlichkeit, daß die bestimmten Werthe $x_3\ x_4\ x_5 \ldots x_p$ statt haben, ohne daß für irgend einen Werth von x_1 und x_2 entschieden wird, also die gesammte Häufigkeit des bestimmten Systems $x_3\ x_4\ x_5 \ldots x_p$ im Bezug auf die gesammte Häufigkeit aller möglichen Fehlerreihen. Diese setzen wir $= W_2$. Fahren wir so fort, so erhalten wir zuletzt die gesammte Häufigkeit des Werthes x_p im Bezug auf die gesammte Häufigkeit aller möglichen Fehlerreihen, welche mit W_{p-1} zu bezeichnen ist.

Nach (34) ist nun, wenn wir der Kürze halber
$\mu^n \sqrt{q_1\ q_2\ q_3 \ldots q_n} = K$
setzen:

$$W = \frac{h^n K}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2 S}.$$

Verwandelt sich nun x_1 in $x_1 + \xi$, so wird sich nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$S \text{ in } S + \left(\frac{dS}{dx_1}\right)\xi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2S}{dx_1^2}\right)\xi^2$$

verwandeln. Denn da überhaupt

$$\Delta_r^2 = \left(\overset{r}{a}_1 x_1 + \overset{r}{a}_2 x_2 \ldots + \overset{r}{a}_p x_p - l_r\right)^2$$

so steigt in jedem △ jedes x nur auf die zweite Potenz und das Quadrat hat immer einen positiven Coefficienten. Hieraus folgt aber, daß $d^3 S$, $d^4 S$ u. s. w. $= 0$ sind und die Reihe folglich mit dem Quadrat von ξ abbricht, und daß $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 S}{d x_1^2}\right)$ eine positive constante Größe ist, die mit b_1^2 bezeichnet werden soll. Man hat also

$$S + \left(\frac{d S}{d x_1}\right) \xi + b_1^2 \xi^2$$

aus S. Dabei bestimmen wir x_1 so, daß $\left(\frac{d S}{d x_1}\right) = 0$ wird und setzen dieses x_1, welches wir mit x'_1 bezeichnen, in S. Da x'_1 eine Function von $x_2\ x_3\ x_4 \ldots\ldots x_p$ ist, so wird nun auch S bloße Function von $x_2\ x_3\ x_4 \ldots\ldots x_p$, und wir wollen diesen Werth von S mit S_1 ausdrücken. Es ist dadurch

$$S_1 + b_1^2 \xi^2 \text{ aus } S$$

geworden, und aus W wird

$$\frac{h^n K}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2 (S_1 + b_1^2 \xi^2)}$$

$$= \frac{K h^n e^{-h^2 S_1}}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2 b_1^2 \xi^2}.$$

Entscheiden wir dabei für keinen Werth von ξ zwischen $-\infty$ und $+\infty$, so bekommen wir, wenn ν_1 eine unendlich kleine mit x_1 gleichartige Größe ist:

$$W_1 = \frac{K h^n e^{-h^2 S_1}}{\nu_1 (\sqrt{\pi})^n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 b_1^2 \xi^2} d\xi$$

oder da $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 b_1^2 \xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{h b_1}$ ist:

$$W_1 = \frac{K h^{n-1} e^{-h^2 S_1}}{\nu_1 (\sqrt{\pi})^{n-1} b_1}.$$

Man sieht leicht ein, daß auch in S_1 die $x_2\ x_3\ x_4 \ldots\ldots x_p$ nur bis auf das Quadrat steigen, und daß alle diese Quadrate positive Coefficienten haben. Lassen wir also x_2 in $x_2 + \xi$ übergehen, bestimmen den Werth

x'_2 von x_2 so, daß $\left(\frac{d\,S_1}{d\,x_2}\right) = 0$ wird und setzen $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,S}{d\,x_2^2}\right) = b_2^2$, so wird

$$S_1 + b_2^2\,\xi^2 \text{ aus } S_1.$$

Setzen wir aber noch x'_2 statt x_2 in S_1, so wird dieses S_2 und hängt nicht mehr von x_2, sondern nur noch von $x_3\;x_4\;x_5\;\ldots\;x_p$ ab. Aus W_1 wird also

$$\frac{K\,h^{n-1}\,e^{-h^2 S_2}}{\nu_1\,(\sqrt{\pi})^{n-1}\,b_1}\,e^{-h^2\,b_2^2\,\xi^2}$$

und wenn wir wieder für keinen Werth von x_2 oder ξ entscheiden, so haben wir:

$$W_2 = \frac{K\,h^{n-1}\,e^{-h^2 S_2}}{\nu_1\,\nu_2\,b_1\,(\sqrt{\pi})^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\,b_2^2\,\xi^2}\,d\,\xi,$$

d. h.

$$W_2 = \frac{K\,h^{n-2}\,e^{-h^2 S_2}}{\nu_1\,\nu_2\,b_1\,b_2\,(\sqrt{\pi})^{n-2}},$$

wo die unendlich kleine Größe ν_2 mit x_2 gleichartig ist. Verfahren wir eben so mit x_3, so erhalten wir

$$W_3 = \frac{K\,h^{n-3}\,e^{-h^2 S_3}}{\nu_1\,\nu_2\,\nu_3\,b_1\,b_2\,b_3\,(\sqrt{\pi})^{n-3}}$$

und so fortfahrend kommen wir endlich auf

$$W_{p-1} = \frac{K\,h^{n-p+1}\,e^{-h^2 S_{p-1}}}{\nu_1\,\nu_2\,\nu_3\ldots\nu_{p-1}\,b_1\,b_2\,b_3\ldots b_{p-1}\,(\sqrt{\pi})^{n-p+1}}$$

wo nun S_{p-1} nur noch von x_p abhängt. Wir setzen wieder $x_p + \xi$ statt x_p, bestimmen den Werth x'_p von x_p so, daß $\left(\frac{d\,S_{p-1}}{d\,x_p}\right) = 0$ wird und bringen x'_p in S_{p-1}, um dieses in das von keinem x mehr abhängige S_p zu verwandeln. Setzen wir nun noch $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,S_{p-1}}{d\,x_p^2}\right) = b_p^2$, so erhalten wir aus W_{p-1} den Ausdruck:

$$W'_{p-1} = \frac{K\,h^{n-p+1}\,e^{-h^2 S_p}\,e^{-h^2\,b_p^2\,\xi^2}}{\nu_1\,\nu_2\,\nu_3\ldots\nu_{p-1}\,b_1\,b_2\,b_3\ldots b_{p-1}\,(\sqrt{\pi})^{n-p+1}}$$

und dieser ist also die gesammte Häufigkeit des Werthes

$x'_p + \xi = x_p$ in Bezug auf die gesammte Häufigkeit aller möglichen Fehlerreihen $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3 \ldots\ldots \Delta_n$. Da die Werthe $x'_1\ x'_2\ x'_3 \ldots\ldots x'_p$ den Gleichungen

$$\left(\frac{dS}{dx_1}\right)=0,\ \left(\frac{dS}{dx_2}\right)=0,\ \left(\frac{dS}{dx_3}\right)=0\ldots.\ \left(\frac{dS}{dx_p}\right)=0$$

genügen, so sind sie eben die wahrscheinlichsten, also die für wahr anzunehmenden Werthe von $x_1\ x_2\ x_3 \ldots\ldots x_p$, und daher ist ξ in W'_{p-1} der Fehler von x_p. Also ist auch W'_{p-1} die gesammte Häufigkeit des Fehlers ξ von x_p in Bezug auf die gesammte Häufigkeit aller möglichen Fehlerreihen. Wir setzen abkürzend:

$$\frac{K\, h^{n-p+1}\, e^{-h^2 S_p}}{\nu_1\,\nu_2\,\nu_3 \ldots\ldots \nu_{p-1}\, b_1\, b_2\, b_3 \ldots\ldots b_{p-1}\, (\sqrt{\pi})^{n-p+1}} = K'$$

und haben dann:

$$W'_{p-1} = K'\, e^{-h^2 b_p^2 \xi^2}.$$

Entscheiden wir dabei für keinen Werth von ξ, so bekommen wir

$$\infty W'_{p-1} = \frac{K'}{\nu_p} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 b_p^2 \xi^2}\, d\xi = \frac{K' \sqrt{\pi}}{\nu_p\, h\, b_p},$$

wo die unendlich kleine Größe ν_p mit x_p gleichartig ist. Dieser Ausdruck bedeutet nun die gesammte Häufigkeit aller möglichen Fehlerwerthe von x_p in Bezug auf die gesammte Häufigkeit aller möglichen Fehlerreihen, der Quotient

$$\frac{W'_{p-1}}{\infty W'_{p-1}}$$

muß also die gesammte Häufigkeit des Fehlers ξ von x_p in Bezug auf die gesammte Häufigkeit aller Fehlerwerthe von x_p, d. h. die Wahrscheinlichkeit des Fehlers ξ von x_p angeben. Bezeichnen wir diese daher mit v_{x_p} und schreiben μ statt ν_p, so haben wir

(38)

$$v_{x_p} = \frac{\mu\, h\, b_p}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 b_p^2 \xi^2}.$$

Daraus ersehen wir, daß der Fehler ξ von x_p und folglich auch x_p einer vollständigen Beobachtungsreihe

mit dem Modulus $h\,b_p$ angehört. Da nun die Beobachtung l_1 einer Reihe mit dem Modul h angehört, so ergiebt sich, daß x_p im Verhältniß $1 : b_p$ genauer berechnet ist, als l_1 beobachtet wurde. Da auch das Gewicht von $l_1 = 1$ ist, so ist b_p^2 das Gewicht von x_p.

Nun ist noch b_p näher zu bestimmen. Es wurde aber b_p gefunden, indem man x_1 so bestimmte, daß $\left(\frac{dS}{dx_1}\right) = 0$ wurde, diesen Werth von x_1 in S setzte, wodurch man S_1 erhielt. Dann bestimmte man wieder x_2 so, daß $\left(\frac{dS_1}{dx_2}\right) = 0$ wurde, setzte diesen Werth von x_2 in S_1, wodurch S_2 entstand. Nun wurde wieder $\left(\frac{dS_2}{dx_3}\right) = 0$ gemacht und so fortgefahren, bis man das nur noch von x_p abhängige S_{p-1} erhielt. Dann wurde $b_p^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{d\,d\,S_{p-1}}{d\,x_p^2}\right)$. Statt dessen hätte man auch $\left(\frac{dS}{dx_1}\right) = \left(\frac{dS}{dx_2}\right) \ldots = \left(\frac{dS}{dx_{p-1}}\right) = 0$ machen und die hieraus folgenden Werthe von $x_1\; x_2\; x_3 \ldots\ldots x_{p-1}$, die sämmtlich Functionen von x_p sind, in S setzen können: man hätte so eben den Werth von S_{p-1} erhalten.

Nach diesem zweiten Verfahren wird in der letzten der Gleichungen (37) $P_1 = P_2 = P_3 = \ldots P_{p-1} = 0$, daher

$$x_p = \overset{p}{g}_0 + \overset{p}{g}_p \cdot P_p$$

$$\text{d. h., } x_p = \overset{p}{g}_0 + \overset{p}{g}_p \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \left(\frac{dS}{dx_p}\right).$$

Da aber in S die aus den Gleichungen $P_1 = P_2 = P_3 \ldots\ldots = P_{p-1} = 0$ sich ergebenden Werthe von $x_1\; x_2\; x_3 \ldots\ldots x_{p-1}$ zu setzen sind, so wird $S = S_{p-1}$, und daher

$$x_p = \overset{p}{g}_0 + \overset{p}{g}_p \cdot \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\,S_{p-1}}{d\,x_p}\right)$$

also wenn nach x_p differentiirt wird:

$$1 = \overset{p}{g}_p \cdot \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\,d\,S^{p-1}}{d\,x_p^2}\right)$$

$$\text{oder } 1 = b_p^2 \cdot \overset{p}{g}_p$$

daher

$$(39)\ b_p = \frac{1}{\sqrt{\left(\overset{p}{g}_p\right)}}.$$

Indem man so jedes x an das Ende der Reihe stellt, findet man leicht, daß man, um allgemein den Grad der Genauigkeit von x_r im Vergleich mit l_1 zu erhalten, die Quadratwurzel aus dem reciproken Werthe des Coefficienten von P_r in der Gleichung für x_r in (37), also $\frac{1}{\sqrt{\left(\overset{r}{g}_r\right)}}$ zu nehmen hat. Auch ist $\frac{1}{\overset{r}{g}_r}$ das Gewicht von x_r, wenn das von $l_1 = 1$ ist.

§. 227.

Nunmehr ist es leicht, auch für diesen Fall ähnliche Formeln der mittleren und wahrscheinlichen Fehler aufzustellen, wie wir für den ersten gegeben haben. Zunächst können wir einen mittleren, bei allen Beobachtungen gleichen Fehler $\triangle_m$ so bestimmen, daß W noch denselben Werth behält. Es muß dann sein:

$$W = \frac{\mu^n h^n \sqrt{q_1 q_2 q_3 \ldots . q_n}}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2(q_1 \triangle_1^2 + q_2 \triangle_2^2 \ldots + q_n \triangle_n^2)}$$

$$= \frac{\mu^n h^n \sqrt{q_1 q_2 q_3 \ldots . q_n}}{(\sqrt{\pi})_n} e^{-h^2(q_1 + q_2 + \ldots + q_n) \triangle_m^2}$$

daher

(40)

$$\triangle_m^2 = \frac{q_1 \triangle_1^2 + q_2 \triangle_2^2 + q_3 \triangle_3^2 + \ldots . + q_n \triangle_n^2}{q_1 + q_2 + q_3 \ldots \ldots + q_n}$$

$$\triangle_m = \sqrt{\left(\frac{q_1 \triangle_1^2 + q_2 \triangle_2^2 + q_3 \triangle_3^2 \ldots . + q_n \triangle_n^2}{q_1 + q_2 + q_3 \ldots . + q_n}\right)}.$$

Dann können wir den willkührlichen Modulus h der ersten Beobachtung l_1 so bestimmen, daß W ein

Größtes wird, wodurch wir den wahrscheinlichsten Modulus H erhalten. Dieser wird

$$(41)\ H = \frac{1}{\Delta_m \sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{n}{q_1 + q_2 + q_3 \dots + q_n}\right)}.$$

Darnach wird der wahrscheinliche Fehler der ersten Beobachtung

$$R_1 = \frac{0{,}47694}{H}$$

und überhaupt der wahrscheinliche Fehler bei der r ten Beobachtung

$$(42)\ R_r = \frac{0{,}47694}{H \sqrt{q_r}} = \frac{R_1}{\sqrt{q_r}}$$

indem der Modulus der r ten Beobachtung $= h_r$

$$= h \sqrt{\left(\frac{q_r}{q_1}\right)} = h \sqrt{q_r} = H \sqrt{q_r} \text{ ist.}$$

Suchen wir ferner die Grenzen, zwischen welchen alle Moduln unentschieden bleiben müssen, um ihre Gesammtwahrscheinlichkeit auf ½ zu bringen, so finden sich nach dem schon bekannten Verfahren jene Grenzen

$$= H \left(1 \pm \frac{0{,}47694}{\sqrt{n}}\right)$$

und daher auch der wahrscheinliche Fehler des wahrscheinlichen Modulus =

$$(43)\ \lambda = \frac{0{,}47694}{\sqrt{n}} H.$$

Hieraus folgt dann noch die wahrscheinliche Unsicherheit von R_r =

$$(44)\ \frac{0{,}47694}{\sqrt{n}} R_r.$$

Der Modulus der Beobachtungsreihe, von welcher das berechnete x_r als Glied zu denken ist, ist $h_{x_r} = h b_r$ $= \frac{h}{\sqrt{\frac{r}{g_r}}}$, also wenn wir H statt h nehmen:

$$(45)\ H_{x_r} = \frac{H}{\sqrt{\frac{r}{g_r}}}.$$

Es folgt hieraus ein wahrscheinlicher Fehler von $x_r = R_{x_r} = \frac{0,47694}{H_{x_r}}$, d. h.,

$$(46)\quad R_{x_r} = \frac{0,47694}{H}\sqrt{\overset{r}{g}_r}$$

$$\text{oder } R_{x_r} = R_1\sqrt{\overset{r}{g}_r}.$$

Dann hat man noch eine wahrscheinliche Unsicherheit von R_{x_r} =

$$(47)\quad \frac{0,47694}{\sqrt{n}} \cdot R_{x_r}$$

indem man nämlich bei H in (46) auf dessen wahrscheinliche Unsicherheit Rücksicht nimmt.

§. 228.

Wenn nur eine unbekannte Größe $x_1 = x$ zu bestimmen ist, so hat man aus (30)

$$L = a_1 x = ax,$$

indem alle übrigen a = 0 werden. Die Gleichungen (36) liefern dann die folgende

$$-\left(\overset{1}{a}\, l_1 q_1 + \overset{2}{a}\, l_2 q_2 + \overset{3}{a}\, l_3 q_3 \ldots\ldots + \overset{n}{a}\, l_n q_n\right)$$
$$+\left(\overset{1}{a}\overset{1}{a} q_1 + \overset{2}{a}\overset{2}{a} q_2 + \overset{3}{a}\overset{3}{a} q_3 \ldots\ldots + \overset{n}{a}\overset{n}{a} q_n\right)x = P = 0,$$

woraus folgt,

$$x = \frac{\overset{1}{a}\, l_1 q_1 + \overset{2}{a}\, l_2 q_2 + \overset{3}{a}\, l_3 q_3 \ldots\ldots + \overset{n}{a}\, l_n q_n + P}{\overset{1}{a}\overset{1}{a} q_1 + \overset{2}{a}\overset{2}{a} q_2 + \overset{3}{a}\overset{3}{a} q_3 \ldots\ldots + \overset{n}{a}\overset{n}{a} q_n}$$

also, da P = 0 gesetzt werden muß, um x zu erhalten:

$$(48)$$

$$x = \frac{\overset{1}{a}\, l_1 q_1 + \overset{2}{a}\, l_2 q_2 + \overset{3}{a}\, l_3 q_3 \ldots\ldots + \overset{n}{a}\, l_n q_n}{\overset{1}{a}\overset{1}{a} q_1 + \overset{2}{a}\overset{2}{a} q_2 + \overset{3}{a}\overset{3}{a} q_3 \ldots\ldots + \overset{n}{a}\overset{n}{a} q_n}.$$

Das Gewicht von x ist der reciproke Coefficient von P, also =

$$\overset{1}{a}\overset{1}{a} q_1 + \overset{2}{a}\overset{2}{a} q_2 + \overset{3}{a}\overset{3}{a} q_3 \ldots\ldots + \overset{n}{a}\overset{n}{a} q_n$$

wenn das Gewicht von $l_1 = 1$ ist. Nehmen wir hier alle $a = 1$, so bekommen wir:

(49)

$$x = \frac{q_1\, l_1 + q_2\, l_2 + q_3\, l_3 + \ldots q_n\, l_n}{q_1 + q_2 + q_3 + \ldots\ldots q_n}$$

und das Gewicht =

$$q_1 + q_2 + q_3 \ldots + q_n,$$

welches die Ausdrücke für das allgemeine arithmetische Mittel sind.

§. 229.

Ehe wir weiter gehen, wird es nicht unpassend sein, die bisherige Theorie durch ein einfaches Beispiel zu erläutern. Es seien also die Gleichungen gegeben:

$$1 = x + y - 2z \text{ und } q_1 = 1$$
$$1 = \tfrac{1}{3}x - y + \tfrac{1}{3}z \quad " \quad q_2 = 9$$
$$\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{6}y - \tfrac{1}{2}z \quad " \quad q_3 = 36$$
$$\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{12}x - \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{12}z \quad " \quad q_4 = 144$$

so widersprechen jede drei derselben der vierten, denn verbindet man je drei und berechnet darnach die Werthe von xyz, so giebt jede andere Verbindung andere Resultate. Die möglichste Ausgleichung der Widersprüche wird nun durch die Methode der kleinsten Quadrate bewirkt. Es ist:

$$l_1 = 1 \quad \overset{1}{a}_1 = 1 \quad \overset{2}{a}_1 = \tfrac{1}{3} \quad \overset{3}{a}_1 = \tfrac{1}{3} \quad \overset{4}{a}_1 = \tfrac{1}{12}$$
$$l_2 = 1 \quad \overset{1}{a}_2 = 1 \quad \overset{2}{a}_2 = -1 \quad \overset{3}{a}_2 = \tfrac{1}{6} \quad \overset{4}{a}_2 = -\tfrac{1}{3}$$
$$l_3 = \tfrac{1}{3} \quad \overset{1}{a}_3 = -2 \quad \overset{2}{a}_3 = \tfrac{1}{3} \quad \overset{3}{a}_3 = -\tfrac{1}{2} \quad \overset{4}{a}_3 = \tfrac{1}{12}$$
$$l_4 = \tfrac{1}{4}$$

daher

$$\left[\overset{n}{a}_1\, l_n q_n\right] = \overset{1}{a}_1 l_1 q_1 + \overset{2}{a}_1 l_2 q_2 + \overset{3}{a}_1 l^3 q_3 + \overset{4}{a}_1 l_4 q_4 = 1$$
$$\left[\overset{n}{a}_1 \overset{n}{a}_1 q_n\right] = \overset{1}{a}_1\overset{1}{a}_1 q_1 + \overset{2}{a}_1\overset{2}{a}_1 q_2 + \overset{3}{a}_1\overset{3}{a}_1 q_3 + \overset{4}{a}_1\overset{4}{a}_1 q_4 = 7$$
$$\left[\overset{n}{a}_1 \overset{n}{a}_2 q_n\right] = \overset{1}{a}_1\overset{1}{a}_2 q_1 + \overset{2}{a}_1\overset{2}{a}_2 q_2 + \overset{3}{a}_1\overset{3}{a}_2 q_3 + \overset{4}{a}_1\overset{4}{a}_2 q_4 = -4$$
$$\left[\overset{n}{a}_1 \overset{n}{a}_3 q_n\right] = \overset{1}{a}_1\overset{1}{a}_3 q_1 + \overset{2}{a}_1\overset{2}{a}_1 q_2 + \overset{3}{a}_1\overset{3}{a}_3 q_3 + \overset{4}{a}_1\overset{4}{a}_3 q_4 = -6$$

und hieraus

$$-11 + 7x - 4y - 6z = P_1 = 0.$$

Auf gleiche Weise findet man auch

$$18 - 4x + 27y - 12z = P_2 = 0$$
$$2 - 6x - 12y + 15z = P_3 = 0$$

und sodann

$$x = \frac{25}{13} + \frac{87}{13} P_1 + \frac{44}{13} P_2 + \frac{70}{13} P_3$$
$$y = -\frac{2}{13} + \frac{44}{13} P_1 + 3 P_2 + \frac{36}{13} P_3$$
$$z = \frac{20}{39} + \frac{70}{13} P_1 + \frac{86}{13} P_2 + \frac{173}{39} P_3$$

daher

$$x = \frac{25}{13},\ y = -\frac{2}{13},\ z = \frac{20}{39}.$$

Die Gewichte dieser Bestimmungen sind der Reihe nach $\frac{13}{87}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{39}{137}$, und die Genauigkeiten verhalten sich wie $\sqrt{\frac{13}{87}} : \sqrt{\frac{1}{3}} : \sqrt{\frac{39}{173}} = 0,387 : 0\,577 : 0,423$, also daß y am genauesten bestimmt ist. Die Genauigkeiten von l_1 und x verhalten sich wie $\sqrt{1} : \sqrt{\frac{13}{87}} = 1000 : 387$, die Genauigkeiten von l_4 und x aber wie $\sqrt{144} : \sqrt{\frac{13}{87}} = 12 : 0,387 = 12000 : 387$ u. s. w. Dann findet man weiter $\triangle_1 = 0,2563$, $\triangle_2 = 0,0343$, $\triangle_3 = -0,0257$, $\triangle_4 = -0,0042$, also $\triangle_m = 0,023254$, und sodann $H = 4,4122$. Daher der wahrscheinliche Fehler der ersten Beobachtung $= 0,1081$, der der zweiten $= 0,0360$, der der dritten $= 0,0180$ und der der vierten $0,0090$. Endlich der wahrscheinliche Fehler von $x = 0,2794$, der von $y = 0,1437$, der von $z = 0,2275$.

§. 230.

Ein einfaches, aber für die practische Geometrie sehr wichtiges Beispiel bietet sich in der Ausgleichung der an einem Puncte gemessenen Winkel dar. Um die Sache an einem nicht zu verwickelten Falle zu erläutern, denke man sich, man sehe an dem Puncte K (Taf. IX., Fig. 9) die vier Richtpuncte ABCD, so sind offenbar alle möglichen Winkel bekannt, wenn die drei Winkel AB, BC, BD gemessen sind, allein um die Beobachtungen zu prüfen und die Fehler zweckmäßig zu vertheilen, mißt man die sämmtlichen hier möglichen Winkel, oder doch wenigstens so viele als thunlich ist, wenn die Zahl aller möglichen Winkel zu groß würde. (Wenn n die Zahl aller Richtobjecte ist, so sind im Ganzen $\frac{n\,(n-1)}{2}$ verschiedene Winkel möglich.)

Es sei nun gemessen worden:

$$\begin{array}{llll} AB = l_1 & \text{mit dem Gewichte} & q_1 \\ AC = l_2 & \text{„ „ „} & q_2 \\ AD = l_3 & \text{„ „ „} & q_3 \\ BC = l_4 & \text{„ „ „} & q_4 \\ BD = l_5 & \text{„ „ „} & q_5 \\ CD = l_6 & \text{„ „ „} & q_6 \end{array}$$

die wahren Werthe von AB, AC, AD aber seien x y z, so hat man folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} l_1 = x & l_4 = -x + y \\ l_2 = y & l_5 = -x + z \\ l_3 = z & l_6 = -y + z \end{array}$$

welche aber, wegen der Fehlerhaftigkeit der Beobachtungen, nicht alle 6 zugleich erfüllt werden können, vielmehr wird man durch die wahren Werthe von x y z folgende Fehler erhalten:

$$\begin{array}{ll} \triangle_1 = x - l_1 & \triangle_4 = -x + y - l_4 \\ \triangle_2 = y - l_2 & \triangle_5 = -x + z - l_5 \\ \triangle_3 = z - l_3 & \triangle_6 = -y + z - l_6 \end{array}$$

und nun wird man x, y, z so bestimmen, daß $\triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2 + \triangle_4^2 + \triangle_5^2 + \triangle_6^2$ ein Kleinstes wird, wenn alle Gewichte einander gleich sind. Sind aber die Gewichte ungleich, so muß $q_1 \triangle_1^2 + q_2 \triangle_2^2 + q_3 \triangle_3^2 + q_4 \triangle_4^2 + q_5 \triangle_5^2 + q_6 \triangle_6^2$ ein Kleinstes werden. Indem man aber

$q_1 (x - l_1)^2 + q_2 (y - l_2)^2 + q_3 (z - l_3)^2 + q_4 (-x + y - l_4)^2 + q_5 (-x + z - l_5)^2 + q_6 (-y + z - l_6)$ zu einem Kleinsten macht, hat man durch die Differentiirung nach x, y und nach z folgende Gleichungen:

$$(q_1 + q_4 + q_5)\, x - q_4\, y - q_5\, z - q_1\, l_1 + q_4\, l_4 + q_5\, l_5 = P_1 = 0$$

$$-q_4\, x + (q_2 + q_4 + q_6)\, y - q_6\, z - q_2\, l_2 - q_4\, l_4 + q_6\, l_6 = P_2 = 0$$

$$-q_5\, x - q_6\, y + (q_3 + q_5 + q_6)\, z - q_3\, l_3 - q_5\, l_5 - q_6\, l_6 = P_3 = 0$$

Hierbei setzen wir aber für die practische Rechnung bequemer $x = l_1 + \xi$, $y = l_2 + \eta$, $z = l_3 + \zeta$, so daß ξ, η, ζ nur kleine Größen sind. Wir bekommen dadurch:

$$(q_1 + q_4 + q_5)\,\xi - q_4\,\eta - q_5\,\zeta + q_4\,(l_1 + l_4 - l_2) + q_5\,(l_1 + l_5 - l_3) = P_1 = 0$$
$$-\,q_4\,\xi + (q_2 + q_4 + q_6)\,\eta - q_6\,\zeta - q_4\,(l_1 + l_4 - l_2) + q_6\,(l_2 + l_6 - l_3) = P_2 = 0$$
$$-\,q_5\,\xi - q_6\,\eta + (q_3 + q_5 + q_6)\,\zeta - q_5\,(l_1 + l_5 - l_3) - q_6\,(l_2 + l_6 - l_3) = P_3 = 0.$$

Man habe z. B. gefunden:

$l_1 = 21^{o}.\ 13'.\ 55'',73$ mit 20 Repetitionen
$l_2 = 55\ .\ 18\ .\ 21,\ 24$ „ 30 „
$l_3 = 87\ .\ 29\ .\ 25,\ 07$ „ 15 „
$l_4 = 34\ .\ 4\ .\ 23,\ 88$ „ 25 „
$l_5 = 66\ .\ 15\ .\ 32,\ 34$ „ 30 „
$l_6 = 32\ .\ 11\ .\ 1,\ 75$ „ 20 „

Da nach §. 224 die Gewichte den Repetitionszahlen proportional sind, so ist, wenn man das Gewicht q_1 von $l_1 = 1$ setzt, $q_2 = \frac{30}{20}$, $q_3 = \frac{15}{20}$, $q_4 = \frac{25}{20}$, $q_5 = \frac{30}{20}$, $q_6 = \frac{20}{20}$, woher die Gleichungen entstehen:

$$\tfrac{15}{4}\,\xi - \tfrac{5}{4}\,\eta - \tfrac{3}{2}\,\zeta + 2'',4625 = P_1 = 0$$
$$-\tfrac{5}{4}\,\xi + \tfrac{15}{4}\,\eta - \zeta - 0'',0425 = P_2 = 0$$
$$-\tfrac{3}{2}\,\xi - \eta + \tfrac{13}{4}\,\zeta - 2'',4200 = P_3 = 0$$

Hieraus erhält man:

$$\xi = -0,43242 + \tfrac{179}{395}P_1 + \tfrac{89}{395}P_2 + \tfrac{22}{79}P_3 = -0,432$$
$$\eta = 0,013658 + \tfrac{89}{395}P_1 + \tfrac{159}{395}P_2 + \tfrac{18}{79}P_3 = 0'',014$$
$$\zeta = 0'',54924 + \tfrac{22}{79}P_1 + \tfrac{18}{79}P_2 + \tfrac{40}{79}P_3 = 0'',549$$

und folglich

$$x = l_1 + \xi = 21^{o}.\ 13'.\ 55'',298$$
$$y = l_2 + \xi = 55\ .\ 18\ .\ 21,\ 254$$
$$z = l_3 + \zeta = 87\ .\ 29\ .\ 25,\ 619$$

und die Gewichte sind $\frac{395}{179}$ für x, $\frac{395}{159}$ für y, $\frac{79}{40}$ für z, also daß y am genauesten bestimmt ist.

§. 231.

Wir haben bei dem Problem der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen angenommen, daß die Gleichung für die gesuchten Größen (30) vom ersten Grade oder linear sei. Sehr häufig ist dieß nicht der Fall, dennoch aber lassen sich Aufgaben der Art auf die erklärte Weise zurückführen. Es sei die Größe L, welche man beobachtet, durch die Gleichung gegeben:

(50)

$$L = F\ (x_1;\ x_2;\ x_3\ \ldots\ldots\ x_p)$$

wo F eine Function von $x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ldots\ x_p$ und anderer Größen ist, die sich mit L ändern, so daß wir im Allgemeinen annehmen müssen, es sei F bei verschiedenen Werthen von L eine verschiedene Functionsform von $x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_p$. Man hat also folgende n Gleichungen:

(51)

$$L_1 = F_1\ (x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ldots\ x_p)$$
$$L_2 = F_2\ (x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ldots\ x_p)$$
$$L_3 = F_3\ (x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ldots\ x_p)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_n = F_n\ (x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ldots\ x_p)$$

und statt der wahren Werthe $L_1\ L_2\ L_3\ \ldots\ L_n$ hat man $l_1\ l_2\ l_3\ \ldots\ l_n$ beobachtet. Zuerst bestimmen wir die x näherungsweise, indem wir von den Gleichungen (51) p beliebige auslesen und statt der L die entsprechenden l setzen. Man setze, es sei $c_1\ c_2\ c_3\ \ldots\ \ldots\ c_p$ statt $x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_p$ gefunden worden.

Die wahren Werthe der x werden dann durch $c_1 + \xi_1$, $c_2 + \xi_2$, $c_3 + \xi_3\ \ldots\ c_p + \xi$ sich ausdrücken lassen, und es werden dabei die ξ sehr kleine Größen sein, die wir als Differentialien behandeln, d. h., bei welchen wir die Quadrate und die höheren Potenzen, desgleichen auch die Producte von verschiedenen ξ weglassen können. Nach dem Taylor'schen Lehrsatze haben wir dann aus

$$L_1 = F_1\ (c_1 + \xi_1,\ c_2 + \xi_2\ \ldots\ c_p + \xi_p)$$

die entwickelte Form:

$$L_1 = L'_1 + \left(\frac{dL_1}{dx_1}\right)\xi_1 + \left(\frac{dL_1}{dx_2}\right)\xi_2 \pm \left(\frac{dL_1}{dx_3}\right)\xi_3 \ldots\ldots\ldots + \left(\frac{dL_1}{dx_p}\right)\xi_p,$$

wenn wir nämlich $F_1\ (c_1\ c_2\ c_3\ \ldots\ c_p)$ mit L'_1 bezeichnen. Die Werthe der Differentialquotienten $\left(\frac{dL_1}{dx_1}\right)$ u. s. w. erhalten wir, wenn wir überall statt der x die c setzen. Auf gleiche Weise wird

$$L_2 = L'_2 + \left(\frac{dL_2}{dx_1}\right)\xi_1 + \left(\frac{dL_2}{dx_2}\right)\xi_2 \ldots + \left(\frac{dL_2}{dx_p}\right)\xi_p$$

u. s. w.

Bezeichnet man also die Differentialquotienten

$$\begin{array}{lllll}
\left(\frac{dL_1}{dx_1}\right), & \left(\frac{dL_1}{dx_2}\right), & \left(\frac{dL_1}{dx_3}\right) & \ldots\ldots & \left(\frac{dL_1}{dx_p}\right) \\
\left(\frac{dL_2}{dx_1}\right), & \left(\frac{dL_2}{dx_2}\right), & \left(\frac{dL_2}{dx_3}\right) & \ldots\ldots & \left(\frac{dL_2}{dx_p}\right) \\
\left(\frac{dL_3}{dx_1}\right), & \left(\frac{dL_3}{dx_2}\right), & \left(\frac{dL_3}{dx_3}\right) & \ldots\ldots & \left(\frac{dL_3}{dx_p}\right) \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\left(\frac{dL_n}{dx_1}\right), & \left(\frac{dL_n}{dx_2}\right), & \left(\frac{dL_n}{dx_3}\right) & \ldots\ldots & \left(\frac{dL_n}{dx_p}\right)
\end{array}$$

der Reihe nach mit $\overset{1}{a}_1\ \overset{1}{a}_2\ \overset{1}{a}_3 \ldots\ldots \overset{1}{a}_p;\ \overset{2}{a}_1\ \overset{2}{a}_2\ \overset{2}{a}_3 \ldots \ldots \overset{2}{a}_p;\ \overset{3}{a}_1\ \overset{3}{a}_2\ \overset{3}{a}_3 \ldots\ldots \overset{3}{a}_p \ldots\ldots \overset{n}{a}_1\ \overset{n}{a}_2\ \overset{n}{a}_3 \ldots\ldots \overset{n}{a}_p$, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{l}
L_1 = L'_1 + \overset{1}{a}_1\,\xi_1 + \overset{1}{a}_2\,\xi_2 + \overset{1}{a}_3\,\xi_3 \ldots\ldots + \overset{1}{a}_p\,\xi_p \\
L_2 = L'_2 + \overset{2}{a}_1\,\xi_1 + \overset{2}{a}_2\,\xi_2 + \overset{2}{a}_3\,\xi_3 \ldots\ldots + \overset{2}{a}_p\,\xi_p \\
L_3 = L'_3 + \overset{3}{a}_1\,\xi_1 + \overset{3}{a}_2\,\xi_2 + \overset{3}{a}_3\,\xi_3 \ldots\ldots + \overset{3}{a}_p\,\xi_p \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
L_n = L'_n + \overset{n}{a}_1\,\xi_1 + \overset{n}{a}_2\,\xi_2 + \overset{n}{a}_3\,\xi_3 \ldots\ldots + \overset{n}{a}_p\,\xi_p
\end{array}$$

Da wir aber nun statt der wahren Werthe der L die beobachteten l setzen müssen, so bekommen wir:

(52)

$$\begin{array}{l}
l_1 - L'_1 = \overset{1}{a}_1\,\xi_1 + \overset{1}{a}_2\,\xi_2 + \overset{1}{a}_3\,\xi_3 \ldots\ldots + \overset{1}{a}_p\,\xi_p \\
l_2 - L'_2 = \overset{2}{a}_1\,\xi_1 + \overset{2}{a}_2\,\xi_2 + \overset{2}{a}_3\,\xi_3 \ldots\ldots + \overset{2}{a}_p\,\xi_p \\
l_3 - L'_3 = \overset{3}{a}_1\,\xi_1 + \overset{3}{a}_2\,\xi_2 + \overset{3}{a}_3\,\xi_3 \ldots\ldots + \overset{3}{a}_p\,\xi_p \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
l_n - L'_n = \overset{n}{a}_1\,\xi_1 + \overset{n}{a}_2\,\xi_2 + \overset{n}{a}_3\,\xi_3 \ldots\ldots + \overset{n}{a}_p\,\xi_p
\end{array}$$

aus welchen Gleichungen man die ξ ebenso findet, wie aus denen in (31) die x. Addirt man dann jedes ξ zu dem gleichzähligen c, so bekommt man die verlangten x.

§. 232.

Die Ausgleichung solcher beobachteten Größen, die durch gewisse Bedingungen mit einander verknüpft sind,

ist das der practischen Geometrie eigenthümliche Gebiet der Anwendung der Ausgleichungsrechnung. Hat man die Größen O_1 O_2 O_3 . . . . O_n durch Beobachtung ermittelt und dafür die Werthe o_1 o_2 o_3 . . . . o_n gefunden, so sind

$\triangle_1 = O_1 - o_1$; $\triangle_2 = O_2 - o_2$ .... $\triangle_n = O_n - o_n$ die Beobachtungsfehler. Ist dann h der Modulus derjenigen Reihe, aus welcher die Beobachtung o_1 gegriffen ist, und sind q_1 q_2 q_3 . . . . q_n die Gewichte der Beobachtungen, so hat man unter der Voraussetzung, daß $q_1 = 1$ und

(53)

$$S = q_1 \triangle_1^2 + q_2 \triangle_2^2 + q_3 \triangle_3^2 + \ldots q_n \triangle_n^2$$

die Wahrscheinlichkeit der Fehlerreihe $\triangle_1$ $\triangle_2$ $\triangle_3$ . . . . . . $\triangle_n$ =

(54)

$$W = \frac{\mu^n h^n \sqrt{q_1\, q_2\, q_3 \ldots\ldots q_n}}{(\sqrt{\pi})^n}\, e^{-h^2 S}$$

Um die O zu bestimmen, wird man wiederum W zu einem Größten, also S zu einem Kleinsten zu machen haben. Deßhalb muß das vollständige Differential von S = 0 werden, und da nun S eine Function aller O ist, so muß man haben:

(55)

$$0 = \left(\frac{dS}{dO_1}\right) dO_1 + \left(\frac{dS}{dO_2}\right) dO_2 + \left(\frac{dS}{dO_3}\right) dO_3 \ldots \ldots\ldots + \left(\frac{dS}{dO_n}\right) dO_n.$$

Sind nun die O von einander unabhängig, so kann dieser Differentialausdruck nicht anders 0 werden, als wenn jedes einzelne Glied = 0 wird, so daß man also hat,

$$\left(\frac{dS}{dO_1}\right) = \left(\frac{dS}{dO_2}\right) = \left(\frac{dS}{dO_3}\right) = \ldots \left(\frac{dS}{dO_n}\right) = 0.$$

Da nun

$$S = q_1 (O_1 - o_1)^2 + q_2 (O_2 - o_2)^2 \ldots + q_n (O_n - o_n)^2$$

Bezeichnet man also die Differentialquotienten

$$\begin{array}{lllll}
\left(\frac{dL_1}{dx_1}\right), & \left(\frac{dL_1}{dx_2}\right), & \left(\frac{dL_1}{dx_3}\right) & \ldots\ldots & \left(\frac{dL_1}{dx_p}\right) \\
\left(\frac{dL_2}{dx_1}\right), & \left(\frac{dL_2}{dx_2}\right), & \left(\frac{dL_2}{dx_3}\right) & \ldots\ldots & \left(\frac{dL_2}{dx_p}\right) \\
\left(\frac{dL_3}{dx_1}\right), & \left(\frac{dL_3}{dx_2}\right), & \left(\frac{dL_3}{dx_3}\right) & \ldots\ldots & \left(\frac{dL_3}{dx_p}\right) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\left(\frac{dL_n}{dx_1}\right), & \left(\frac{dL_n}{dx_2}\right), & \left(\frac{dL_n}{dx_3}\right) & \ldots\ldots & \left(\frac{dL_n}{dx_p}\right)
\end{array}$$

der Reihe nach mit $\overset{1}{a}_1\ \overset{1}{a}_2\ \overset{1}{a}_3 \ldots\ldots \overset{1}{a}_p;\ \overset{2}{a}_1\ \overset{2}{a}_2\ \overset{2}{a}_3 \ldots \ldots \overset{2}{a}_p;\ \overset{3}{a}_1\ \overset{3}{a}_2\ \overset{3}{a}_3 \ldots\ldots \overset{3}{a}_p \ldots\ldots \overset{n}{a}_1\ \overset{n}{a}_2\ \overset{n}{a}_3 \ldots\ldots \overset{n}{a}_p$, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{l}
L_1 = L'_1 + \overset{1}{a}_1\,\xi_1 + \overset{1}{a}_2\,\xi_2 + \overset{1}{a}_3\,\xi_3 \ldots\ldots + \overset{1}{a}_p\,\xi_p \\
L_2 = L'_2 + \overset{2}{a}_1\,\xi_1 + \overset{2}{a}_2\,\xi_2 + \overset{2}{a}_3\,\xi_3 \ldots\ldots + \overset{2}{a}_p\,\xi_p \\
L_3 = L'_3 + \overset{3}{a}_1\,\xi_1 + \overset{3}{a}_2\,\xi_2 + \overset{3}{a}_3\,\xi_3 \ldots\ldots + \overset{3}{a}_p\,\xi_p \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
L_n = L'_n + \overset{n}{a}_1\,\xi_1 + \overset{n}{a}_2\,\xi_2 + \overset{n}{a}_3\,\xi_3 \ldots\ldots + \overset{n}{a}_p\,\xi_p
\end{array}$$

Da wir aber nun statt der wahren Werthe der L die beobachteten l setzen müssen, so bekommen wir:

(52)

$$\begin{array}{l}
l_1 - L'_1 = \overset{1}{a}_1\,\xi_1 + \overset{1}{a}_2\,\xi_2 + \overset{1}{a}_3\,\xi_3 \ldots\ldots + \overset{1}{a}_p\,\xi_p \\
l_2 - L'_2 = \overset{2}{a}_1\,\xi_1 + \overset{2}{a}_2\,\xi_2 + \overset{2}{a}_3\,\xi_3 \ldots\ldots + \overset{2}{a}_p\,\xi_p \\
l_3 - L'_3 = \overset{3}{a}_1\,\xi_1 + \overset{3}{a}_2\,\xi_2 + \overset{3}{a}_3\,\xi_3 \ldots\ldots + \overset{3}{a}_p\,\xi_p \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
l_n - L'_n = \overset{n}{a}_1\,\xi_1 + \overset{n}{a}_2\,\xi_2 + \overset{n}{a}_3\,\xi_3 \ldots\ldots + \overset{n}{a}_p\,\xi_p
\end{array}$$

aus welchen Gleichungen man die ξ ebenso findet, wie aus denen in (31) die x. Addirt man dann jedes ξ zu dem gleichzähligen c, so bekommt man die verlangten x.

§. 232.

Die Ausgleichung solcher beobachteten Größen, die durch gewisse Bedingungen mit einander verknüpft sind,

ist das der practischen Geometrie eigenthümliche Gebiet der Anwendung der Ausgleichungsrechnung. Hat man die Größen O_1 O_2 O_3 . . . . O_n durch Beobachtung ermittelt und dafür die Werthe o_1 o_2 o_3 . . . . o_n gefunden, so sind

$\triangle_1 = O_1 - o_1$; $\triangle_2 = O_2 - o_2$ .... $\triangle_n = O_n - o_n$

die Beobachtungsfehler. Ist dann h der Modulus derjenigen Reihe, aus welcher die Beobachtung o_1 gegriffen ist, und sind q_1 q_2 q_3 . . . . q_n die Gewichte der Beobachtungen, so hat man unter der Voraussetzung, daß $q_1 = 1$ und

(53)

$$S = q_1 \triangle_1^2 + q_2 \triangle_2^2 + q_3 \triangle_3^2 + \ldots . q_n \triangle_n^2$$

die Wahrscheinlichkeit der Fehlerreihe $\triangle_1$ $\triangle_2$ $\triangle_3$ . . . . . . $\triangle_n$ =

(54)

$$W = \frac{\mu^n h^n \sqrt{q_1 \, q_2 \, q_3 \cdot \cdot \cdot \cdot q_n}}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2 S}$$

Um die O zu bestimmen, wird man wiederum W zu einem Größten, also S zu einem Kleinsten zu machen haben. Deßhalb muß das vollständige Differential von S = 0 werden, und da nun S eine Function aller O ist, so muß man haben:

(55)

$$0 = \left(\frac{dS}{dO_1}\right) dO_1 + \left(\frac{dS}{dO_2}\right) dO_2 + \left(\frac{dS}{dO_3}\right) dO_3 \ldots$$
$$\ldots\ldots + \left(\frac{dS}{dO_n}\right) dO_n.$$

Sind nun die O von einander unabhängig, so kann dieser Differentialausdruck nicht anders 0 werden, als wenn jedes einzelne Glied = 0 wird, so daß man also hat,

$$\left(\frac{dS}{dO_1}\right) = \left(\frac{dS}{dO_2}\right) = \left(\frac{dS}{dO_3}\right) = \ldots \left(\frac{dS}{dO_n}\right) = 0.$$

Da nun

$$S = q_1 (O_1 - o_1)^2 + q_2 (O_2 - o_2)^2 \ldots . + q_n (O_n - o_n)^2 .$$

so ist

$$\left(\frac{dS}{dO_1}\right) = 2 q_1 (O_1 - o_1) = 0$$

woraus $O_1 = o_1$ folgt. Ebenso folgt $O_2 = o_2$ u. s. w., d. h., es können die O, wenn sie von einander unabhängig sind, nicht genauer bestimmt werden, als sie beobachtet wurden, ein Satz der auch ohne Rechnung einleuchtet, da die Beobachtungen, wie fehlerhaft sie auch sind, einander doch nicht widersprechen.

§. 233.

Aber anders verhält sich die Sache, wenn die O durch gewisse Bedingungen unter einander verknüpft sind. Diese Bedingungen, welchen durchaus entsprochen werden muß, da sie unabweisbare theoretische Anforderungen enthalten, werden sich im Allgemeinen durch Gleichungen ausdrücken lassen, in welche die Größen O_1 O_2 O_3 ... ... O_n verflochten sind. Um die Sache durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, stelle man sich vor, die n verschiedenen O seien Winkel, die unter dem Gesetze stehen, daß ihre Summe eine constante theoretisch bestimmte Größe A sein muß, nämlich:

$$O_1 + O_2 + O_3 \ldots\ldots + O_n = A,$$

so hat man die O so zu bestimmen, daß zwar S ein Kleinstes wird, aber dieses Kleinste ist nicht das absolute, sondern ein bedingtes dadurch, daß nur solche O zulässig sind, wodurch $O_1 + O_2 + O_3 \ldots\ldots + O_n = A$ wird. Es findet also unter den O eine gewisse Abhängigkeit Statt, und man darf dem zu Folge nicht ohne Weiteres jeden Differentialquotienten in (55) $= 0$ setzen. Man hat vielmehr

$$O_n = A - O_1 - O_2 - O_3 \ldots\ldots - O_{n-1}$$

und erst, wenn man diesen Werth von O_n in S eingesetzt hat, darf man alle O als von einander unabhängig ansehen und jeden Differentialquotienten des $S = 0$ setzen. Man hat nämlich jetzt:

$$S = q_1 (O_1 - o_1)^2 + q_2 (O_2 - o_2)^2 \ldots\ldots + q_{n-1} (O_{n-1} - o_{n-1})^2 + q_n (A - O_1 - O_2 - O_3 \ldots \ldots - O_{n-1} - o_n)^2$$

also wenn man nach O_1 differentiirt: $\frac{1}{2}\left(\frac{dS}{dO_1}\right) =$

$$0 = q_1 (O_1 - o_1) - q_n (A - O_1 - O_2 - .. .. - O_{n-1} - o_n)$$

d. i.

$$0 = q_1 (O_1 - o_1) - q_n (O_n - o_n)$$

oder

$$0 = q_1 \triangle_1 - q_n \triangle_n$$
$$q_1 \triangle_1 = q_n \triangle_n.$$

Ebenso auch

$$q_2 \triangle_2 = q_n \triangle_n$$
$$q_3 \triangle_3 = q_n \triangle_n$$

u. s. w.

also $q_1 \triangle_1 = q_2 \triangle_2 = q_3 \triangle_3 \ldots\ldots = q_n \triangle_n$, d. h., die an den O anzubringenden Verbesserungen $\triangle_1$ $\triangle_2$ $\triangle_3$ . . . $\triangle_n$ sind im umgekehrten Verhältnisse der Gewichte. Dazu läßt sich nun noch die Summe aller $\triangle$ finden, denn da

$$A = O_1 + O_2 + O_3 \ldots\ldots + O_n$$

so ist

$$A - o_1 - o_2 - o_3 \ldots\ldots - o_n$$
$$= O_1 - o_1 + O_2 - o_2 + O_3 - o_3 \ldots + O_n - o_n$$
$$= \triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3 \ldots\ldots + \triangle_n,$$

und wenn man nun die bekannte Größe $A - o_1 - o_2 - o_3 \ldots\ldots - o_n$ mit D bezeichnet, so ist auch

$$\triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3 \ldots\ldots + \triangle_n = D.$$

Man findet also $\triangle_1$ $\triangle_2$ $\triangle_3$ . . . . $\triangle_n$, wenn man D im umgekehrten Verhältniß der Gewichte repartirt. Sind daher die Gewichte einander gleich, so ist $\triangle_1 = \triangle_2 = \triangle_3 \ldots\ldots = \triangle_n = \frac{D}{n}$, und alle Winkel erhalten demnach gleiche Verbesserung.

Wie dieses seine Anwendung findet, wenn die sämmtlichen Winkel um einen Punct oder die Winkel eines Dreiecks oder Polygons gemessen sind und die Summe mit der theoretisch nothwendigen A nicht zutrifft, ergiebt sich von selbst.

§. 234.

Um die Sache allgemeiner zu machen, so seien die p Bedingungsgleichungen, denen die O genügen müssen:

(56)

$$X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0\ \ldots\ldots\ X_p = 0,$$

wobei vorausgesetzt werden muß, daß p immer kleiner als die Zahl n der beobachteten O ist. Denn wäre $p = n$, so wären die sämmtlichen O theoretisch bestimmte Größen und brauchten daher nicht beobachtet zu werden. Daher kann auch p nicht $>$ n sein.

Setzt man an die Stelle der $O_1\ O_2\ O_3\ \ldots\ O_n$ deren beobachtete Werthe $o_1\ o_2\ o_3\ \ldots\ldots\ o_n$, so könnte es allerdings sich zutragen, daß die Gleichungen (56) sämmtlich erfüllt würden; wir hätten dann auch an unseren Beobachtungen nichts weiter zu bessern, sondern müßten sie sofort als richtig annehmen. Im Allgemeinen werden jedoch jene Gleichungen durch die beobachteten $o_1\ o_2\ o_3\ \ldots\ldots\ o_n$ nicht erfüllt werden, sondern man wird erhalten:

$$X_1 = \delta_1;\ X_2 = \delta_2;\ X_3 = \delta_3\ \ldots\ldots\ X_p = \delta_p.$$

Sind nun $\triangle_1\ \triangle_2\ \triangle_3\ \ldots\ldots\ \triangle_n$ die Fehler der Beobachtungen, d. h. im Allgemeinen die Abweichungen der beobachteten o von einer Reihe solcher O, welche den Gleichungen (56) genügen, so hat man $o_1 - \triangle_1$; $o_2 - \triangle_2$; $o_3 - \triangle_3\ \ldots\ldots\ o_n - \triangle_n$ an die Stelle von $O_1\ O_2\ O_3\ \ldots\ldots\ O_n$ zu setzen, wenn die Gleichungen (56) erfüllt werden sollen. Behandelt man die $\triangle$, ihrer Kleinheit wegen, durch Weglassung ihrer höheren Potenzen und Producte, als Differentialien, so giebt der Taylor'sche Lehrsatz:

$$0 = X_1 + \left(\frac{dX_1}{dO_1}\right)\triangle_1 + \left(\frac{dX_1}{dO_2}\right)\triangle_2 \ldots + \left(\frac{dX_1}{dO_n}\right)\triangle_n$$

$$0 = X_2 + \left(\frac{dX_2}{dO_1}\right)\triangle_1 + \left(\frac{dX_2}{dO_2}\right)\triangle_2 \ldots + \left(\frac{dX_2}{dO_p}\right)\triangle_n$$

$$0 = X_3 + \left(\frac{dX_3}{dO_1}\right)\triangle_1 + \left(\frac{dX_3}{dO_2}\right)\triangle_2 \ldots + \left(\frac{dX_3}{dO_n}\right)\triangle_n$$

. . . .

$$0 = X_p + \left(\frac{dX_p}{dO_1}\right)\triangle_1 + \left(\frac{dX_p}{dO_2}\right)\triangle_2 \ldots + \left(\frac{dX_p}{dO_n}\right)\triangle_n$$

wo man $X_1\ X_2\ X_3 \ldots X_p$ und in den Differentialquotienten dieser Gleichungen allenthalben die beobachteten $o_1\ o_2\ o_3 \ldots o_n$ statt $O_1\ O_2\ O_3 \ldots O_n$ zu setzen hat. Bezeichnet man also

$$\begin{matrix} \left(\frac{dX_1}{dO_1}\right) & \left(\frac{dX_1}{dO_2}\right) & \left(\frac{dX_1}{dO_3}\right) & \ldots\ldots & \left(\frac{dX_1}{dO_n}\right) \\ \left(\frac{dX_2}{dO_1}\right) & \left(\frac{dX_2}{dO_2}\right) & \left(\frac{dX_2}{dO_3}\right) & \ldots\ldots & \left(\frac{dX_2}{dO_n}\right) \\ \left(\frac{dX_3}{dO_1}\right) & \left(\frac{dX_3}{dO_2}\right) & \left(\frac{dX_3}{dO_3}\right) & \ldots\ldots & \left(\frac{dX_3}{dO_n}\right) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \left(\frac{dX_p}{dO_1}\right) & \left(\frac{dX_p}{dO_2}\right) & \left(\frac{dX_p}{dO_3}\right) & \ldots\ldots & \left(\frac{dX_p}{dO_n}\right) \end{matrix}$$

der Reihe nach mit

$$\overset{1}{a}_1\ \overset{1}{a}_2\ \overset{1}{a}_3 \ldots \overset{1}{a}_n;\ \overset{2}{a}_1\ \overset{2}{a}_2\ \overset{2}{a}_3 \ldots \overset{2}{a}_n;\ \overset{3}{a}_1\ \overset{3}{a}_2\ \overset{3}{a}_3 \ldots \overset{3}{a}_n$$
$$\ldots \overset{p}{a}_1\ \overset{p}{a}_2\ \overset{p}{a}_3 \ldots \overset{p}{a}_n,$$

so bekommt man folgende Gleichungen:

(57)

$$0 = \delta_1 + \overset{1}{a}_1\triangle_1 + \overset{1}{a}_2\triangle_2 + \overset{1}{a}_3\triangle_3 \ldots + \overset{1}{a}_n\triangle_n$$
$$0 = \delta_1 + \overset{2}{a}_1\triangle_1 + \overset{2}{a}_2\triangle_2 + \overset{2}{a}_3\triangle_3 \ldots + \overset{2}{a}_n\triangle_n$$
$$0 = \delta_2 + \overset{3}{a}_1\triangle_1 + \overset{3}{a}_2\triangle_2 + \overset{3}{a}_3\triangle_3 \ldots + \overset{3}{a}_n\triangle_n$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$0 = \delta_p + \overset{p}{a}_1\triangle_1 + \overset{p}{a}_2\triangle_2 + \overset{p}{a}_3\triangle_3 \ldots + \overset{p}{a}_n\triangle_n,$$

welche gegen die in (56) den Vortheil haben, daß sie linear sind. Aus ihnen folgt noch durch Differentiirung:

(58)

$$0 = \overset{1}{a}_1 \cdot d\triangle_1 + \overset{1}{a}_2 \cdot d\triangle_2 + \overset{1}{a}_3 \cdot d\triangle_3 \ldots + \overset{1}{a}_n \cdot d\triangle_n$$

$$0 = \overset{2}{a}_1 \cdot d\triangle_1 + \overset{2}{a}_2 \cdot d\triangle_2 + \overset{2}{a}_3 \cdot d\triangle_3 \ldots\ldots + \overset{2}{a}_n \cdot d\triangle_n$$

$$0 = \overset{3}{a}_1 \cdot d\triangle_1 + \overset{3}{a}_2 \cdot d\triangle_2 + \overset{3}{a}_3 \cdot d\triangle_3 \ldots\ldots + \overset{3}{a}_n \cdot d\triangle_n$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$0 = \overset{p}{a}_1 \cdot d\triangle_1 + \overset{p}{a}_2 \cdot d\triangle_2 + \overset{p}{a}_3 \cdot d\triangle_3 \ldots\ldots + \overset{p}{a}_n \cdot d\triangle_n$$

Um nun die wahrscheinlichsten Werthe der O zu erhalten, muß S ein Kleinstes und folglich $d\,S =$

(59)

$$0 = q_1 \triangle_1 \cdot d\triangle_1 + q_2 \triangle_2 \cdot d\triangle_2 + q_3 \triangle_3 \cdot d\triangle_3 \ldots\ldots + q_n \triangle_n \cdot d\triangle_n$$

werden. Der Grundgedanke für die Elimination der $\triangle$ bleibt nun eben der im vorigen § angegebene; wir müssen aus den Gleichungen (57) p beliebige $\triangle$ durch die übrigen bestimmen, ihre Werthe in (59) einsetzen und dann den Coefficienten jedes noch übrigen $d\triangle = 0$ machen. Diesen Gedanken führen wir aber auf folgende leichtere Weise aus. Multiplicirt man die Gleichungen (58) der Reihe nach mit den beliebigen Factoren k_1 k_2 $k_3 \ldots\ldots k_p$ und subtrahirt die Producte von (59), so bekommt man:

$$\begin{aligned} 0 = &\left(q_1 \triangle_1 - \overset{1}{a}_1 k_1 - \overset{2}{a}_1 k_2 - \overset{3}{a}_1 k_3 \ldots - \overset{p}{a}_1 k_p\right) \cdot d\triangle_1 \\ &+ \left(q_2 \triangle_2 - \overset{1}{a}_2 k_1 - \overset{2}{a}_2 k_2 - \overset{3}{a}_2 k_3 \ldots - \overset{p}{a}_2 k_p\right) \cdot d\triangle_2 \\ &+ \left(q_3 \triangle_3 - \overset{1}{a}_3 k_1 - \overset{2}{a}_3 k_2 - \overset{3}{a}_3 k_3 \ldots - \overset{p}{a}_3 k_p\right) \cdot d\triangle_3 \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &+ \left(q_n \triangle_n - \overset{1}{a}_n k_1 - \overset{2}{a}_p k_2 - \overset{3}{a}_n k_3 \ldots - \overset{p}{a}_n k_p\right) \cdot d\triangle_n \end{aligned}$$

und in dieser Gleichung sind von den $d\triangle$ ihrer $n - p$ ganz willkührlich, während die übrigen p von jenen abhängig sind. Nun sind aber auch die k ganz willkührlich und können demnach so bestimmt werden, daß die Coefficienten der p von den $d\triangle$, die man, als von den übrigen abhängig sich vorstellt, verschwinden. Da aber auch die Coefficienten der unabhängigen $d\triangle$ verschwinden müssen, so erhält man alsobald folgende Gleichungen:

(60)

$$
\begin{aligned}
q_1 \triangle_1 &= \overset{1}{a}_1 k_1 + \overset{2}{a}_1 k_2 + \overset{3}{a}_1 k_3 \; . \; . \; . \; . + \overset{p}{a}_1 k_p \\
q_2 \triangle_2 &= \overset{1}{a}_2 k_1 + \overset{2}{a}_2 k_2 + \overset{3}{a}_2 k_3 \; . \; . \; . \; . + \overset{p}{a}_2 k_p \\
q_3 \triangle_3 &= \overset{1}{a}_3 k_1 + \overset{2}{a}_3 k_2 + \overset{3}{a}_3 k_3 \; . \; . \; . \; . + \overset{p}{a}_3 k_p \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
q_n \triangle_n &= \overset{1}{a}_n k_1 + \overset{2}{a}_n k_2 + \overset{3}{a}_n k_3 \; . \; . \; . \; . + \overset{p}{a}_n k_p
\end{aligned}
$$

woraus man die △ berechnen kann, sobald die k bekannt sind. Um diese zu erhalten, setze man die Werthe der △ aus (60) in die Gleichung (57) und bezeichne nach der schon erklärten Weise:

$$
\frac{\overset{r}{a}_1 \overset{p}{a}_1}{q_1} + \frac{\overset{r}{a}_2 \overset{p}{a}_2}{q_2} + \frac{\overset{r}{a}_3 \overset{p}{a}_3}{q_3} \; . \; . \; . \; . + \frac{\overset{r}{a}_n \overset{p}{a}_n}{q_n} \quad \text{mit} \quad \left[\frac{\overset{r}{a}_n \overset{p}{a}_n}{q^n}\right],
$$

so bekommt man folgende Ausdrücke zur Bestimmuug der k:

(61)

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta_1 + \left[\frac{\overset{1}{a}_n \overset{1}{a}_n}{q_n}\right] k_1 + \left[\frac{\overset{1}{a}_n \overset{2}{a}_n}{q_n}\right] k_2 \ldots . + \left[\frac{\overset{1}{a}_n \overset{p}{a}_n}{q_n}\right] k_p \\
0 &= \delta_2 + \left[\frac{\overset{2}{a}_n \overset{1}{a}_n}{q_n}\right] k_1 + \left[\frac{\overset{2}{a}_n \overset{2}{a}_n}{q_n}\right] k_2 \ldots . + \left[\frac{\overset{2}{a}_n \overset{p}{a}_n}{q_n}\right] k_p \\
0 &= \delta_3 + \left[\frac{\overset{3}{a}_n \overset{1}{a}_n}{q_n}\right] k_1 + \left[\frac{\overset{3}{a}_n \overset{2}{a}_n}{q_n}\right] k_2 \ldots . + \left[\frac{\overset{3}{a}_n \overset{p}{a}_n}{q_n}\right] k_p \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= \delta_p + \left[\frac{\overset{p}{a}_n \overset{1}{a}_n}{q_n}\right] k_1 + \left[\frac{\overset{p}{a}_n \overset{2}{a}_n}{q_n}\right] k_2 \ldots . + \left[\frac{\overset{p}{a}_n \overset{p}{a}_n}{q_n}\right] k_p .
\end{aligned}
$$

§. 235.

Es wird nicht unpassend sein, diese Rechnung durch ein einfaches Beispiel zu erläutern. Wir wollen deßhalb annehmen, man habe die drei Winkel **A**, **B**, **C** eines Dreiecks und zwei Seiten **a** und **b** desselben gemessen. Es sei gefunden worden:

$$o_1 = A = 43^\circ.\ 15'.\ 23''$$
$$o_2 = B = 57\ .\ 11\ .\ 53$$
$$o_3 = C = 79\ .\ 32\ .\ 58$$
$$180\ .\ 0\ .\ 14''$$

$$o_4 = a = 7583{,}9 \text{ Fuß}$$
$$o_5 = b = 9306{,}9 \text{ ,,}$$

Diese Größen sind den Bedingungen unterworfen, daß

$$A + B + C - 180^\circ = 0$$
$$a \sin B - b \sin A = 0$$

oder wenn die früheren Bezeichnungen gebraucht werden:

$$X_1 = O_1 + O_2 + O_3 - 180^\circ = 0$$
$$X_2 = O_4 \sin O_2 - O_5 \sin O_1 = 0.$$

Setzt man statt der O die o, so bekommt man:

$$X_1 = \delta_1 = +\ 14''$$
$$X_2 = \delta_2 = -\ 3{,}052 \text{ Fuß}.$$

Alsdann $\left(\frac{dX_1}{dO_1}\right) = \overset{1}{a}_1 = 1, \left(\frac{dX_1}{dO_2}\right) = \overset{1}{a}_2 = 1,$

$$\left(\frac{dX_1}{dO_3}\right) = \overset{1}{a}_3 = 1, \left(\frac{dX_1}{dO_4}\right) = \left(\frac{dX_1}{dO_5}\right) = \overset{1}{a}_4 = \overset{1}{a}_5 = 0.$$

Ferner:

$$\left(\frac{dX_2}{dO_1}\right) = \overset{2}{a}_1 = -\ O_5 \cos O_1 \sin 1'' = -\ 0{,}03286146\text{*)}$$
$$\left(\frac{dX_2}{dO_2}\right) = \overset{2}{a}_2 = O_4 \cos O_2 \sin 1'' = 0{,}01991846$$
$$\left(\frac{dX_2}{dO_3}\right) = \overset{2}{a}_3 = 0$$
$$\left(\frac{dX_2}{dO_4}\right) = \overset{2}{a}_4 = \sin O_2 = 0{,}8405480$$
$$\left(\frac{dX_2}{dO_5}\right) = \overset{2}{a}_5 = -\ \sin O_1 = -\ 0{,}6852643.$$

---

*) Es ist d . sin x = cos x . dx, wenn x in Theilen des Halbmessers ausgedrückt ist. Ist aber x und folglich auch dx in Secunden gegeben, so hat man d . sin x = cos x . dx sin 1'', und diese Formel muß hier gebraucht werden.

Hieraus bildet man nach (61) folgende Gleichungen:

$$0=\delta_1+\left(\frac{\overset{1}{a}_1\overset{1}{a}_1}{q_1}+\frac{\overset{1}{a}_2\overset{1}{a}_2}{q_2}+\frac{\overset{1}{a}_3\overset{1}{a}_3}{q_3}+\frac{\overset{1}{a}_4\overset{1}{a}_4}{q_4}+\frac{\overset{1}{a}_5\overset{1}{a}_5}{q_5}\right)k_1$$
$$+\left(\frac{\overset{1}{a}_1\overset{2}{a}_1}{q_1}+\frac{\overset{1}{a}_2\overset{2}{a}_2}{q_2}+\frac{\overset{1}{a}_3\overset{2}{a}_3}{q_3}+\frac{\overset{1}{a}_4\overset{2}{a}_4}{q_4}+\frac{\overset{1}{a}_5\overset{2}{a}_5}{q_5}\right)k_2$$
$$0=\delta_2+\left(\frac{\overset{2}{a}_1\overset{1}{a}_1}{q_1}+\frac{\overset{2}{a}_2\overset{1}{a}_2}{q_2}+\frac{\overset{2}{a}_3\overset{1}{a}_3}{q_3}+\frac{\overset{2}{a}_4\overset{1}{a}_4}{q_4}+\frac{\overset{2}{a}_5\overset{1}{a}_5}{q_5}\right)k_1$$
$$+\left(\frac{\overset{2}{a}_1\overset{2}{a}_1}{q_1}+\frac{\overset{2}{a}_2\overset{2}{a}_2}{q_2}+\frac{\overset{2}{a}_3\overset{2}{a}_3}{q_3}+\frac{\overset{2}{a}_4\overset{2}{a}_4}{q_4}+\frac{\overset{2}{a}_5\overset{2}{a}_5}{q_5}\right)k_2.$$

Nehmen wir die Gewichte von O_1 O_2 O_3 gleich groß an, so müssen wir sie $= 1$ setzen, weil das von $O_1 = 1$ vorausgesetzt ist. Setzen wir ferner die Gewichte von O_4 und $O_5 = \frac{1}{100}$, so findet sich:

$$0 = 14 + 3\,k_1 - 0{,}01294300\,k_2$$
$$0 = -3{,}052 - 0{,}01294300\,k_1 + 117{,}61220\,k_2$$

und daher

$$k_1 = -4{,}666557$$
$$k_2 = 0{,}02543615.$$

Sodann nach (60):

$$q_1\,\Delta_1 = \overset{1}{a}_1\,k_1 + \overset{2}{a}_1\,k_2,\quad \Delta_1 = -4'',667$$
$$q_2\,\Delta_2 = \overset{1}{a}_2\,k_1 + \overset{2}{a}_2\,k_2,\quad \Delta_2 = -4{,}666$$
$$q_3\,\Delta_3 = \overset{1}{a}_3\,k_1 + \overset{2}{a}_3\,k_2,\quad \Delta_3 = -4{,}666$$
$$q_4\,\Delta_4 = \overset{1}{a}_4\,k_1 + \overset{2}{a}_4\,k_2,\quad \Delta_4 = 2{,}138 \text{ Fuß}$$
$$q_5\,\Delta_5 = \overset{1}{a}_5\,k_1 + \overset{2}{a}_5\,k_2\quad \Delta_5 = -1{,}743 \text{ „}$$

Endlich

$$A = 43^\circ.\ 15'.\ 18'',333$$
$$B = 57\ .\ 11\ .\ 48{,}334$$
$$C = 79\ .\ 32\ .\ 53{,}334$$

$$a = 7586{,}038 \text{ Fuß}$$
$$b = 9305{,}157 \text{ „}$$

Nunmehr ist nicht bloß $A + B + C = 180^o$, sondern auch $a \sin B = b \sin A$.

§. 236.

Wir können nun fragen, ob und wie viel genauer die O durch die Ausgleichung geworden sind. Zu diesem Behufe müssen wir Folgendes überlegen: Die Beobachtung o_r der Größe O_r ist aus einer vollständigen Beobachtungsreihe mit dem Modul h_r genommen und das Gewicht von o_r ist q_r. So auch für alle anderen Beobachtungen, und wenn wir nun $o_1\ o_2\ o_3 \ldots\ldots o_n$ statt der wahren $O_1\ O_2\ O_3 \ldots O_n$ getroffen und deßhalb die Fehler $\triangle_1\ \triangle_2\ \triangle_3 \ldots \triangle_n$ begangen haben, so ist der Ausdruck W in (54) die Häufigkeit der Fehlerreihe $\triangle_1\ \triangle_2\ \triangle_3 \ldots\ldots \triangle_n$ oder des Systems $o_1\ o_2\ o_3 \ldots\ldots o_n$ im Vergleich mit der gesammten Häufigkeit aller möglichen Fehlerreihen, oder aller möglichen Zusammenstellungen aller möglichen Werthe von $O_1\ O_2\ O_3 \ldots\ldots O_n$, seien dieselben den Gleichungen (56) unterworfen, oder nicht. Aber nun setzen wir bloß ausgeglichene Reihen der O, scheiden also alle diejenigen Reihen aus, welche den Gleichungen (56) nicht entsprechen, und dadurch ändert sich auch die Wahrscheinlichkeit des Fehlers $\triangle_r$, welche $=\frac{\mu h_r}{\sqrt{\pi}} e^{-h_r^2 \triangle_r^2}$ ist, wenn wir diesen Fehler aus der entsprechenden Beobachtungsreihe gegriffen denken. Denn nun ist die Frage nach dem Verhältniß der Zahl derjenigen ausgeglichenen Fehlerreihen, welche das Glied $\triangle_r$ enthalten, zur Anzahl aller ausgeglichenen Fehlerreihen.

Die wahren O genügen den Gleichungen (56), die ausgeglichenen ebenfalls; die Fehler, welche wir durch unsere ausgeglichenen O dennoch begehen, sind also gewissen Bedingungen unterworfen, welche durch die Gleichungen (57) nicht ausgedrückt sind, aber daraus erhalten werden, wenn wir die $\delta = 0$ setzen. Denn setzen wir die ausgeglichenen Werthe $O_1 + \triangle_1$, $O_2 + \triangle_2$, $O_3 + \triangle_3 \ldots\ldots O_n + \triangle_n$ an die Stelle der wahren O, so bleibt der Ausdruck X, z. B. immer noch 0, wie bei den wahren O der Fall ist. Wir erhalten also nach dem Taylor'schen Lehrsatze, sofern wir die $\triangle$ als Differentialien behandeln dürfen:

$$0 = X_1 + \left(\frac{dX_1}{dO_1}\right)\triangle_1 + \left(\frac{dX_1}{dO_2}\right)\triangle_2 \ldots + \left(\frac{dX_n}{dO_n}\right)\triangle_n,$$

wo in X_1 und seinen Differentialquotienten die wahren O zu setzen sind. Daher $X_1 = 0$ und

$$0 = \left(\frac{dX_1}{dO_1}\right)\triangle_1 + \left(\frac{dX_1}{dO_2}\right)\triangle_2 \ldots + \left(\frac{dX_n}{dO_n}\right)\triangle_n.$$

Die wahren O kennen wir nun freilich nicht, können also auch die $\left(\frac{dX_1}{dO}\right)$ nicht berechnen, indessen werden wir uns doch von der Wahrheit nicht sehr entfernen, wenn wir statt der wahren O ihre beobachteten Werthe nehmen. Wir erhalten dadurch dieselben Werthe der Differentialquotienten, wie in (57), und folglich für die Fehler ausgeglichener O folgende Bedingungen:

(62)

$$0 = \overset{1}{a}_1 \triangle_1 + \overset{1}{a}_2 \triangle_2 + \overset{1}{a}_3 \triangle_3 \ldots + \overset{1}{a}_n \triangle_n$$
$$0 = \overset{2}{a}_1 \triangle_1 + \overset{2}{a}_2 \triangle_2 + \overset{2}{a}_3 \triangle_3 \ldots + \overset{2}{a}_n \triangle_n$$
$$0 = \overset{3}{a}_1 \triangle_1 + \overset{3}{a}_2 \triangle_2 + \overset{3}{a}_3 \triangle_3 \ldots + \overset{3}{a}_n \triangle_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0 = \overset{p}{a}_1 \triangle_1 + \overset{p}{a}_2 \triangle_2 + \overset{p}{a}_3 \triangle_3 \ldots + \overset{p}{a}_n \triangle_n$$

Vermöge dieser Gleichungen wollen wir von den △ ihrer p, eben weil wir sie als abhängig denken, durch die übrigen ausdrücken und ihre Werthe in S in (53) setzen, wodurch dieses sich in S′ verwandeln mag. Unter den eliminirten △ soll jedoch $\triangle_r$ nicht sein. Die Wahrscheinlichkeit der Fehlerreihe $\triangle_1\ \triangle_2\ \triangle_3 \ldots \triangle_n$ wird dadurch, wenn wir der Kürze halber:

$$\frac{\mu^n h^n \sqrt{q_1\ q_2\ q_3 \ldots q_n}}{(\sqrt{\pi})^n} = K$$

setzen:

$$W = K e^{-h^2 S'}.$$

In S' setzen wir nun $\triangle_1 + \gamma$ statt $\triangle_1$, so daß

$$S' + \left(\frac{dS'}{d\triangle_1}\right)\gamma + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2S'}{d\triangle_1^2}\right)\gamma^2$$

aus S' wird. Dann bestimmen wir $\triangle_1$ so, daß $\left(\frac{dS'}{d\triangle_1}\right) = 0$ wird, und setzen diesen Werth von $\triangle_1$ in S', wodurch dieses sich in das von $\triangle_1$ unabhängige S'_1 verwandelt. Setzen wir auch $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2S}{d\triangle_1^2}\right) = b_1^2$, so ist $S'_1 + b_1^2\,\gamma^2$ aus S' geworden, und aus W hat man

$$W = K\,e^{-h^2 S'_1}\,e^{-h^2 b_1^2\,\gamma^2}.$$

Entscheiden wir dabei für keinen Werth von $\triangle_1$ oder γ, so verwandelt sich W in

$$W_1 = \frac{K}{\nu_1}\,e^{-h^2 S'_1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 b_1^2\,\gamma^2}\,d\gamma$$

d. h. in

$$W_1 = \frac{K\sqrt{\pi}\cdot e^{-h^2 S'_1}}{\nu_1\;b^1\;h}$$

wo die unendlich kleine Größe ν_1 mit $\triangle_1$ gleichartig ist. In jeder ausgeglichenen Fehlerreihe sind $n-p$ willkührliche oder unabhängige $\triangle$; es bedeutet also W_1 die gesammte Wahrscheinlichkeit aller ausgeglichenen Fehlerreihen mit den bestimmten Gliedern $\triangle_2\;\triangle_3\;.\;.\;.\;.\;\triangle_{n-p}$, ohne daß ein bestimmter Werth von $\triangle_1$ festgesetzt ist. Denn W läßt sich als die Wahrscheinlichkeit der ausgeglichenen Fehlerreihe mit den bestimmten Gliedern $\triangle_1$ $\triangle_2\;\triangle_3\;.\;.\;.\;.\;\triangle_n$ ansehen.

In S'_1 lassen wir nun wieder $\triangle_2$ in $\triangle_2 + \gamma$ übergehen, wodurch S'_1 sich in

$$S'_1 + \left(\frac{dS'_1}{d\triangle_2}\right)\gamma + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d_2S'_1}{d\,\triangle_2^2}\right)\gamma^2$$

verwandelt. Wir machen $\left(\frac{dS'_1}{d\triangle_2}\right) = 0$, setzen den darnach bestimmten Werth von $\triangle_2$ in S'_1 und erhalten

daraus S'_2, welches nicht mehr von $\triangle_1$ und $\triangle_2$ abhängig ist. Setzen wir dann noch $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 S'_1}{d\triangle_2^2}\right) = b_2^2$, so wird

$$\frac{K\sqrt{\pi}\, e^{-h^2 S'_2}}{\nu_1\, b_1\, h}\, e^{-h^2 b_2^2 \gamma^2}$$

aus W_1. Wird dabei für keinen Werth von γ entschieden, so erhalten wir

$$W_2 = \frac{K\sqrt{\pi}\, e^{-h^2 S'_2}}{\nu_1\, \nu_2\, b_1\, h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 b_2^2 \gamma^2}\, d\gamma$$

oder

$$W_2 = \frac{K\,(\sqrt{\pi})^2\, e^{-h^2 S'_2}}{\nu_1\, \nu_2\, b_1\, b_2\, h^2}$$

und die unendlich kleine Größe ν_2 mit $\triangle_2$ gleichartig ist. Indem wir wieder $\left(\frac{dS'_2}{d\triangle_3}\right) = 0$ machen und überhaupt das vorige Verfahren $n-p-1$ mal wiederholen, bis alle $\triangle$ außer $\triangle_r$ eliminirt sind, erhalten wir

$$W_{n-p-1} = \frac{K\,(\sqrt{\pi})^{n-p-1}\, e^{-h^2 S'_{n-p-1}}}{\nu_1\, \nu_2\, \nu_3 \ldots \nu_{n-p-1}\, b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_{n-p-1}\, h^{n-p-1}}$$

welcher Ausdruck nun die gesammte Häufigkeit aller ausgeglichenen Fehlerreihen mit dem bestimmten Gliede $\triangle_r$ im Bezug auf die gesammte Häufigkeit aller möglichen Fehlerreihen bedeutet. Entscheiden wir dabei für gar keinen Werth von $\triangle_r$, so wird aus W_{n-p-1}, wenn wir W_{n-p-1} kurz $= K'\, e^{-h^2 S'_{n-p-1}}$ setzen:

$$^{\infty}W_{n-p-1} = \frac{K'}{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 S'_{n-p-1}}\, d\triangle_r$$

wo die unendlich kleine Größe ν mit $\triangle_r$ gleichartig ist. Dieser Ausdruck ist nun die gesammte Häufigkeit aller a u s g e g l i c h e n e n Fehlerreihen im Vergleich mit der gesammten Häufigkeit aller m ö g l i c h e n Fehlerreihen. Daher giebt der Quotient $\frac{W_{n-p-1}}{^{\infty}W_{n-p-1}}$ an, ein wievielster

Theil die Häufigkeit des Fehlers $\triangle_r$ von der gesammten Häufigkeit aller Werthe von $\triangle_r$ in den ausgeglichenen Fehlerreihen ist; er ist also die Wahrscheinlichkeit des Fehlers $\triangle_r$, wenn wir nur ausgeglichene Reihen der O zulassen. Bezeichnen wir diese Wahrscheinlichkeit mit v_{o_r}, so haben wir

(63)

$$v_{o_r} = \frac{\nu\, e^{-h^2 S'_{n-p-1}}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 S'_{n-p-1}} d\triangle_r}.$$

§. 237.

Nunmehr kommt es also darauf an, die Größe S'_{n-p-1} zu finden, welche eine bloße Function von $\triangle_r$ ist. Durch das im vorigen §. befolgte Verfahren, welches eben so viel bedeutet, als ob man die Differentialquotienten von S' nach allen unabhängigen $d\triangle$, bis auf $\left(\frac{dS'}{d\triangle_r}\right)$, $= 0$ gemacht hätte, ist offenbar S'_{n-p-1} ein kleinstes S geworden, nur daß dabei $\triangle_r$ als unveränderlich angesehen wird, und dieses Kleinste ist zugleich durch die Gleichungen (62) beschränkt. Man hat also

$$0 = \tfrac{1}{2} dS = q_1 \triangle_1 \cdot d\triangle_1 + q_2 \triangle_2 \cdot d\triangle_2 + q_3 \triangle_3 \cdot d\triangle_3 \ldots\ldots + q_n \triangle_n \cdot d\triangle_n$$

wenn man bemerkt, daß hierin das Glied $q_r \triangle_r \cdot d\triangle_r$, wegen $d\triangle_r = 0$, fehlt. Aus (62) folgt durch Differentiirung:

$$0 = \overset{1}{a}_1\, d\triangle_1 + \overset{1}{a}_2\, d\triangle_2 + \overset{1}{a}_3\, d\triangle_3 \ldots \overset{1}{a}_n\, d\triangle_n$$

$$0 = \overset{2}{a}_1\, d\triangle_1 + \overset{2}{a}_2\, d\triangle_2 + \overset{2}{a}_3\, d\triangle_3 \ldots \overset{2}{a}_n . d\triangle_n$$

. . . .

$$0 = \overset{p}{a}_1\, d\triangle_1 + \overset{p}{a}_2\, d\triangle_2 + \overset{p}{a}_3\, d\triangle_3 \ldots \overset{p}{a}_n\, d\triangle_n,$$

worin ebenfalls $d\triangle_r$ fehlt. Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit t_1 t_2 t_3 . . . . . t_p und subtrahirt die Producte von $\frac{1}{2}dS$, so folgt:

$$0 = \left(q_1 \triangle_1 - \overset{1}{a}_1 t_1 - \overset{2}{a}_1 t_2 - \overset{3}{a}_1 t_3 \ldots - \overset{p}{a}_1 t_p\right) d\triangle_1$$
$$+ \left(q_2 \triangle_2 - \overset{1}{a}_2 t_1 - \overset{2}{a}_2 t_2 - \overset{3}{a}_2 t_3 \ldots - \overset{p}{a}_2 t_p\right) d\triangle_2$$
$$+ \left(q_3 \triangle_3 - \overset{1}{a}_3 t_1 - \overset{2}{a}_3 t_2 - \overset{3}{a}_3 t_3 \ldots - \overset{p}{a}_3 t_p\right) d\triangle_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \left(q_n \triangle_n - \overset{1}{a}_n t_1 - \overset{2}{a}_n t_2 - \overset{3}{a}_n t_3 \ldots - \overset{p}{a}_n t_p\right) d\triangle_n.$$

Da die t ganz willkührlich sind, so lassen sie sich so nehmen, daß die Coefficienten der $d\triangle$, welche man als abhängige sich vorstellt, verschwinden, und da dann auch die Coefficienten der unabhängigen $d\triangle = 0$ werden müssen, wenn die ganze Gleichung 0 werden soll, so folgt sogleich:

(64)

$$q_1 \triangle_1 = \overset{1}{a}_1 t_1 + \overset{2}{a}_1 t_2 + \overset{3}{a}_1 t_3 \ldots + \overset{p}{a}_1 t_p$$
$$q_2 \triangle_2 = \overset{1}{a}_2 t_1 + \overset{2}{a}_2 t_2 + \overset{3}{a}_2 t_3 \ldots + \overset{p}{a}_2 t_p$$
$$q_3 \triangle_3 = \overset{1}{a}_3 t_1 + \overset{2}{a}_3 t_2 + \overset{3}{a}_3 t_3 \ldots + \overset{p}{a}_3 t_p$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$q_n \triangle_n = \overset{1}{a}_n t_1 + \overset{2}{a}_n t_2 + \overset{3}{a}_n t_3 \ldots + \overset{p}{a}_n t_p.$$

Hierdurch sind alle $\triangle$ durch die t bestimmt, außer $\triangle_r$, welches annoch ganz willkührlich ist. Um die t zu erhalten, setze man die Werthe der $\triangle$ in die Gleichungen (62), welchen man, wegen des nicht anzutastenden $\triangle_r$, folgende Gestalt giebt:

$$0 = \overset{1}{a}_r \triangle_r + \overset{1}{a}_1 \triangle_1 + \overset{1}{a}_2 \triangle_2 + \ldots \overset{1}{a}_{r-1} \triangle_{r-1}$$
$$+ \overset{1}{a}_{r+1} \triangle_{r+1} \ldots + \overset{1}{a}_n \triangle_n$$

u. s. w.

Man erhält dadurch, mit Rücksicht auf die Bezeichnung in (61), wenn man die Quotienten $\frac{t_1}{\triangle_r}$, $\frac{t_2}{\triangle_r}$, $\frac{t_3}{\triangle_r} \ldots \frac{t_p}{\triangle_r}$ der Reihe nach mit $T_1\ T_2\ T_3 \ldots \ldots T_p$ bezeichnet:

(65)

$$0 = \overset{1}{a}_r + \left(\left[\frac{\overset{1}{a}_n \overset{1}{a}_n}{q_n}\right] - \frac{\overset{1}{a}_r \overset{1}{a}_r}{q_r}\right) T_1 + \left(\left[\frac{\overset{1}{a}_n \overset{2}{a}_n}{q_n}\right] - \frac{\overset{1}{a}_r \overset{2}{a}_r}{q_r}\right) T_2 \; .\;.\;.\; + \left(\left[\frac{\overset{1}{a}_n \overset{p}{a}_n}{q_n}\right] - \frac{\overset{1}{a}_r \overset{p}{a}_r}{q_r}\right) T_p$$

$$0 = \overset{2}{a}_r + \left(\left[\frac{\overset{2}{a}_n \overset{1}{a}_n}{q_n}\right] - \frac{\overset{2}{a}_r \overset{1}{a}_r}{q_r}\right) T_1 + \left(\left[\frac{\overset{2}{a}_n \overset{2}{a}_n}{q_n}\right] - \frac{\overset{2}{a}_r \overset{2}{a}_r}{q_r}\right) T_2 \; .\;.\;.\; + \left(\left[\frac{\overset{2}{a}_n \overset{p}{a}_n}{q_n}\right] - \frac{\overset{2}{a}_r \overset{p}{a}_r}{q_r}\right) T_p$$

. . . .

$$0 = \overset{p}{a}_r + \left(\left[\frac{\overset{p}{a}_n \overset{1}{a}_n}{q_n}\right] - \frac{\overset{p}{a}_r \overset{1}{a}_r}{q_r}\right) T_1 + \left(\left[\frac{\overset{p}{a}_n \overset{2}{a}_n}{q_n}\right] - \frac{\overset{p}{a}_r \overset{2}{a}_r}{q_r}\right) T_2 \; .\;.\;.\; + \left(\left[\frac{\overset{p}{a}_n \overset{p}{a}_n}{q_n}\right] - \frac{\overset{p}{a}_r \overset{p}{a}_r}{q_r}\right) T_p$$

und wenn man hieraus die T gefunden hat, so hat man auch

$$t_1 = T_1 \triangle_r; \; t_2 = T_2 \triangle_r; \; t_3 = T_3 \triangle_r \; .\;. \quad .\;.\; t_p = T_p \triangle_p$$

und die Gleichungen (64) geben:

(66)

$$\begin{aligned} S_{n-p-1} = & \frac{1}{q_1}\left(\overset{1}{a}_1 T_1 + \overset{2}{a}_1 T_2 + \overset{3}{a}_1 T_3 \ldots + \overset{p}{a}_1 T_p\right)^2 \triangle_r^2 \\ & + \frac{1}{q_2}\left(\overset{1}{a}_2 T_1 + \overset{2}{a}_2 T_2 + \overset{3}{a}_2 T_3 \ldots + \overset{p}{a}_2 T_p\right)^2 \triangle_r^2 \\ & + \frac{1}{q_3}\left(\overset{1}{a}_3 T_1 + \overset{2}{a}_3 T_2 + \overset{3}{a}_3 T_3 \ldots + \overset{p}{a}_3 T_p\right)^2 \triangle_r^2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1}{q_{r-1}}\left(\overset{1}{a}_{r-1} T_1 + \overset{2}{a}_{r-1} T_2 \ldots + \overset{p}{a}_{r-1} T_p\right)^2 \triangle_r^2 \\ & + q_r \triangle_r^2 \\ & + \frac{1}{q_{r+1}}\left(\overset{1}{a}_{r+1} T_1 + \overset{2}{a}_{r+1} T_2 \ldots \overset{p}{a}_{r+1} T_p\right)^2 \triangle_r^2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{q_n}\left(\overset{1}{a}_n T_1 + \overset{2}{a}_n T_2 \ldots . + \overset{p}{a}_n T_p\right)^2 \triangle_r^2$$

was wir mit

$$S_{n-p-1} = G_r^2 \triangle_r^2$$

bezeichnen wollen. Daher hat man nun aus (63):

$$v_{o_r} = \frac{\nu\, e^{-h^2 G_r^2 \triangle_r^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 G_r^2 \triangle_r^2}\, d\triangle_r}$$

oder

(67)

$$v_{o_r} = \frac{\nu\, h\, G_r}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 G_r^2 \triangle_r}$$

wornach der Fehler $\triangle_r$ als Glied einer vollständigen Beobachtungsreihe mit dem Modul $h G_r$ erscheint. Es ist demnach G_r^2 das Gewicht des ausgeglichenen O_r, wenn das des beobachteten $O_1 = 1$ gesetzt wird. Auch ist G_r^2 immer größer, als q_r, daß also die ausgeglichenen Größen immer genauer als die unmittelbar beobachteten sind.

Betrachten wir z. B. den einfachen Fall, wo n Winkel $O_1\ O_2\ O_3 \ldots . O_n$ gemessen sind, deren Summe $O_1 + O_2 + O_3 + \ldots . + O_n$ der theoretischen Summe $\underset{1}{A}$ gleich sein muß, so ist $\overset{1}{a}_1 = \overset{1}{a}_2 = \overset{1}{a}_3 \ldots$ $\ldots = a_n = 1$, und alle übrigen a sind $= 0$. Sind dann noch alle Gewichte einander gleich, also gleich 1, so giebt (65): $0 = 1 + (n-1)\, T_1$, also $T_1 = \frac{-1}{n-1}$, woraus folgt $G_r^2 = 1 + \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1}$. Ist $n = 2$, so wird auch $G_r^2 = 2$, also das Gewicht der beiden ausgeglichenen Winkel doppelt so groß, als das der unmittelbar beobachteten. Bei vielen Winkeln nähert sich das Gewicht der ausgeglichenen Werthe schon ziemlich dem der Beobachtungen.

Aber die Form der Zahl G_r in (66) läßt sich noch beträchtlich vereinfachen. Multiplicirt man nämlich die

Gleichungen (65) der Reihe nach mit $T_1\ T_2\ T_3 \ldots\ldots T_p$ und addirt die Producte, so sind die Glieder, welche mehr als ein T zu Factoren haben, genau diejenigen, welche man erhält, wenn man in (66) die Quadrate auflös't, dabei aber das Glied $q_r \triangle_r^2$ und überhaupt auch den Factor $\triangle_r^2$ wegläßt. Da die Summe aller Glieder $= 0$, so betragen die mit mehr als einem T zusammen $- \overset{1}{a}_r T_1 - \overset{2}{a}_r T_2 - \overset{3}{a}_r T_3 \ldots\ldots - \overset{p}{a}_r T_p$, und es wird daher:

(67 a)

$$G_r = \sqrt{q_r - \left(\overset{1}{a}_r T_1 + \overset{2}{a}_r T_2 + \overset{3}{a}_r T_3 \ldots\ldots + \overset{p}{a}_r T_p\right)}$$

Dadurch verwandelt sich z. B. die erste der Gleichungen (65) in

$$0 = \frac{\overset{1}{a}_r G_r^2}{q_r} + \left[\frac{\overset{1}{a}_n \overset{1}{a}_n}{q_n}\right] T_1 + \left[\frac{\overset{1}{a}_n \overset{2}{a}_n}{q_n}\right] T_2 \ldots\ldots + \left[\frac{\overset{1}{a}_n \overset{p}{a}_n}{q_n}\right] T_p$$

Setzen wir also

$T_1 = \Gamma_1\, G_r^2,\ T_2 = \Gamma_2\, G_r^2\ \ldots\ldots\ T_p = \Gamma_p\, G_r^2,$

so erhalten wir aus (65) die neuen Gleichungen:

(67 b)

$$0 = \frac{\overset{1}{a}_r}{q_r} + \left[\frac{\overset{1}{a}_n \overset{1}{a}_n}{q_n}\right] \Gamma_1 + \left[\frac{\overset{1}{a}_n \overset{2}{a}_n}{q_n}\right] \Gamma_2 \ldots\ldots + \left[\frac{\overset{1}{a}_n \overset{p}{a}_n}{q_n}\right] \Gamma$$

$$0 = \frac{\overset{2}{a}_r}{q^r} + \left[\frac{\overset{2}{a}_n \overset{1}{a}_n}{q_n}\right] \Gamma_1 + \left[\frac{\overset{2}{a}_n \overset{2}{a}_n}{q_n}\right] \Gamma_2 \ldots\ldots + \left[\frac{\overset{1}{a}_n \overset{p}{a}_n}{q_n}\right] \Gamma_p$$

. . . .

$$0 = \frac{\overset{p}{a}_r}{q_r} + \left[\frac{\overset{p}{a}_n \overset{1}{a}_n}{q_n}\right] \Gamma_1 + \left[\frac{\overset{p}{a}_n \overset{2}{a}_n}{q_n}\right] \Gamma_2 \ldots\ldots + \left[\frac{\overset{p}{a}_n \overset{p}{a}_n}{q_n}\right] \Gamma_p$$

Sind hieraus die Γ gefunden, so erhält man durch (67 a):

$$G_r^2 = q_r - \left(\overset{1}{a}_r \Gamma_1 + \overset{2}{a}_r \Gamma_2 + \overset{3}{a}_r \Gamma_3 \ldots\ldots + \overset{p}{a}_r \Gamma_p\right) G_r^2$$

also

(67 c)

$$G_r^2 = \frac{q_r}{1 + \overset{1}{a}_r \Gamma_1 + \overset{2}{a}_r \Gamma_2 + \overset{3}{a}_r \Gamma_3 \ldots. + \overset{p}{a}_r \Gamma_p}.$$

§. 238.

Aus dem Ausdrucke

$$W = \frac{\mu^n h^n \sqrt{q_1 q_2 q_3 \cdots q_n}}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2 (q_1 \triangle_1^2 + q_2 \triangle_2^2 \ldots. + q_n \triangle_n^2)}$$

findet man ebenfalls nach dem schon bekannten Verfahren den wahrscheinlichsten Modulus der ersten Beobachtung

(68)

$$H = \sqrt{\frac{n}{2(q_1 \triangle_1^2 + q_2 \triangle_2^2 + q_3 \triangle_3^2 \ldots. + q_n \triangle_n^2)}}$$

(vergl. (24)), und dann den wahrscheinlichsten Fehler der r ten Beobachtung =

$$(69) \quad \frac{0{,}47694}{H\sqrt{q_r}}.$$

Der wahrscheinliche Fehler des ausgeglichenen O_r ist aber =

$$(70) \quad \frac{0{,}47694}{H\, G_r}.$$

§. 239.

Wir haben nun die Auflösungen aller Hauptaufgaben der Ausgleichungsrechnung gegeben, aber noch bleibt uns der Grad der Genauigkeit solcher Größen zu berechnen übrig, welche aus ausgeglichenen Werthen durch irgendwelche Gleichungen abgeleitet werden, die man also gar nicht beobachtet. Es sei U die Größe, welche man aus den nach den Principien der Ausgleichungsrechnung verbesserten Größen O_1 O_2 O_3 . . . . O_n berechnen soll, so daß man folgende Gleichung hat:

(71)

$$U = \psi\,(O_1, O_2, O_3 \ldots . O_n)$$

wo ψ die Rechnungsform ausdrückt. Setzen wir statt der wahren O die fehlerhaften $O_1 + \Delta_1$, $O_2 + \Delta_2$ u. s. w., so wird sich U in $U + u$ verwandeln, und u ist der Fehler, um welchen U in Folge der Fehler $\Delta_1\ \Delta_2 \ldots .$ irrig wird. Sofern wir nun die Δ als Differentialien behandeln dürfen, erhalten wir durch den Taylor'schen Lehrsatz:

$$u = \left(\frac{dU}{dO_1}\right) \Delta_1 + \left(\frac{dU}{dO_2}\right) \Delta_2 \ldots . + \left(\frac{dU}{dO_n}\right) \Delta_n.$$

Die Differentialquotienten des U berechnen wir dadurch, daß wir die ausgeglichenen O an die Stelle der wahren O setzen, und erhalten dann

(72)

$$u = \vartheta_1\,\Delta_1 + \vartheta_2\,\Delta_2 + \vartheta_3\,\Delta_3 \ldots . + \vartheta_n\,\Delta_n,$$

wo die Bedeutung der ϑ klar ist. Dabei sind alle O, und folglich auch die Δ als unabhängig von einander zu betrachten, denn fänden irgendwelche Gleichungen zwischen ihnen Statt, so ließen sich eben so viele O mit ihrer Hülfe eliminiren, wodurch U in (71) Function von lauter unabhängigen O werden würde.

Aber denselben Fehler u können wir durch zahllose Reihen der Δ hervorbringen, und wenn wir nun die Bedingung stellen, daß u constant sei, so werden die Δ durch die Gleichung (72) von einander abhängig.

Es seien $Q_1\ Q_2\ Q_3 \ldots . Q_n$ die Gewichte der corrigirten $O_1\ O_2\ O_3 \ldots . O_n$, im Vergleich wenn das jener ersten Beobachtung, die der Reihe mit dem Modul h entnommen ist, = 1 gesetzt wird. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Fehler $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3 \ldots \ldots \Delta_n$ wirklich statt haben, =

(73)

$$W = \frac{\mu_n h_n \sqrt{Q_1 Q_2 Q_3 \cdots Q_n}}{(\sqrt{\pi})^n}\, e^{-h^2(Q_1 \Delta_1^2 + Q_2 \Delta_2^2 \cdots + Q_n \Delta_n^2)}$$

und eben so groß ist auch die Wahrscheinlichkeit des Fehlers u, sofern er einzig durch die Fehler $\triangle_1$ $\triangle_2$ $\triangle_3$ . . . . $\triangle_n$ hervorgebracht wird; denn so häufig diese Fehlerreihe ist, eben so häufig ist auch u.

Aus (72) bestimme man eines der $\triangle$, etwa $\triangle_n$ durch u und substituire seinen Werth in $Q \triangle_1^2 + Q_2 \triangle_2^2 \ldots\ldots + Q_n \triangle_n^2$, dessen darnach umgeänderter Werth mit **S** bezeichnet werden soll, wodurch

$$W = K e^{-h^2 S}$$

wird. Wollen wir nun hieraus die Häufigkeit des u (bezüglich der gesammten Häufigkeit aller möglichen Fehlerreihen nämlich) finden, ohne daß dabei auf bestimmte Werthe der $\triangle$ gesehen wird, so müssen wir **W** successive darnach umändern, daß jedes noch in **S** enthaltene $\triangle$ die Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann. Wir kommen dadurch ganz auf das Verfahren des §. 236 und finden die Häufigkeit des u im Bezug auf die gesammte Häufigkeit aller Fehlerreihen =

$$W_{n-1} = K' e^{-h^2 S_{n-1}}$$

wobei S_{n-1} nur noch Function von u, K' aber von u ganz unabhängig ist. Hier finden wir aber S_{n-1}, wenn wir

$$Q_1 \triangle_1^2 + Q_2 \triangle_2^2 + Q_3 \triangle_3^2 \ldots . + Q_n \triangle_n^2$$

zu einem, durch die Gleichung (72) beschränkten Kleinsten machen, weßhalb sein muß

$$0 = Q_1 \triangle_1 . d\triangle_1 + Q_2 \triangle_2 . d\triangle_2 \ldots . + Q_n \triangle_n . d\triangle_n$$

und aus (72), weil u bei aller Veränderlichkeit der $\triangle$ constant ist:

$$0 = \vartheta_1 . d\triangle_1 + \vartheta_2 . d\triangle_2 + \vartheta_3 . d\triangle_3 \ldots + \vartheta_n . d\triangle_n .$$

Multiplicirt man die zweite Gleichung mit τ und subtrahirt sie von der ersten, so kommt:

$$0 = (Q_1 \triangle_1 - \tau\vartheta_1) . d\triangle_1 + (Q_2 \triangle_2 - \tau\vartheta_2) . d\triangle_2 \ldots\ldots + (Q_n \triangle_n - \tau\vartheta_n) . d\triangle_n,$$

und da nun τ ganz willkührlich ist, so kann man es so bestimmen, daß das abhängige $d\triangle_n$ verschwindet. Da dann auch von den übrigen $d\triangle$, weil dieselben unabhängig sind, jedes für sich verschwinden muß, so hat man:

$$Q_1 \triangle_1 = \tau \vartheta_1,\ q_2 \triangle_2 = \tau \vartheta_2 \ldots\ldots q_n \triangle_n = \tau \vartheta_n.$$

Setzt man diese Werthe der $\triangle$ in (72), so kommt:

$$u = \left(\frac{\vartheta_1^2}{Q_1} + \frac{\vartheta_2^2}{Q_2} + \frac{\vartheta_3^2}{Q_3} \ldots\ldots + \frac{\vartheta_n^2}{Q_n}\right) \tau$$

also wenn man setzt:

(74)

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{\frac{\vartheta_1^2}{Q_1} + \frac{\vartheta_2^2}{Q_2} + \frac{\vartheta_3^2}{Q_3} \ldots\ldots\ldots + \frac{\vartheta_n^2}{Q_n}}}$$

$$\tau = \Theta^2 u.$$

Hieraus hat man alsdann

$$\triangle_1 = \frac{\Theta^2 \vartheta_1 u}{Q_1},\ \triangle_2 = \frac{\Theta^2 \vartheta_2 u}{Q_2},\ \triangle_3 = \frac{\Theta^2 \vartheta_3 u}{Q_3} \ldots\ldots \triangle_n = \frac{\Theta^2 \vartheta_n u}{Q_n}$$

$$S_{n-1} = \Theta^4 u^2 \left(\frac{\vartheta_1^2}{Q_1} + \frac{\vartheta_2^2}{Q_2} + \frac{\vartheta_3^2}{Q_3} \ldots\ldots + \frac{\vartheta_n^2}{Q_n}\right)$$

oder

$$S_{n-1} = \Theta^2 u^2$$

daher auch

$$W_{n-1} = K' e^{-h^2 \Theta^2 u^2}.$$

Bedeutet dann μ eine unendlich kleine Größe, die mit u gleichartig ist, so ist

$$^{\infty}W_{n-1} = \frac{K'}{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \Theta^2 u^2} du = \frac{K' \sqrt{\pi}}{\mu h \Theta}$$

die Häufigkeit aller Werthe von u im Bezug auf die gesammte Häufigkeit aller Fehlerreihen, der Quotient

$$\frac{W_{n-1}}{\infty W_{n-1}}$$

also, den wir mit v_u bezeichnen wollen, die Häufigkeit des bestimmten Werthes von u im Bezug auf die Häufigkeit aller Werthe von u, d. h., es ist v_u die Wahrscheinlichkeit des Fehlers u von U. Darum ist:

(75)

$$v_u = \frac{\mu h \Theta}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Theta^2 u^2}.$$

Darnach gehört u einer vollständigen Beobachtungsreihe mit dem Modul $h\Theta$ an, und das Gewicht von U ist also $= \Theta^2$, wenn das von jener ersten Beobachtung, die aus der Reihe mit dem Modul h stammt, $= 1$ gesetzt wird. Natürlich müssen die Werthe der Q so genommen werden, wie wir sie in den bisherigen Betrachtungen zu berechnen gelehrt haben.

Wird, z. B., eine Größe U, wie, z. B., eine Standlinie, aus mehren Theilen zusammengesetzt, so daß man also

$$U = O_1 + O_2 + O_3 \ldots + O_n$$

und

$$u = \triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3 \ldots + \triangle_n$$

hat, so sind alle $\vartheta = 1$, und wenn man dann auch die Gewichte aller O gleich setzt, so wird $\Theta^2 = \frac{Q}{n}$, also daß das Gewicht von U, n Mal, seine Genauigkeit daher $\sqrt{n}$ Mal geringer, als bei den einzelnen Gliedern ist. So würde sich die Sache verhalten, wenn jedesmal ein anderer Maßstab angelegt würde, so daß man annehmen könnte, die Fehler aller Maßstäbe müßten sich gegenseitig heben. Aber da sich derselbe Maßstab öfters wiederholt, O_1 n_1 Mal, O_2 n_2 Mal u. s. w., so haben wir eigentlich

$$U = n_1 O_1 + n_2 O_2 + \ldots$$

Deßhalb aber wird nun $\vartheta_1 = n_1$, $\vartheta_2 = n_2$, und wenn nun die Gewichte aller Anlegungen gleich sind, so folgt

$$\Theta^2 = \frac{Q}{n_1^2 + n_2^2 + \ldots\ldots}.$$

Würde bloß ein Maßstab gebraucht, so würde man $\Theta^2 = \frac{Q}{n^2}$ haben, also daß die Genauigkeit der gemessenen Linie $\frac{1}{n}$ von der einer Anlegung wäre. Dieses Resultat ergiebt sich auch ohne Rechnung, wenn man bedenkt, daß der bei einer Anlegung begangene Fehler, der theils in der Ungenauigkeit des Anlegens, theils in der Unrichtigkeit des Maßstabes seinen Grund hat, sich n Mal in der ganzen Linie wiederholen kann, so daß hier der Fehler n einer Anlegung n Mal vergrößert erscheint. Es geht hieraus von selbst hervor, wie vorsichtig man bei Linienmessungen sein muß. Ohnehin muß sich ja der Fehler des Maßstabes jedesmal wiederholen.

§. 240.

Die Aufgabe des §. 239 läßt sich für die bedingten Beobachtungen noch auf eine andere merkwürdige Weise lösen, ohne daß man vorher die Gewichte der ausgeglichenen Größen berechnet. Da wir nur ausgeglichene Beobachtungen zulassen, so gelten zunächst die Gleichungen in (62), aber dazu kommt noch die in (72), damit aus der Fehlerreihe $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3 \ldots\ \Delta_n$ immer der constante Fehler u entstehe. Es ist

$$W = \frac{\mu^n h^n \sqrt{q_1\, q_2\, q_3 \ldots q^n}}{(\sqrt{\pi})^n}\, e^{-h^2 S} = K e^{-h^2 S}$$

die Häufigkeit der ausgeglichenen und dazu noch der Gleichung (72) unterworfenen Fehlerreihen $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3 \ldots\ \Delta_n$ in Bezug auf die gesammte Häufigkeit aller möglichen Fehlerreihen; wir können also auch W als die Häufigkeit des u, sofern dieses durch ausgeglichene Fehlerreihen (die unter den Bedingungen (62) stehen) hervorgebracht wird, ansehen. Mit Hülfe der Gleichungen (62) uud (72) eliminiren wir aus S_1 $p + 1$ beliebige der Δ, so daß sich S in S′ verwandelt, in welchem letzteren dann alle Δ unabhängig sind. Wir haben also

$$W = K e^{-h^2 S'}$$

und hierfür stellen wir nun, um die Häufigkeit des u ohne Beschränkung durch bestimmte Fehlerreihen zu erhalten, die Rechnung des §. 236 so lange an, bis alle in S′ noch enthaltenen $\triangle$ eliminirt sind und S′ als Function des bloßen u sich herausgestellt hat. Wir erhalten also, weil n — p — 1 der $\triangle$ noch zu eliminiren sind:

$$W_{n-p-1}$$

$$= \frac{K\,(\sqrt{\pi})^{n-p-1}\, e^{-h^2 S'_{n-p-1}}}{\nu_1\,\nu_2\,\nu_3 \ldots \nu_{n-p-1}\; b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_{n-p-1}\; h^{n-p-1}}$$

oder kürzer

$$W_{p+1} = K'\, e^{-h^2 S'_{n-p-1}},$$

wo S_{n-p-1} nur noch Function von u ist, und dieser Ausdruck ist die Häufigkeit des u, sofern es durch ausgeglichene Fehlerreihen entsteht, in Bezug auf die gesammte Häufigkeit aller möglichen Fehlerreihen.

Es ist nun S'_{n-p-1} zu bestimmen. Dieses ist aber offenbar zu einem durch die Gleichungen (62) und (72) bedingten Kleinsten geworden und bestimmt sich nach der schon wiederholt erklärten Weise. Man hat also

$$\tfrac{1}{2}\, dS = 0 = q_1 \triangle_1 \cdot d\triangle_1 + q_2 \triangle_2 \cdot d\triangle_2 + \ldots\ldots$$
$$+ q_n \triangle_n \cdot d\triangle_n,$$

und wenn man die Gleichung (72) mit t, die Gleichungen (62) aber der Reihe nach mit $t_1\; t_2\; t_3 \ldots\ldots t_n$ multiplicirt und die Producte von $\frac{1}{2} \cdot dS$ subtrahirt, so kommt:

$$0 = \left(q_1 \triangle_1 - \vartheta_1 t - \overset{1}{a}_1 t_1 - \overset{2}{a}_1 t_2 \ldots - \overset{p}{a}_1 t_p\right) d\triangle_1$$
$$+ \left(q_2 \triangle_2 - \vartheta_2 t - \overset{1}{a}_2 t_1 - \overset{2}{a}_2 t_2 \ldots - \overset{p}{a}_2 t_p\right) d\triangle_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \left(q_n \triangle_n - \vartheta_n t - \overset{1}{a}_n t_1 - \overset{2}{a}_n t_2 \ldots - \overset{p}{a}_n t_p\right) d\triangle_n,$$

wornach aus den bekannten Gründen folgt:

(76)

$$\Delta_1 = \frac{1}{q_1}\left(\vartheta_1 t + \overset{1}{a}_1 t_1 + \overset{2}{a}_1 t_2 + \overset{3}{a}_1 t_3 \ldots + \overset{p}{a}_1 t_p\right)$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{q_2}\left(\vartheta_2 t + \overset{1}{a}_2 t_1 + \overset{2}{a}_2 t_2 + \overset{3}{a}_2 t_3 \ldots + \overset{p}{a}_2 t_p\right)$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{q_3}\left(\vartheta_3 t + \overset{1}{a}_3 t_1 + \overset{2}{a}_3 t_2 + \overset{3}{a}_3 t_3 \ldots + \overset{p}{a}_3 t_p\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta_n = \frac{1}{q_n}\left(\vartheta_n t + \overset{1}{a}_n t_1 + \overset{2}{a}_n t_2 + \overset{3}{a}_n t_3 \ldots + \overset{p}{a}_n t_p\right)$$

Um die t zu bestimmen, setzen wir diese Werthe der Δ in die Gleichungen (62) und erhalten

$$0 = \left[\frac{\vartheta_n \overset{1}{a}_n}{q_n}\right] t + \left[\frac{\overset{1}{a}_n \overset{1}{a}_n}{q_n}\right] t_1 + \left[\frac{\overset{2}{a}_n \overset{1}{a}_n}{q_n}\right] t_2 + \ldots + \left[\frac{\overset{p}{a}_n \overset{1}{a}_n}{q_n}\right] t_p$$

$$0 = \left[\frac{\vartheta_n \overset{2}{a}_n}{q_n}\right] t + \left[\frac{\overset{1}{a}_n \overset{2}{a}_n}{q_n}\right] t_1 + \left[\frac{\overset{2}{a}_n \overset{2}{a}_n}{q_n}\right] t_2 + \ldots + \left[\frac{\overset{p}{a}_n \overset{2}{a}_n}{q_n}\right] t_p$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \left[\frac{\vartheta_n \overset{p}{a}_n}{q_n}\right] t + \left[\frac{\overset{1}{a}_n \overset{p}{a}_n}{q_n}\right] t_1 + \left[\frac{\overset{2}{a}_n \overset{p}{a}_n}{q_n}\right] t_2 + \ldots + \left[\frac{\overset{p}{a}_n \overset{p}{a}_n}{q_n}\right] t_p.$$

Da diese Gleichungen kein bekanntes Glied haben, so bestimmen sich $t_1\ t_2\ t_3 \ldots\ t_p$ sämmtlich nur im Verhältniß zu t. Bezeichnet man nämlich

$$\frac{t_1}{t}, \frac{t_2}{t}, \frac{t_3}{t}, \ldots\ldots \frac{t_p}{t},$$

der Reihe nach mit

$$T'_1\ T'_2\ T'_3 \ldots\ldots T'_p,$$

so hat man zur Bestimmung der T' folgende Gleichungen:

(77)

$$0 = \left[\frac{\vartheta_n \overset{1}{a}_n}{q_n}\right] + \left[\frac{\overset{1}{a}_n \overset{1}{a}_n}{q_n}\right] T'_1 + \left[\frac{\overset{2}{a}_n \overset{1}{a}_n}{q_n}\right] T'_2 \ldots + \left[\frac{\overset{p}{a}_n \overset{1}{a}_n}{q_n}\right] T'_p$$

$$0=\left[\frac{\overset{2}{\vartheta_n a_n}}{q_n}\right]+\left[\frac{\overset{1\,2}{a_n a_n}}{q_n}\right]T'_1+\left[\frac{\overset{2\,2}{a_n a_n}}{q_n}\right]T'_2 \ldots + \left[\frac{\overset{p\,2}{a_n a_n}}{q_n}\right]T'_p$$

. . . .

$$0=\left[\frac{\overset{p}{\vartheta_n a_n}}{q_n}\right]+\left[\frac{\overset{1\,p}{a_n a_n}}{q_n}\right]T'_1+\left[\frac{\overset{2\,p}{a_n a_n}}{q_n}\right]T'_2 \ldots + \left[\frac{\overset{p\,p}{a_n a_n}}{q_n}\right]T'_p$$

und dann

$$t_1 = T'_1\, t,\ t_2 = T'_2\, t \ldots\ t_p = T'_p\, t.$$

Setzt man dann noch

$$L_1 = \vartheta_1 + \overset{1}{a}_1 T'_1 + \overset{2}{a}_1 T'_2 + \overset{3}{a}_1 T'_3 + \ldots + \overset{p}{a}_1 T'_p$$

$$L_2 = \vartheta_2 + \overset{1}{a}_2 T'_1 + \overset{2}{a}_2 T'_2 + \overset{3}{a}_2 T'_3 + \ldots + \overset{p}{a}_2 T'_p$$

$$L_3 = \vartheta_3 + \overset{1}{a}_3 T'_1 + \overset{2}{a}_3 T'_2 + \overset{3}{a}_3 T'_3 + \ldots + \overset{p}{a}_1 T'_p$$

. . . .

$$L_n = \vartheta_n + \overset{1}{a}_n T'_1 + \overset{2}{a}_n T'_2 + \overset{3}{a}_n T'_3 + \ldots + \overset{p}{a}_1 T'_p$$

so bekommt man aus (76):

(79)

$$\triangle_1 = \frac{L_1\, t}{q_1},\ \triangle_2 = \frac{L_2\, t}{q_2}, \ldots\ \triangle_n = \frac{L_n\, t}{q_n},$$

wo nun noch t zu bestimmen ist. Setzt man aber diese Werthe der $\triangle$ in (72), so erhält man:

$$u = \left(\frac{\vartheta_1 L_1}{q_1} + \frac{\vartheta_2 L_2}{q_2} + \frac{\vartheta_3 L_3}{q_3} \ldots + \frac{\vartheta_n L_n}{q_n}\right) t$$

also

(80)

$$t = \frac{u}{\frac{\vartheta_1 L_1}{q_1} + \frac{\vartheta_2 L_2}{q_2} + \frac{\vartheta_3 L_3}{q_3} + \ldots + \frac{\vartheta_n L_n}{q_n}}.$$

Da nun

$$S = h^2 (q_1 \triangle_1^2 + q_2 \triangle_2^2 + \ldots + q_n \triangle_n^2),$$

so findet man auch durch (79):

$$S = \left(\frac{L_1^2}{q_1} + \frac{L_2^2}{q_2} + \frac{L_3^2}{q_3} \ldots\ldots + \frac{L_n^2}{q_n}\right) h^2\, t^2.$$

Setzen wir abkürzend:

(81)

$$L = \sqrt{\frac{\dfrac{L_1^2}{q_1} + \dfrac{L_2^2}{q_2} + \dfrac{L_3^2}{q_3} + \ldots\ldots + \dfrac{L_n^2}{q_n}}{\left(\dfrac{\vartheta_1 L_1}{q_1} + \dfrac{\vartheta_2 L_2}{q_2} + \dfrac{\vartheta_3 L_3}{q_3} + \ldots + \dfrac{\vartheta_n L_n}{q_n}\right)^2}}$$

so hat man

(82)

$$S = S_{n-p-1} = h^2 L^2 u^2,$$

wobei L nur positiv genommen werden kann. Dieser Ausdruck ist aber noch beträchtlicher Vereinfachung fähig. Der Ausdruck in (72) bleibt immer noch u, wenn man dazu die mit $T'_1\; T'_2\; T'_3 \ldots T'_p$ multiplicirten Gleichungen (62) addirt. Dadurch aber wird

(83)

$$\begin{aligned} u = & \left(\vartheta_1 + \overset{1}{a}_1 T'_1 + \overset{2}{a}_1 T'_2 + \ldots\ldots + \overset{p}{a}_1 T'_p\right) \triangle_1 \\ + & \left(\vartheta_2 + \overset{1}{a}_2 T'_2 + \overset{2}{a}_2 T'_2 + \ldots\ldots + \overset{p}{a}_2 T'_p\right) \triangle_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + & \left(\vartheta_n + \overset{1}{a}_n T'_1 + \overset{2}{a}_n T'_2 + \ldots\ldots + \overset{p}{a}_n T'_p\right) \triangle_n \end{aligned}$$

oder

$$u = L_1 \triangle_1 + L_2 \triangle_2 + L_3 \triangle_3 \ldots\ldots L_n \triangle_n.$$

Hiermit findet sich aber

(84)

$$t = \frac{u}{\dfrac{L_1^2}{q_1} + \dfrac{L_2^2}{q_1} + \dfrac{L_3^2}{q_3} + \ldots\ldots + \dfrac{L_n^2}{q_n}}$$

und dann

(85)

$$L = \frac{1}{\sqrt{\frac{L_1^2}{q_1} + \frac{L_2^2}{q_2} + \frac{L_3^2}{q_3} + \ldots + \frac{L_n^2}{q_n}}}$$

Demnach wird nun das obige

$$W_{p+1} = K' e^{-h^2 L^2 u^2}$$

und daher die gesammte Häufigkeit aller Werthe von u bezüglich der Häufigkeit aller möglichen Fehlerreihen:

$$\infty W_{p+1} = \frac{K'}{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 L^2 u^2} du = \frac{K' \sqrt{\pi}}{\nu h L},$$

wo die unendlich kleine Größe ν mit u gleichartig ist. Hieraus dann:

$$\frac{W_{p+1}}{\infty W_{p+1}} = \frac{\nu h L}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 L^2 u^2},$$

welches die Häufigkeit von u in Bezug auf die Häufigkeit aller Werthe von u, also die Wahrscheinlichkeit von u ist. Bezeichnen wir sie mit v_u, so ist:

(86)

$$v_u = \frac{\nu h L}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 L^2 u^2}.$$

Darnach liegt u in einer vollständigen Beobachtungsreihe mit dem Modul h L, und daher ist L^2 das Gewicht von dem berechneten U. Wie hieraus der wahrscheinliche Fehler von U und dessen wahrscheinliche Unsicherheit folgt, bedarf keiner weiteren Erklärung.

Die Ausdrücke (79) und (80) lassen uns leicht übersehen, daß T_1 T_2 T_3 .... T_n so bestimmt sind, daß

$$\frac{L_1^2}{q_1} + \frac{L_2^2}{q_2} + \frac{L_3^2}{q_3} + \ldots\ldots + \frac{L_n^2}{q_n}$$

ein Kleinstes wird. Dadurch wird aber das nach (80) bestimmte L ein Größtes, und das Gewicht des berechneten U ist also das möglichst Größte,

oder es bekommt U dadurch, daß es aus den ausgeglichenen O hergeleitet wird, den größtmöglichen Grad der Genauigkeit.

Zur Berechnung von U werden nie alle O erfordert, und dies hat zur Folge, daß diejenigen ϑ, welche aus den Differentialquotienten des U, die nach nicht vorhandenen O zu bestimmen wären, $= 0$ zu setzen sind. Im Bezug auf diejenigen O nämlich, von welchen U nicht Function ist, ist U constant.

§. 241.

Dies sind die wesentlichen Lehren der Ausgleichungsrechnung nach der Theorie der kleinsten Quadratsummen. Man sieht, daß für die Anwendung, besonders des dritten Theiles, eine ziemliche Gewandtheit im Calcul erfordert wird, und daß schon sehr einfache Fälle auf mühsame Zifferrechnungen führen. Man kann hieraus den Schluß ziehen, daß in der sogenannten niederen Praxis die Ausgleichungsrechnung wohl schwerlich beträchtliche Anwendung finden wird, besonders da noch die durch die Ausgleichung erreichte Genauigkeit in den meisten Fällen mit dem Zwecke der Operation und dem erforderlichen Zeit- und Kostenaufwande in gar keinem Verhältnisse stehen würde. Hier ist es am angemessensten, mit möglichster Sorgfalt wiederholt zu messen und dabei gleich solche Instrumente anzuwenden, daß die jedesmal geforderte Genauigkeit auch ohne Ausgleichung nach so künstlicher Methode erreicht wird. Aber die höhere Geodäsie bedient sich der Ausgleichungsrechnung zur möglichst genäherten Darstellung ihrer Dreiecksysteme mit großem Vortheil; ihre richtige Handhabung erfordert jedoch große theoretische und practische Ausbildung des Geodäten, damit er das Geschäft in jedem Falle so anzuordnen wisse, daß eine wirkliche Ausgleichung der gemessenen Stücke durch die innige Verbindung derselben wirklich erfolgen muß. Hier ist es besonders die dritte Aufgabe, welche sich geltend macht; aber um sie in verwickelteren Fällen handhaben zu können, muß man alle Bedingungsgleichungen zwischen den gemessenen Stücken herauszufinden wissen, wozu noch eigene Anleitungen gegeben werden können, die wir hier, um den Umfang des

Werkes nicht zu sehr zu vermehren, nicht weiter berücksichtigen. Wer weitere Belehrung wünscht, lese:

Die Ausgleichungsrechnungen der practischen Geometrie von Christian Ludwig Gerling. Hamburg und Gotha, 1843.

Der Zusammenhang der Methode der kleinsten Quadratsummen mit den Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist in dieser Schrift nicht nachgewiesen, vielmehr werden die kleinsten Quadratsummen unmittelbar als Princip der Ausgleichung angenommen.

Beim Verleger dieses sind erschienen und in allen Buchhandlungen zu haben:

Das Plan- und Situationszeichnen nach Anleitung der neuesten und anerkanntesten Methoden für Militärs, Ingenieure, Bergleute, Kameralisten, Forstmänner, Feldmesser und gebildete Landwirthe von H. v. Gerstenbergk. Mit 14 lithographirten theils illuminirten Quarttafeln. gr. 4. geh. 1 Rthl. 7½ Sgr. oder 2 fl. 15 kr.


Tafeln zur Berechnung der Baustämme, Bloche, Klötze, und vierkantig beschlagenen Hölzer nach dem Kubikfuße, so wie der Breter, Bohlen und Fourniere nach dem Quadratfuße von H. v. Gerstenbergk. Nebst Nachweisung der aus einem Blocke zu schneidenden Waarensorten und zur Auffindung des Geldbetrags in allen drei jetzt in Deutschland gültigen Hauptwährungen. Zweite, um 2½ Bogen vermehrte Auflage 8. geh. 25 Sgr. oder 1 fl. 30 kr.

Methodisches, theoretisch-praktisches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Zum Schulgebrauch und Selbstbelehrung, insbesondere für angehende Feldmesser, Markscheider, Architecten, Seefahrer, Militärs u. s. w. von Dr. M. A. F. Prestel (Oberlehrer der Mathematik am Gymnasium zu Emden ꝛc.) Mit 8 Tafeln. gr. 8. 25 Sgr. oder 1 fl. 30 kr.


Praktische Altimetrie oder Höhenmessung, nebst der angewandten ebenen Trigonometrie. Für Bau- und Forstverwalter, Feldmesser, Zimmerleute, Maurer, Industrie- und Werkschulen ꝛc. Mit 14 lithographirten Quarttafeln. gr. 8. 20 Sgr. oder 1 fl. 12 kr.

Das Neueste und Interessanteste aus der Logarithmotechnik und der Anwendung der Logarithmen auf das Leben von A. Lorey (Director an der Secundär- und ersten Bürgerschule in Eisenach). Nach der engl. Schrift von Byrne und nach d. franz. von Koralek. Nebst zahlreichen Tafeln. Für den theoretischen und practischen Mathematiker und zur Benutzung beim Unterricht. 20 Sgr. oder 1 fl. 12 kr.


E






ig. 1
. 4.
M
m
n
E
a

F

F


F'








Barfuß Meßkunde 3. Aufl.


G
P

…ufs,

sten Quadrate
tung jedes ein
läufigen Berec
Gleichstellung
richtigen Wink
zu Stande ge

Die Beh
gaben, die B
ches u. s. w.

Ich verm
in hohem Gro
richtigen sein.
und Franzosen
v. Paris); d
mehr des Me
von der Ster
§. 9) unterlaß
lischen Theile
(Seite 18) m
(Seite 23, Z.
ganz ähnliches,
Toisen, statt:

Die Gen
Stiches der
wovon man
kann, wo die
nachlässig darg
Guten, störend
tung den jetzig

Wien a

hatte bei diesem Calcul keinen Antheil; nur durch Beach-
zelnen Excedenten im Dreiecke, selbst schon bei der vor-
hnung, und durch gegenseitige Prüfung bis zur endlichen
der gleichnamigen Seiten mit beständiger Festhaltung der
elsumme im Polygone, wurde eine so seltene Präcision
bracht.

andlung der Höhenmessungen, die trigonometrischen Auf-
eschreibung der Werkzeuge aller Art und ihres Gebrau-
enthalten nur Anerkennungswerthes.


isse aber ein Verzeichniß der Fehler; obgleich der Druck
de korrekt ist, dürfte doch hier und dort etwas zu be-
Zufällig bemerkte ich z. B. (Seite 4) „die Deutschen
rechnen von der Insel Ferro aus" (nämlich 20° westl.
doch seit 40 Jahren auf keiner französischen Charte
ridians von Ferro gedacht, sondern geradezu mit 0°
nwarte zu Paris aus gezählt wird; dann ist (Seite 13
en zu zeigen, warum sich die Planeten in dem aphe-
ihrer Bahn länger aufhalten; das tropische Jahr ist
t 325·24 .... statt 365·24 .... Tagen angegeben;
10 v. unten) steht 712′ statt 712″; (Seite 23 oben)
statt: beinahe ähnliches; (Seite 29 Z. 10) 5710633
57106·33 T. u. s. w.

auigkeit und Eleganz der Zeichnung sowohl als des
15 Tafeln mit 200 Figuren, sind durchaus tadellos,
höchstens einige (wie Taf. 1 Fig. 5 u. a.) ausnehmen
Durchschnittskreise der Kugel zwar als Ellipsen, aber so
estellt sind, daß es, eben im Gegensatze mit dem vielen
ist. Eben so genügt auch die typographische Ausstat-
en gesteigerten Forderungen.


m 10. Juni 1854.

Riedl v. Leuenstern.

Taf 63. Tintenbefleckt



Barfuſs Meſskunde 3.Aufl.



Barfuß Meßkunde 3.Aufl.










G
P


G
P

sten Quadrate
tung jedes ein
läufigen Berec
Gleichstellung
richtigen Wink
zu Stande ge

Die Beh
gaben, die B
ches u. s. w.

Ich verm
in hohem Gr
richtigen sein.
und Franzosen
v. Paris); d
mehr des Me
von der Ster
§. 9) unterlass
lischen Theile
(Seite 18) m
(Seite 23, Z.
ganz ähnliches,
Toisen, statt:

Die Gen
Stiches der
wovon man
kann, wo die
nachläßig darg
Guten, störend
tung den jetzig

Wien a

sten Quadrate
tung jedes ein
läufigen Berec
Gleichstellung
richtigen Wink
zu Stande ge

Die Beh
gaben, die B
ches u. s. w.

Ich verm
in hohem Gra
richtigen sein.
und Franzosen
v. Paris); d
mehr des Me
von der Ster
§. 9) unterlass
lischen Theile
(Seite 18) m
(Seite 23, Z.
ganz ähnliches,
Toisen, statt:

Die Gen
Stiches der
wovon man b
kann, wo die
nachlässig darg
Guten, störend
tung den jetzig

Wien a

hatte bei diesem Calcul keinen Antheil; nur durch Beach-
zelnen Excedenten im Dreiecke, selbst schon bei der vor-
hnung, und durch gegenseitige Prüfung bis zur endlichen
der gleichnamigen Seiten mit beständiger Festhaltung der
elsumme im Polygone, wurde eine so seltene Präcision
bracht.

andlung der Höhenmessungen, die trigonometrischen Auf-
eschreibung der Werkzeuge aller Art und ihres Gebrau-
enthalten nur Anerkennungswerthes.

isse aber ein Verzeichniß der Fehler; obgleich der Druck
de korrekt ist, dürfte doch hier und dort etwas zu be-
Zufällig bemerkte ich z. B. (Seite 4) „die Deutschen
rechnen von der Insel Ferro aus" (nämlich 20° westl.
 doch seit 40 Jahren auf keiner französischen Charte
ridians von Ferro gedacht, sondern geradezu mit 0°
nwarte zu Paris aus gezählt wird; dann ist (Seite 13
sen zu zeigen, warum sich die Planeten in dem aphe-
ihrer Bahn länger aufhalten; das tropische Jahr ist
it 325·24 .... statt 365·24 .... Tagen angegeben;
10 v. unten) steht 712′ statt 712″; (Seite 23 oben)
statt: beinahe ähnliches; (Seite 29 Z. 10) 5710633
57106·33 T. u. s. w.

auigkeit und Eleganz der Zeichnung sowohl als des
15 Tafeln mit 200 Figuren, sind durchaus tadellos,
höchstens einige (wie Taf. 1 Fig. 5 u. a.) ausnehmen
Durchschnittskreise der Kugel zwar als Ellipsen, aber so
estellt sind, daß es, eben im Gegensatze mit dem vielen
ist. Eben so genügt auch die typographische Ausstat-
en gesteigerten Forderungen.

m 10. Juni 1854.

Riedl v. Leuenstern.

Barfuß, Friedrich Wilhelm,

Handbuch der höheren und niederen Meßkunde oder gründliche Unterweisung in der gewöhnlichen Feldmeßkunst, sowie zu größeren geodätischen Aufnahmen, zu geographsichen Triangulirungen, barometrischen Höhenmessungen, zu Nivellements und zum Gebrauch der Instrumente

Weimar 1854